Mardi 14 Septembre - Calcul Matriciel (G6)

Exercice 2 :

$a = (2, 3, -1)$
$b = (1, -1, -2)$
$c = (3, 7, 0)$
$d = (5, 0, -7)$

MQ c et d sont combinaisons linéaires de a et b

c est c.l. de a b $\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ il existe deux réels α et β tels que

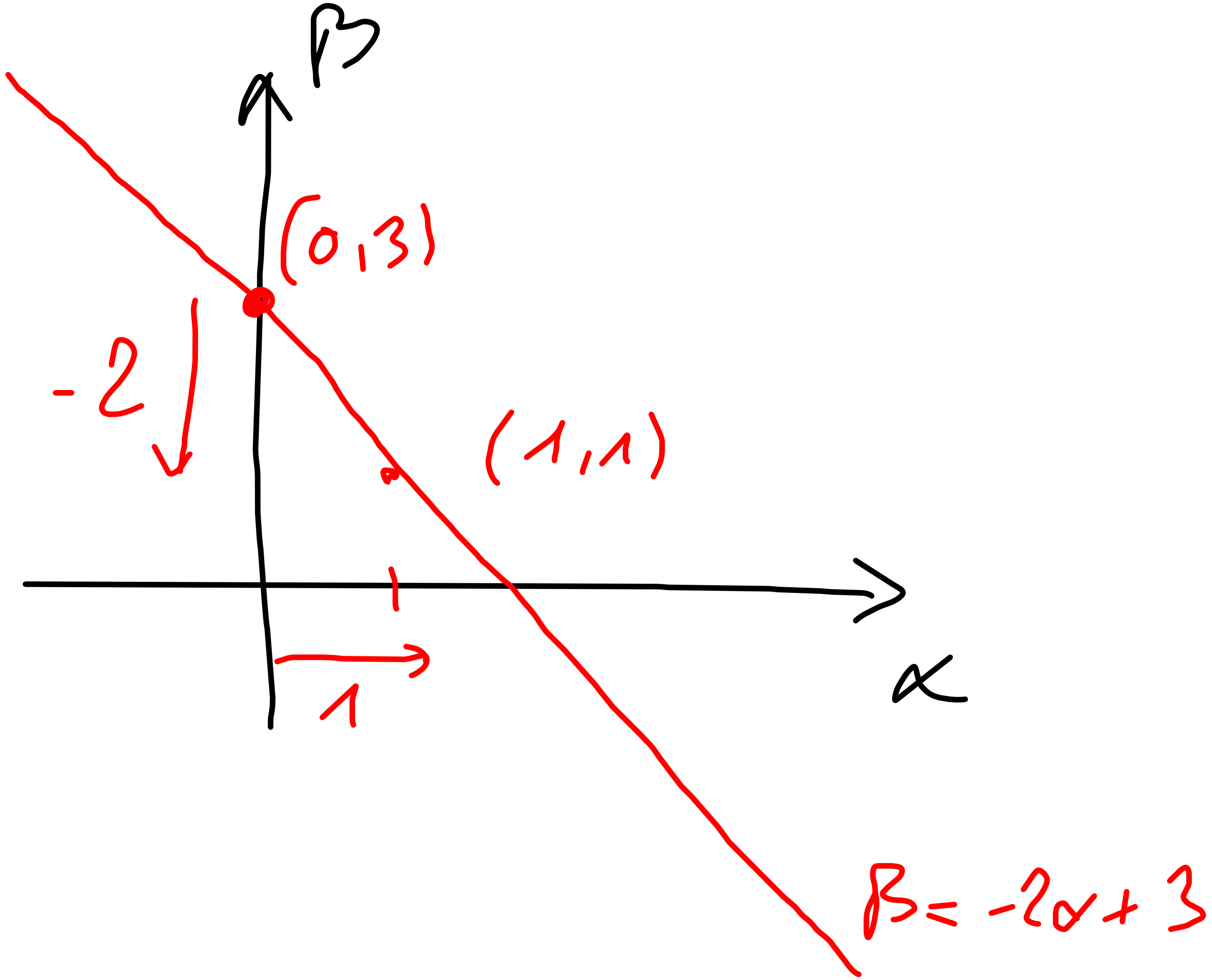
$$c = \alpha a + \beta b$$

$$3 = 2\alpha + \beta$$

$$\beta = \underbrace{-2\alpha} + 3$$

$\alpha = 0 \qquad \beta = 3$

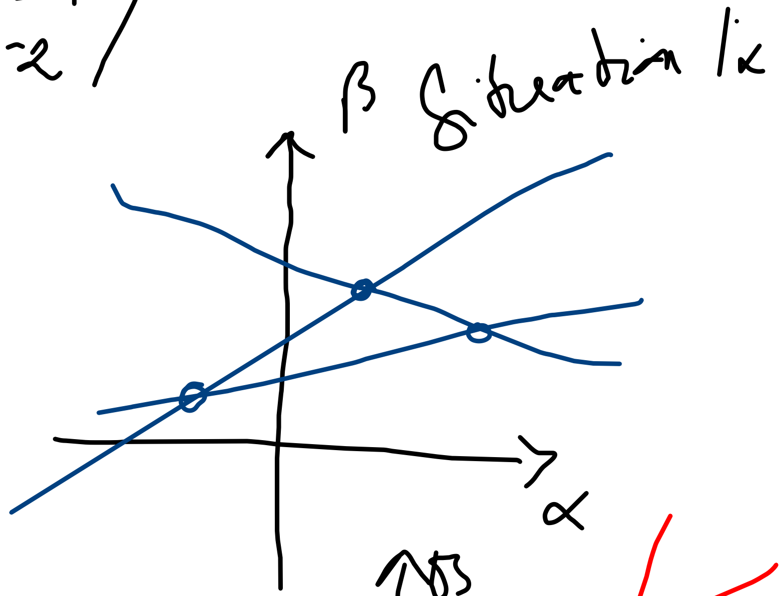
$\alpha = 1 \qquad \beta = 1$



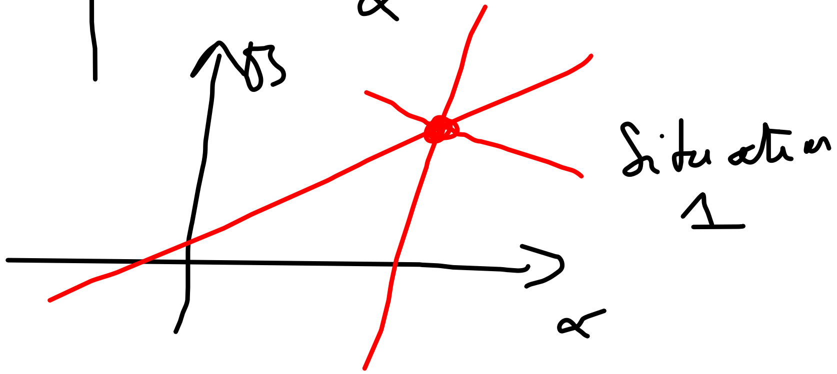
$$c = \alpha a + \beta b \iff$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta \\ 3\alpha - \beta \\ -\alpha - 2\beta \end{pmatrix}$$



$$\iff \begin{cases} 3 = 2\alpha + \beta \\ 7 = 3\alpha - \beta \\ 0 = -\alpha - 2\beta \end{cases}$$



$$\Big\{$$

$$\begin{cases} 3 = 2\alpha + \beta & (E_1) \\ 7 = 3\alpha - \beta & (E_2) \\ 0 = -\alpha - 2\beta & (E_3) \end{cases}$$

$(E_1) + (E_2)$: $10 = 5\alpha$ soit $\boxed{\alpha = 2}$

(E_3) $2\beta = -\alpha \Rightarrow 2\beta = -2$: $\boxed{\beta = -1}$

On a bien

$$\boxed{c = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \underbrace{2a - b}_{\text{comb. line. de } a \text{ et } b.}}$$

et si $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

[Exercice 2 page 19]

$$c = \alpha a + \beta b$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 2\alpha + \beta \\ 7 = \underline{3\alpha} - \beta \\ 0 = -\alpha + 2\beta \end{cases}$$

$(E_1) + (E_2) \Rightarrow 10 = 5\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = 2}$

$(E_3) \quad 2\beta = \underset{= 2}{\alpha} \Leftrightarrow \boxed{\beta = 1}$

Dans (E_1) : $\left.\begin{aligned} 2\alpha + \beta &= 2.2 + 1 = 5 \neq 3 \\ 3\alpha - \beta &= 3.2 - 1 = 5 \neq 7 \end{aligned}\right\}$ Y a pas de solution

donc c n'est pas combinaison linéaire de a et b

Exercice 3 page 19

$\boxed{a}$

$\alpha \in \mathbb{R}$ fixé

$$a = (\alpha, 1, 1), \quad b = (1, \alpha, 1), \quad c = (1, 1, \alpha)$$

Question : α étant fixé dans $\mathbb{R}$, c est-il comb. linéaire de a et b ?

$\iff$ Trouver les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que c soit comb. linéaire de a et b

$\alpha \in \mathbb{R}$, $a = (\alpha, 1, 1)$ $B = (1, \alpha, 1)$ $C = (1, 1, \alpha)$

C est-il comb linéaire de a et b ?

$\Leftrightarrow \exists\, x, y \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{C = x\,a + y\,b}$$

$\Leftrightarrow$ le système

$$\begin{cases} 1 = x\alpha + y \\ 1 = x + y\alpha \\ \alpha = x + y \end{cases}$$

admet une solution $(x; y)$

Exo 3
page 19

$$\begin{cases} 1 = x\alpha + y & (E_1) \\ 1 = x + y\alpha & (E_2) \\ \alpha = x + y & (E_3) \end{cases}$$

$(E_3) - (E_2)$: $\alpha - 1 = y - \alpha y = (1-\alpha) y$

Soit $\boxed{\alpha - 1 = (1-\alpha) y} \Rightarrow y = \dfrac{\alpha - 1}{1-\alpha} = -1$ $\rightarrow \alpha \neq 1$

On doit donc distinguer 2 cas :

① $\alpha \neq 1$ $\quad (\alpha - 1) = (1-\alpha)\, y \iff y = \dfrac{\alpha - 1}{1-\alpha} = -1$

$$\boxed{y = -1}$$

le système devient :
$$\begin{cases} 1 = \alpha x + 1 & (y=1) \\ 1 = x + \alpha & E'_2 \\ \alpha = x + 1 & E'_3 \end{cases}$$

$(E'_3) - (E'_2)$: $\quad \alpha - 1 = x - x + 1 - \alpha$

$$\boxed{\alpha - 1 = 1 - \alpha}$$

n'a pas de sens (car $\alpha \neq 1$)

$-1 = \dfrac{\alpha - 1}{1-\alpha} = 1$ <u>impossible</u> !

Si $\alpha \neq 1$ pas de sol. : C n'est pas comb. lin. de a et b

Si $\alpha = 1$ le système s'écrit :

$$\begin{cases} 1 = x + y \\ 1 = x + y \\ 1 = x + y \end{cases} \iff x + y = 1$$

$$\boxed{y = 1 - x \ , \ x \in \mathbb{R}}$$

$$c = x\,a + (1-x)\,b$$

$x = 2$ $\quad = 2a + (-1)\,b$

$x = \pi$ $\quad = \pi\,a + (1-\pi)\,b$

il y a une infinité de comb. linéaire

$$x\,a + (1-x)\,b$$

$$\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-x \\ 1-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c$$

Exercice 6 page 19

$M_{n,n}(\mathbb{R}) = M_{\underline{\underline{n}}}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ où } a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \underbrace{M(\mathbb{R})}_{2}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -8 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$$

a) mq $\mathcal{C}$ est un sev de $\underline{M_2(\mathbb{R})}$

Il faut montrer que :

1) $\mathcal{C} \neq \emptyset$: $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$

Vrai $a = b = 0$

2) $\left.\begin{array}{l} A, B \in \mathcal{C} \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A + \alpha B \in \mathcal{C}}$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \quad \text{dans } \mathcal{C}$$

$$\underline{A + \alpha B} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{C}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha c & \alpha d \\ -\alpha d & \alpha c \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} a + \alpha c & b + \alpha d \\ -(b + \alpha d) & a + \alpha c \end{pmatrix} \in \mathcal{C}}}$$

$$= \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix} \in \mathcal{C} \text{ !!}$$

où $X = a + \alpha c$ $\quad Y = b + \alpha d$

où : $\mathcal{C}$ est bien un sev de $M_2(\mathbb{R})$

b) $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ écrire M sous la forme :

$$M = a \, \boxed{} + b \, \boxed{}$$

↑ comme dans les exo 4 & 5

$$\begin{pmatrix} 2x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ -y \end{pmatrix} = x \, \boxed{} + y \, \boxed{}$$

$$= x \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} + y \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$\underbrace{M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}} = \overbrace{\ ?\ }^{a} + \overset{b}{\overline{\ ?\ }}$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

$$= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, toute matrice $M \in \mathcal{C}$ sera combinaison linéaire des 2 matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + y \underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Devoir pour la prochaine séance : 7 page 20

On fait un peu de cours

Théorème 8 : F, G deux sev d'un ev E

Alors $F \cap G$ est un sev E

$F + G = \{ \underbrace{x_F + x_G}_{\in E} \text{ où } x_F \in F, x_G \in G \}$

$0_E \in F$
$0_E \in G$
$\Downarrow$
$0_E \in F \cap G$

Preuve : Exercice pour la prochaine fois

2 Applications linéaires

Au lycée : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \alpha x$ est <u>linéaire</u>

Elle vérifie : $f(\lambda x) = \lambda f(x)$
$f(x+y) = f(x) + f(y)$

Définition : E, F deux espaces vect.

$$f : E \longrightarrow F$$

On dira que f est une application linéaire de E dans F ($f \in \mathcal{L}(E, F)$)

ssi $\forall x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}$ • $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

• $f(x+y) = f(x) + f(y)$

Remarque : Alors $f(0_E) = 0_F$

$$F \ni f(\overbrace{\underset{\in \mathbb{R}}{\lambda}\ \underset{\in E}{x}}^{E}) = \underbrace{\lambda\, f(\underset{\in E}{x})}_{\lambda \,\cdot\, \in F \ \to\ \in F} \in F$$

$$\underbrace{\in \mathbb{R} \quad \in E}_{\lambda x \in E}$$

car F ev

$$\underset{\mathcal{L}}{f}(\alpha X + \beta Y) = f(\alpha X) + f(\beta Y)$$

$$= \alpha\, f(X) + \beta\, f(Y)$$

Remarque - Définition :

Si E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel

si $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire

on dira que f est une forme linéaire sur $\mathbb{R}$

Exemple

$$E = \mathbb{R}_3(x) = \{ \underbrace{a + bx + cx^2 + dx^3}_{P} \, ; \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \}$$

$$f : \mathbb{R}_3(x) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$P \longmapsto f(P) = b + 2c + 3d$$

ex $P = 2 + 3x + 4x^2 + 5x^3 \quad f(P) = 3 + 8 + 15 = 26$

Pour montrer que f est linéaire il faut montrer que

$$\begin{cases} f(\lambda P) = \lambda f(P) \\ f(P+Q) = f(P) + f(Q) \end{cases}$$

$$\boxed{f(P+\lambda Q) = f(P) + \lambda f(Q)}$$

$$P = a + bx + cx^2 + dx^3$$

$$Q = a' + b'x + c'x^2 + d'x^3$$

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

$$f(P + \alpha Q) \overset{?}{=} \underbrace{f(P) + \alpha f(Q)}$$

$$\boxed{f(P) = b + 2c + 3d}$$

$$f(Q) = b' + 2c' + 3d'$$

$$f(P) + \alpha f(Q)$$

$$= b + 2c + 3d + \alpha(b' + 2c' + 3d')$$

$$= b + \alpha b' + 2(c + \alpha c') + 3(d + \alpha d')$$

$$f(P + \alpha Q) = f(a + \alpha a' + (b + \alpha b')x + (c + \alpha c')x^2 + (d + \alpha d')x^3)$$

$$= b + \alpha b' + 2(c + \alpha c') + 3(d + \alpha d')$$

$$=$$

Donc f est bien une application linéaire de $E = \mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}$: c'est donc une forme linéaire sur $\mathbb{R}$.

Exercice :

$$f : \mathbb{R}_1(X) \longrightarrow \mathbb{R}_1(X) = \{a + bx \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$a + bx \longmapsto f(a + bx) = a + b^2 x \in \mathbb{R}_1(X)$$

ex $f(\underset{b}{2}x + \underset{a}{3}) = 3 + 4x$

f est-elle linéaire ?

$$f(P+\lambda Q) \overset{?}{=} f(P) + \lambda f(Q)$$

$$P = a + bx \qquad Q = a' + b'x$$

$$\underline{f(P+\lambda Q)} = f(a + bx + \lambda a' + \lambda b' x)$$

$$= f(a + \lambda a' + (b + \lambda b')x)$$

$$= \underline{a + \lambda a' + (b+\lambda b')^2} x = \underbrace{a + \lambda a'}_{} + \underbrace{(b^2 + 2\lambda b b' + b'^2)}_{} x$$

$$\underline{f(P) + \lambda f(Q)} = f(a + bx) + \lambda f(a' + b'x)$$

$$= a + b^2 x + \lambda (a' + b'^2 x)$$

$$= \underline{\underbrace{a + \lambda a'}_{} + \underbrace{(b^2 + \lambda b'^2)}_{} x}$$

$\neq$ ⇒ sont pas égal
on doit penser
que ça marche pas

On cherche un contre-exemple

$P = 1+2X \qquad Q = 1+2X$

$f(P) = 1+4X = f(Q)$

$$
\left.
\begin{aligned}
f(P+Q) &= f(1+2X+1+2X) = f(2+4X) \\
&= 2+16X \\
&\neq \\
f(P)+f(Q) &= 1+4X+1+4X = 2+8X
\end{aligned}
\right\}
$$

f n'est pas linéaire

Exercice 7-A page 10

$(1, 1, \sqrt{2})$

⑥ $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z^2\} \subset \mathbb{R}^3$?

mal

Est-ce un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

$\mathcal{C}$ sev de $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow$ • $\mathcal{C} \neq \emptyset \longrightarrow$ vrai $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in \mathcal{C}$

• $X, Y \in \mathcal{C}$: $X + \alpha Y \in \mathcal{C}$; $\alpha \in \mathbb{R}$ — vrai ? faux ?

Contre Exemple ?

$X = (1, 1, \sqrt{2}) \in \mathcal{C}$

$Y = (1, 1, -\sqrt{2}) \in \mathcal{C}$

$X + Y = (\underset{x}{2}, \underset{y}{2}, \underset{z}{0}) \in \mathcal{C}$?

$x + y = 4 \neq 0 = z^2$

On vient de trouver $X, Y \in \mathcal{T}$

tels que $X + Y \notin \mathcal{T}$

Donc $\mathcal{T}$ ne peut être un sev de $\mathbb{R}^3$

CQFD

ou bien ...

$X = (1,0,1) \in \mathcal{T}$

mais $2X \notin \mathcal{T}$