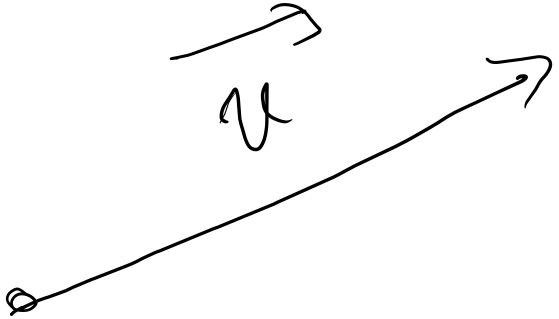
Mardi 8 Septembre Calcul Matriciel (G6)

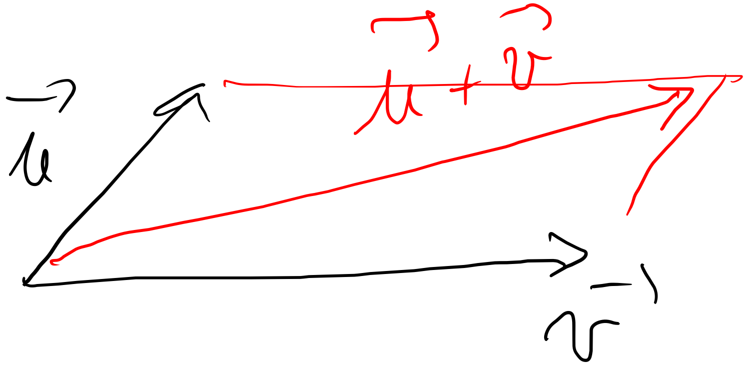
1) Espaces Vectoriels :



Au Lycée : Vecteurs

dans $\mathbb{R}^2$ voire $\mathbb{R}^3$

*



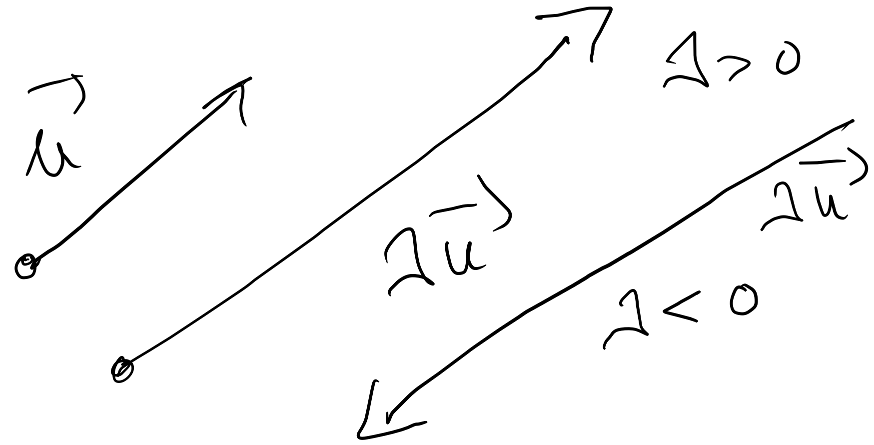
$\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

✪ Multiplier un vecteur $\vec{u}$ par un réel λ

$\lambda \in \mathbb{R}$

$\vec{u} \in \mathbb{R}^2$



$\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

$\lambda\vec{u} = \begin{pmatrix}\lambda a\\ \lambda b\end{pmatrix}$

1) $\vec{u} + \vec{v}$ Loi <u>interne</u> aux vecteurs

2) $\underset{\in\mathbb{R}}{\lambda}, \underset{\in\mathbb{R}^2}{\vec{u}} \longmapsto \lambda\vec{u} \in V$ Loi <u>externe</u>

A-1) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ $\quad \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$

Associativité

A-2) Commutativité $\quad \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

A-3) $\exists ! \ \vec{O_V}$ $\quad \vec{u} + \vec{O_V} = \vec{O_V} + \vec{u} = \vec{u}$

$\mathbb{R}^2$: $\quad O_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

A-4) $\forall u \in V$, $\exists ! \ -u$: $\quad u + (-u) = O_V$

$$\begin{array}{c} u + (-u) \\ \shortparallel \\ u - u \end{array}$$

Exemple $\mathbb{R}^2$

$+ \ \vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow -\vec{u} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$

B) $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$, $u \in V$

- $(\lambda+\mu) u = \lambda u + \mu u$
- $(\lambda\mu) u = \lambda(\mu u)$
- $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$

$3(2\vec{u}) = 6\vec{u}$

$3(\vec{u}+\vec{v}) = 3\vec{u} + 3\vec{v}$

- $\lambda \in \mathbb{R}$ si $\lambda = 0_{\mathbb{R}}$: $u \in V$: $\lambda u = 0_{\mathbb{R}} u = 0_V$

ex : Dans $\mathbb{R}^2$: $(2-2)\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2}$

- $\forall u \in V$: $(-1) u = -u$ $\quad\left(\mathbb{R}^2 \Rightarrow \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \ldots\right)$

2. Espaces Fondamentaux

(2-1) $$\mathbb{R}^n = \left\{ X = (x_1, \dots, x_n) \text{ où } x_i \in \mathbb{R},\ \forall i \in \{1 \dots n\} \right\}$$

$\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel muni des 2 opérations :

$X = (x_1 \dots x_n)$

$Y = (y_1 \dots y_n)$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$X + Y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda X = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

$$0_{\mathbb{R}^n} = (0, \dots, 0)$$

2.2 $M_{n,m}(\mathbb{R})$

$$\underbrace{n}_{\text{ligne}},\ \underbrace{m}_{\text{colonnes}}$$

<u>Exemples</u> $n=2$, $m=3$:

$$M_{2,3}(\mathbb{R}) = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}}_{3\,\text{col.}} \right\} \text{2 lignes} \quad \begin{matrix} a,b,c \\ d,e,f \\ \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ d+d' & e+e' & f+f' \end{pmatrix}$$ Addition interne

loi externe

$$\lambda \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ \lambda d & \lambda e & \lambda f \end{pmatrix}$$

Fondamental

Additionner $\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{\in M_{2,2}} + \underbrace{\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}}_{\in M_{2,1}}$ n'a pas de sens

Dès le lycée : $\underset{\in \mathbb{R}}{2} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'a pas de sens !!

$$2 \cdot \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemples : Les polynômes

$$\mathbb{R}_d(x) = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_d x^d \text{ où } a_i \in \mathbb{R} \; i = 0, \dots, d \}$$

Polynômes à coef réels de degré $\leq d$

$\mathbb{R}_d(x)$ est un espace vectoriel

$\underline{d = 2}$

$$\left.\begin{aligned} p(x) &= a x^2 + b x + c \\ q(x) &= \alpha x^2 + \beta x + \gamma \end{aligned}\right) \in \mathbb{R}_2(x)$$

$$(p+q)(x) = (\alpha + a) x^2 + (b + \beta) x + c + \gamma$$ Loi interne

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda p(x) = \lambda a x^2 + \lambda b x + \lambda c$$ Loi externe

$$\underbrace{\begin{array}{l} p(x) = x^2 + x + 1 \\ q(x) = x^2 \end{array}}_{\in \mathbb{R}_2(x)}$$

$$q(x)\,p(x) = \underbrace{x^4 + x^3 + x^2}_{\in \mathbb{R}_4(x)}$$

<u>2-5</u> $\mathcal{F} = \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \}$ c'est un espace vectoriel

$f, g \qquad f+g : \mathbb{R} \ni x \longmapsto f(x) + g(x)$

$\qquad\qquad \lambda f : \mathbb{R} \ni x \longmapsto \lambda f(x)$

4. Combinaisons linéaires :

V un espace vectoriel

$v_1 \ldots v_n \in V$ (en nombre fini)

$\lambda_1 \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$

Alors $\underbrace{\underbrace{\lambda_1 v_1}_{\in V} + \underbrace{\lambda_2 v_2}_{\in V}}_{\in V} + \ldots + \lambda_n v_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j \in V$

est combinaison linéaire des vecteurs $v_1 \ldots v_n$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

$$= a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$ combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

5] Sous-espaces vectoriels

$(V, +, \cdot)$ un espace vectoriel

$F \subset V$, $F \neq \emptyset$ si $(F, +, \cdot)$ est un espace vectoriel

on dira que $(F, +, \cdot)$ est un sous espace vectoriel de V

$V = \mathbb{R}_3[X] = \{ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$

$\underbrace{F = \mathbb{R}_2[X]}_{\text{bien un sev de } \mathbb{R}_3[X].} = \{\alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}_3[X]$

Théorème : F une partie non vide d'un ev V

Alors | F sev de $V \iff \forall u, v \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R} : u + \lambda v \in F$

Donc pour montrer que $A \subset V$ est un sev de V il faut montrer :

1) $A \neq \emptyset$ [$0_V \in A \ldots$]

2) $u, v \in A, \lambda \in \mathbb{R} : u + \lambda v \in A$

Exercice 1 page 19

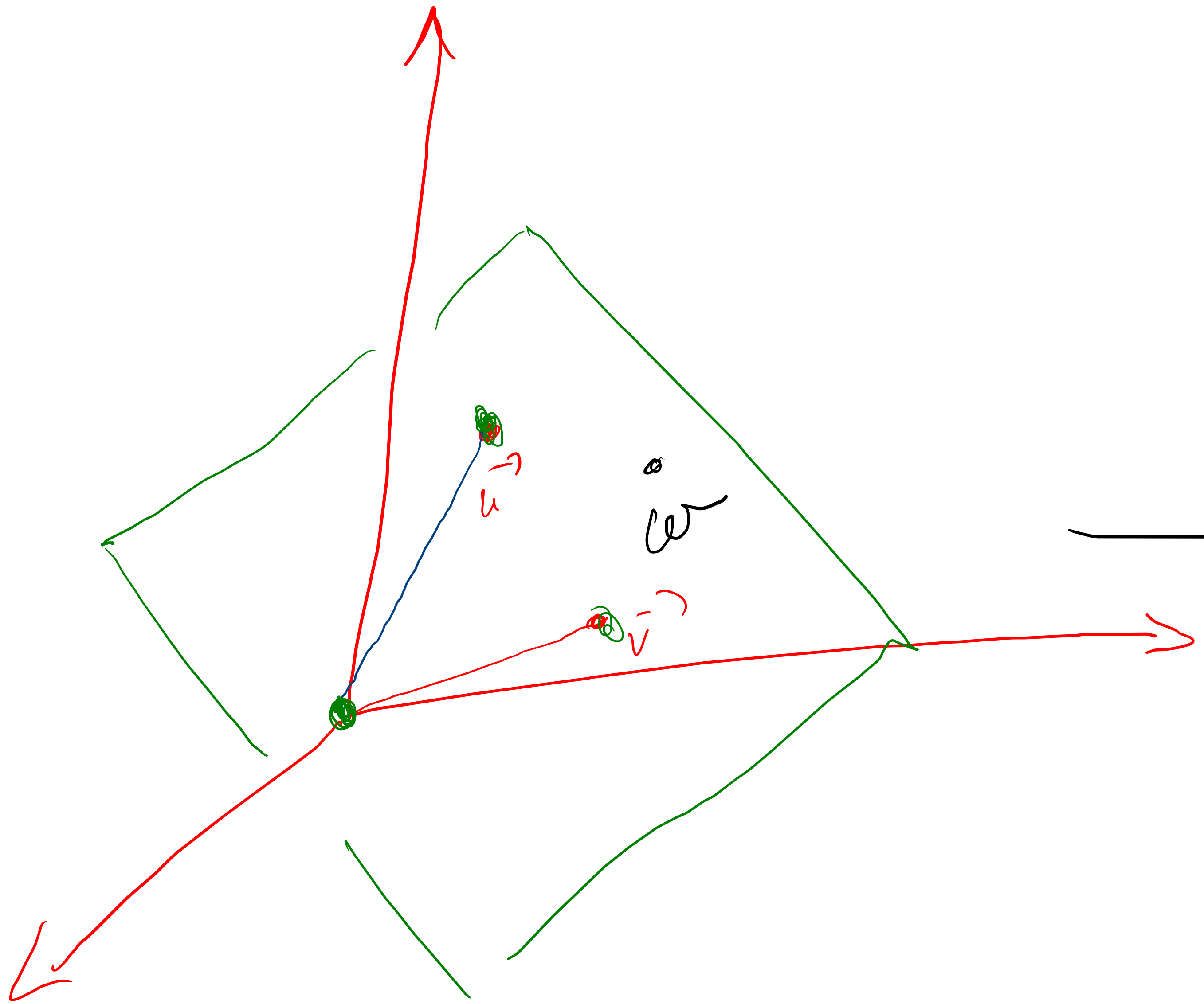
$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

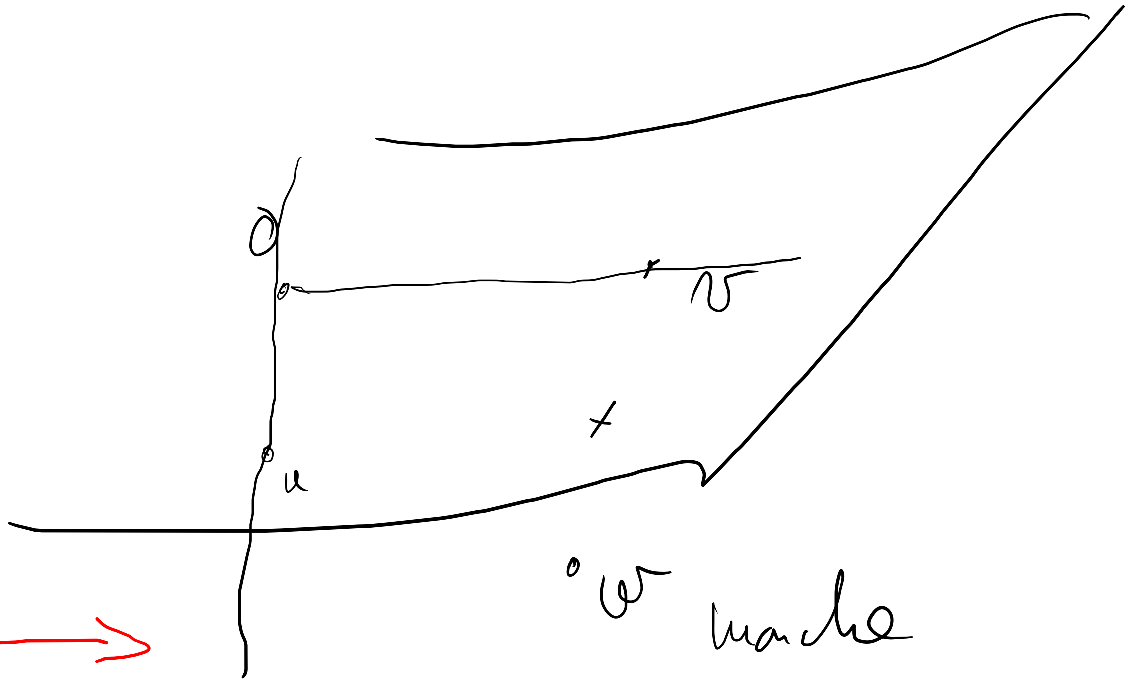
Montrer que $\vec{w}$ combinaison linéaire de u et $\vec{v}$

$\vec{w}$ si combinaison linéaire de u et $\vec{v}$

$$\Longleftrightarrow$$

$\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\quad \vec{w} = \underbrace{\alpha u + \beta \vec{v}}$


u
v
w


v
u
w
marche

On cherche x et y dans $\mathbb{R}$ tels que

$$W = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = xU + yV = x\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Soit

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\-x\\2x\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-y\\y\\-y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-y\\-x+y\\2x-y\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -1 = x - y \\ 1 = -x + y \\ 1 = 2x - y \end{cases}$$

Si x et y existent ce sont les solutions de ce système

$$\left(\left\{\begin{array}{l} -1 = x - y \\ 1 = -x + y \\ 1 = 2x - y \end{array}\right.\right\}$$ les mêmes équations

donc

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ll} 1 = -x + y & (E_1) \\ 1 = 2x - y & (E_2 \end{array}\right.$$

$(E_1)+(E_2)$: $\boxed{2 = x}$

(E_1) $1 = -x + y$

$\hookrightarrow y = 1 + x = 3$

$$\boxed{w = 2u + 3v}$$

$$2u + 3v = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = w$$ Ça marche !

<u>Devoir</u> : chercher les exos 2 et 3 page 19

Exercice 4

$$V = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } \begin{array}{l} x_1 = x_2 - 3x_3 \\ x_3 = 2x_4 \end{array} \right\}$$

1) <u>MQ V sev de $\mathbb{R}^4$</u> (et donc un e.v).

Vu le théorème précédent, V sera un sev de $\mathbb{R}^4$ ssi

1) $\boxed{V \neq \emptyset}$

2) $\forall\ X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $Y = (y_1, y_2, y_3, y_3) \in V$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{X + \lambda Y \in V}$

⑥ V n'est pas vide :

$$V = \left\{ X \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \boxed{\begin{array}{l} x_1 = x_2 - 3x_3 \\ x_3 = 2x_4 \end{array}} \right\}$$

$$O_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0) \in V \, ?$$

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

$x_1 = 0 \overset{?}{=} x_2 - 3x_3 = 0 - 3 \cdot 0 = 0$

$x_3 = 0 \overset{?}{=} 2x_4 = 2 \cdot 0 = 0$

donc ça marche et $V \neq \emptyset$

⑥ $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Question : $\boxed{X + \lambda Y \in V \, ?}$

$$Z = X + \lambda Y = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in V \iff \boxed{\begin{array}{l} z_1 = z_2 - 3z_2 \\ z_3 = 2z_4 \end{array}}$$

$$Z = X + \lambda Y = (x_1, x_2, x_3, x_4) + \lambda (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

$$= (\underbrace{x_1 + \lambda y_1}_{z_1}, \underbrace{x_2 + \lambda y_2}_{z_2}, \underbrace{x_3 + \lambda y_3}_{z_3}, \underbrace{x_4 + \lambda y_4}_{z_4})$$

$$X \in V \begin{cases} x_1 = x_2 - 3x_3 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases} \qquad Y \in V \begin{cases} y_1 = y_2 - 3y_3 \\ y_3 = 2y_4 \end{cases}$$

Q? $\boxed{z_1 \overset{?}{=} z_2 - 3z_3}$

$$\boxed{z_2 - 3z_3} = \boxed{x_2 + \lambda y_2} - 3\boxed{(x_3 + \lambda y_3)}$$

$$= (x_2 - 3x_3) + \lambda y_2 - 3\lambda y_3$$

$$= \underbrace{(x_2 - 3x_3)}_{x_1 \text{ car } X \in V} + \lambda \underbrace{(y_2 - 3y_3)}_{= y_1} = x_1 + \lambda y_1 = \boxed{z_1}$$

Victoire

⑥ il reste à vérifier que $z_3 = 2z_4$

$$2z_4 = 2(x_4 + \lambda y_4)$$

$$= \underbrace{2x_4}_{x_3} + 2\lambda y_4$$

$X \in V \rightarrow$ $\quad Y \in V$

$$= x_3 + \lambda y_3$$

$$= \boxed{z_3 = 2z_4} \Rightarrow$$

La seconde relation est vérifiée

par conséquent $X + \lambda Y \in V$

et V est un sev de $\mathbb{R}^4$

B)

$X \in V \qquad X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

$x_2 = x_1 + 3x_3$

$x_1 = x_2 - 3x_3$

$\boxed{x_3 = 2x_4}$

$\boxed{x_4 = x_3/2}$

$$X = x_1 \boxed{} + x_3 \boxed{}$$

$$= (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$= (x_1, x_2, x_3, x_3/2)$$

$$= (x_1, x_1 + 3x_3, x_3, x_3/2)$$

$$= (x_1, x_1, 0, 0) + (0, 3x_3, x_3, x_3/2) =$$

$$= x_1 \boxed{(1, 1, 0, 0)} + x_3 \boxed{(0, 3, 1, 1/2)}$$