Calcul Matriciel - Groupe 2 (TD4) Mercredi 23 Septembre

Exercice 9 - D :

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$X=(x,y,z) \longmapsto \max(\widehat{x+y}, \widehat{x+z})$$

T est-elle linéaire ? linéarité suspecte

Il faut chercher un contre-exemple : $X \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R} : f(\alpha X) \neq \alpha f(X)$
ou bien
trouver $X, Y \in \mathbb{R}^3$:
$f(X+Y) \neq f(X)+f(Y)$

$X=(1,1,1) \quad Y=(2,2,2) \quad X+Y=(3,3,3)$

$f(X) = \max\{1+1, 1+1\} = 2 \;,\; f(Y) = 4 \;,\; f(X+Y) = 6 = 2+4 = f(X)+f(Y)$

- $X=(1,2,3)$ $\quad f(X)=\max\{1+2,1+3\}=4$
- $Y=(4,5,6)$ $\quad f(Y)=\max\{4+5,4+6\}=10$

$X+Y=(5,7,9)$ $\quad f(X+Y)=\max\{12,14\}=14=4+10=f(X)+f(Y)$

ça marche encore

- $X=(0,1,3)$ $\quad f(X)=\max\{1,3\}=3$
  $Y=(0,2,1)$ $\quad f(Y)=\max\{2,1\}=2$ $\quad f(X)+f(Y)=5$

  $X+Y=(0,3,4)$ $\quad f(X+Y)=\max\{3,4\}=4$ $\quad \neq$ f n'est pas linéaire

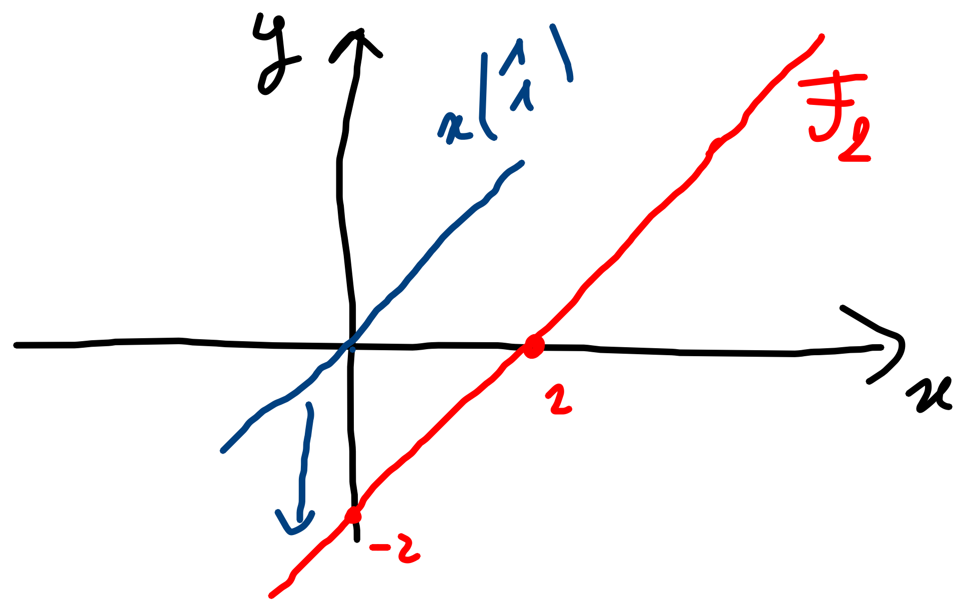
- $X=(1,3,-5)$ $\quad f(X)=\max\{4,-5\}=4$ $\rightarrow f(-X)=5$ $\quad f(\alpha X)$
  $-X=(-1,-3,6)$ $\quad f(-X)=\max\{-4,5\}=\cancel{4}\ 5$ $\quad \neq -f(X)=-4 \rightarrow =\alpha f(X)$ $\quad \alpha=-1$

Donc f n'est pas linéaire

Exercice pour la prochaine fois : Etudier la linéarité des 4 applications de l'exo10

Exercice 5 : $a \in \mathbb{R}$ $\quad F_a = \{ v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $v_1 + v_3 + \dots + v_n = a$

exemple : Dans $\mathbb{R}^2$ $\quad F_2 = \{ v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \; / \; x + y = 2 \}$



$$y = x - 2$$

$$F_2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A] F_a est un sev de $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ $a=0$

(*) Si $a \neq 0$ F_a n'est pas un sev de $\mathbb{R}^n$

$F_a \ni X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$: $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$

$O_{\mathbb{R}^n} = (\underset{x_1}{0}, \underset{x_2}{0}, \dots, \underset{x_n}{0}) \in F_a$? NON car sinon $0+0+\dots+0 = a \neq 0$

ou bien

$\underline{a=7}$ $(7, 0, \dots, 0) = X \in F_7$

$\underline{\underline{2X}} = (14, 0, \dots, 0) \in F_7$ car $14+0+\dots+0 = 14 \neq 7$

$\hookrightarrow$ la propriété $X \in F_a$ et $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha X \in F_a$ est

ou bien

$X = (7, 0, \dots, 0) \in F_7$

$Y = (6, 1, 0, \dots, 0) \in F_7$

$X+Y = (13, 1, 0, \dots, 0) \notin F_7$: la propriété Fausse $X, Y \in F_a \Rightarrow X+Y \in F_a$ Fausse

★ Montrons que $F_0 = \{ v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n : v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 0 \}$ est un SEV de $\mathbb{R}^n$

- F_0 n'est pas vide : vrai car $0_{\mathbb{R}^n} = (0, \ldots, 0) \in F_0$

- $\left.\begin{array}{l} v = (v_1, \ldots, v_n) \in F_0 \\ u = (u_1, \ldots, u_n) \in F_0 \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{array}\right\}$ $\underline{u + \alpha v \in F_0}$

$u \in F_0 \Leftrightarrow u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 0$

$v \in F_0 \Leftrightarrow v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 0$

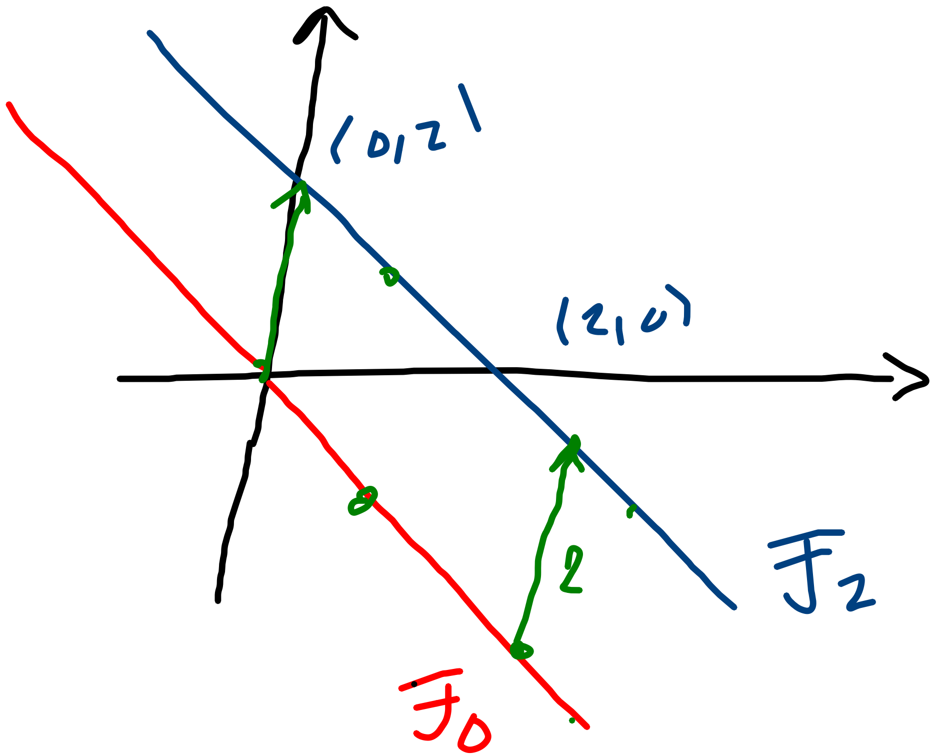
$u + \alpha v = (u_1, \ldots, u_n) + (\alpha v_1, \alpha v_2, \ldots, \alpha v_n) = (\overbrace{u_1 + \alpha v_1}^{x_1}, \overbrace{u_2 + \alpha v_2}^{x_2}, \ldots, \overbrace{u_n + \alpha v_n}^{x_n})$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + \ldots + x_n = u_1 + \alpha v_1 + \ldots + u_n + \alpha v_n = \underbrace{u_1 + \ldots + u_n}_{=0} + \alpha \underbrace{(v_1 + \ldots + v_n)}_{=0} = 0$

$\Rightarrow u + \alpha v \in F_0$

<u>Conclusion</u> : F_0 est bien un sev de $\mathbb{R}^n$.

B] Quelle relation existe-t-il entre F_a et F_0 ?



$a=2$ $\quad F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x+y=2 \right\}$

$y = -x + 2$

$y = -x : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$

$a=0$ $\quad F_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x+y=0 \right\}$

$$F_2 \ni X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \boxed{\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}} \in F_0$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + F_0}$$

Plus généralement $F_a = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + \underbrace{F_0}_{X}$

Cl $v = (v_1 \ldots v_n) \in F_0$: $v = \underline{\underline{v_1}} \square + \underline{\underline{v_2}} \square + \ldots + \underline{\underline{v_{n-1}}} \square$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ -v_1 - v_2 - \ldots - v_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -v_2 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_{n-1} \\ -v_{n-1} \end{pmatrix}$$

$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 0$

$$\boxed{v_n = -v_1 - v_2 - v_3 - \ldots - v_{n-1}}$$

$$= v_1 \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} + v_2 \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} + v_3 \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} + v_{n-1} \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Fin de l'exo

Exercice 8 :

Données
$X, Y \in \mathbb{R}^n$
$\lambda \in \mathbb{R}$

$\longrightarrow$

$i = 1 \longrightarrow n$
$y_i = y_i + \lambda x_i$
$\longrightarrow y$

$\longrightarrow X + \lambda Y = \begin{pmatrix} x_1 + \lambda y_1 \\ \vdots \\ x_n + \lambda y_n \end{pmatrix}$

$X = (x_1 \ldots x_n)$
$Y = (y_1 \ldots y_n)$

$n = 3$ $\quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda = 2$

$i = 1$

$y_1 = y_1 + 2x_1 = 9$
$y_2 = y_2 + 2\cancel{y}x_2 = 12$
$y_3 = y_3 + 2x_3 = 15$

Nombre d'opérations :

$\boxed{2n}$

Un peu de Cours (page 14 – 4)

1) Si $\left.\begin{array}{l} f : E \to F \text{ linéaire} \\ g : E \to F \quad \text{"} \end{array}\right\}$ Alors on définit $f+g : E \longrightarrow F$

$$u \longmapsto (f+g)(u) = \underbrace{f(u)}_{\in F} + \underbrace{g(u)}_{\in F}$$

$f, g \in \mathcal{L}(E, F)$

$\lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad \lambda f : E \longrightarrow F$

$$u \mapsto (\lambda f)(u) = \lambda \cdot f(u)$$

On ~~vérifie~~ vérifie sans peine que $f+g$ et λf sont linéaires

$\mathcal{L}(E, F)$ n'est jamais vide : $T : x \in E \longrightarrow T(x) = 0_F$ est linéaire : c'est l'application nulle

$\Longrightarrow$ $\mathcal{L}(E, F)$ est encore un espace vectoriel

Exemple

$E = M_3(\mathbb{R}) \qquad F = \mathbb{R}^3$

$$T : A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \longmapsto T(A) = \begin{pmatrix} a+b+c \\ d+e+f \\ g+h+i \end{pmatrix}$$

$$\boxed{T \in \mathcal{L}(M_3(\mathbb{R}), \mathbb{R}^3)}$$

$$E \xrightarrow[\text{linéaire}]{f} F \xrightarrow[\text{linéaire}]{g} G \quad \text{alors } g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$$

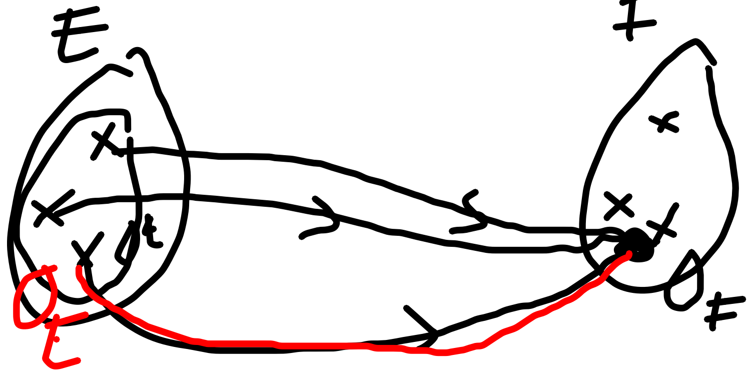
Car $x, y \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(x + \alpha y) = g(f(x + \alpha y)) \overset{f \text{ lin.}}{=} g(f(x) + \alpha f(y))$$

$$\overset{g \text{ lin}}{\longrightarrow} = g(f(x)) + \alpha g(f(y)) = (g \circ f)(x) + \alpha (g \circ f)(y)$$

Noyau d'une application linéaire $\mathrm{Ker}(f)=\{x\in E \,,\, f(x)=0_F\}$

$f\in\mathcal{L}(E,F)$



Alors $\mathrm{Ker}\, f \subset E$

C'est un sous espace vectoriel de E

Preuve • $\mathrm{Ker}\, f \neq \emptyset$ car on sait que si $f\in\mathcal{L}(E,F)$ alors $f(0_E)=0_F$: $\boxed{0_E\in \mathrm{Ker}\, f}$

• $X, Y\in \mathrm{Ker}\, f \,,\, \alpha\in\mathbb{R}$: $X+\alpha Y\in \mathrm{Ker}\, f$?

$f(X+\alpha Y) \underset{\text{lin.}}{=} f(X)+\alpha f(Y) = 0_F+\alpha\cdot 0_F = 0_F$: $X+\alpha Y\in \mathrm{Ker}\, f$

Retour à l'exercice 9

(A) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \; : \; T(x,y,z) = (x-2y, x+z)$

On a vu que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Cherchons son noyau

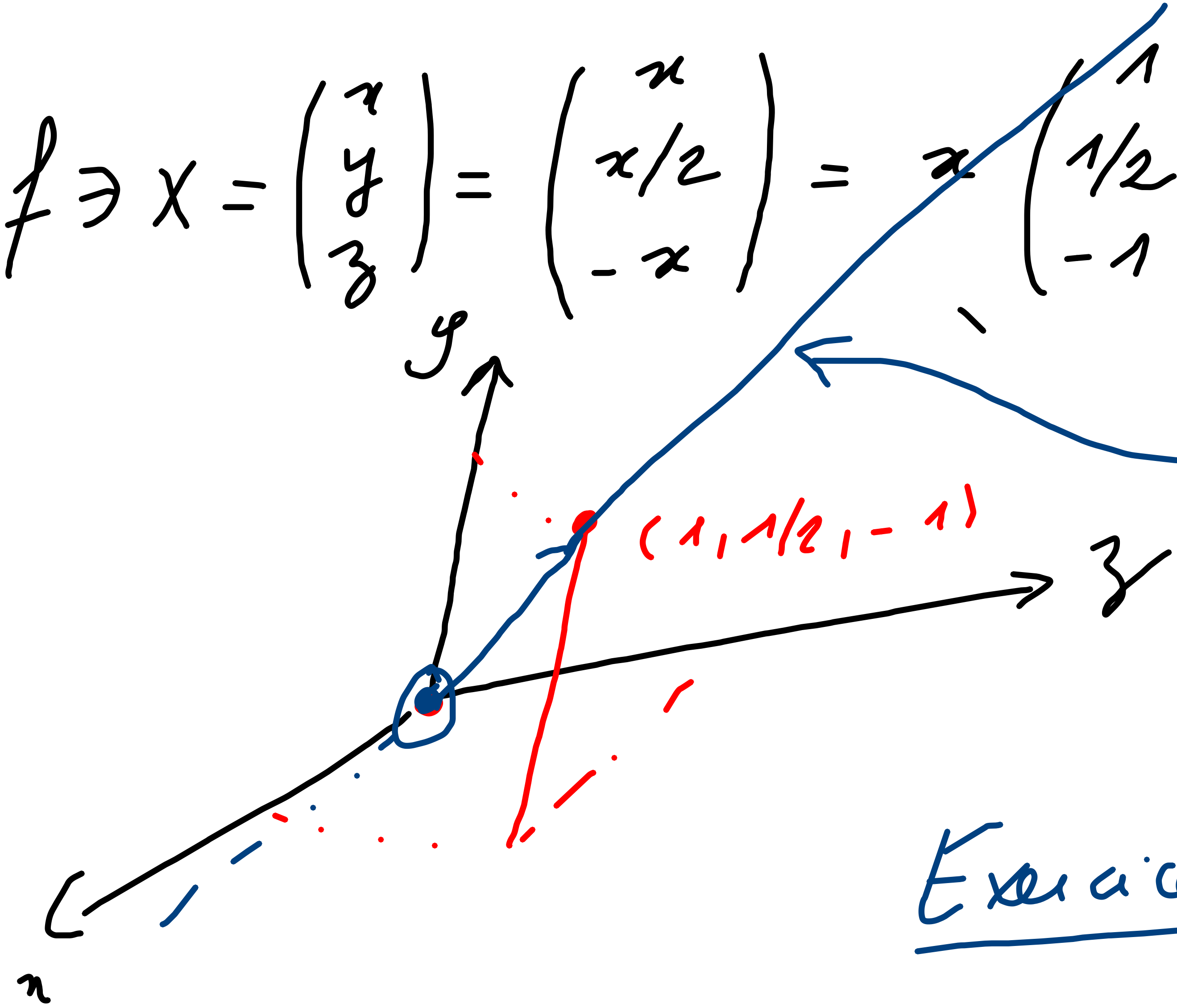
$X = (x,y,z) \in \operatorname{Ker} T \iff T(X) = 0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$

$\iff (x-2y, x+z) = (0,0)$

$\iff \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \longrightarrow x = 2y : \boxed{y = x/2} \\ x + z = 0 \longrightarrow \boxed{z = -x} \end{cases}$$

$$\operatorname{Ker} f \ni X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x/2 \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} =$$



Ker f = droite dans $\mathbb{R}^3$ passant par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$

<u>Exercice</u> : Chercher le noyau de T quand <u>B</u>

Exercice

$$T : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$$

$$\underline{P = ax^3 + bx^2 + cx + d} \longrightarrow \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 0 & c-d \end{pmatrix}$$

$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3(X), M_2(\mathbb{R}))$ **exercice** $T(P+\lambda Q) = \dots$

Cherchons Ker T : $P \in \operatorname{Ker} T \iff T(P) = O_{M_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$T(P) = \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 0 & c-d \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{matrix} a-b=0 \\ \text{et} \\ c-d=0 \end{matrix} \iff \boxed{\begin{matrix} a=b \\ c=d \end{matrix}}$$

Donc tout $P \in \operatorname{Ker} T$ sera de la forme :

$$P = ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 + ax^2 + cx + c$$

$$= a(x^3+x^2) + c(x+1)$$: Ker T combinaisons linéaires de x^3+x^2 et $x+1$