Calcul Matriciel - groupe 2, TD 3 ($10^h - 12^h$)

Exercice 7 : $\quad U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} : x + y = z^{2} \} \subset \mathbb{R}^3$

$\uparrow$ suggère que ce n'est pas un sev

U sev de $\mathbb{R}^3$?

$\Updownarrow$

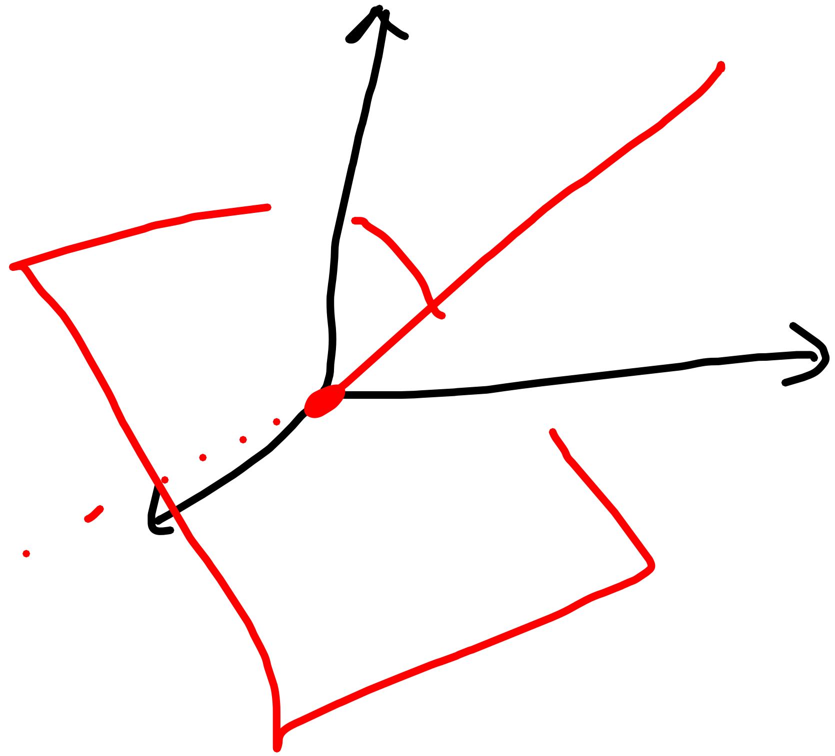
- $U \neq \emptyset$: $(0,0,0) \in U$ oui
- si $X, Y \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$: $X + \lambda Y \in U$?

On cherche un contre-exemple :

$X = (\underset{x}{3}, \underset{y}{3}, \underset{z}{3}) \in U$?

$x + y = 6 \neq z^2 = 9$

donc $(3,3,3) \notin U$



$z^2 = x+y = 2$

$X = (1, 1, \sqrt{2}) \in V$

$Y = (1, 1, -\sqrt{2}) \in V$

$x+y$

$\parallel$

$z^2 = (-\sqrt{2})^2 = 2 = 1+1$

$X + Y = (1, 1, \sqrt{2}) + (1, 1, -\sqrt{2})$

$= (2, 2, 0) \in V$?

NON car : $x+y = 4 \neq z^2 = 0$

V n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$

Ou bien

$$X = (1, 1, \sqrt{2}) \in V$$

Si V est sev de $\mathbb{R}^3$ alors $X \in V \Rightarrow 2X \in V$

$$2X = (2, 2, 2\sqrt{2}) \in V \ ?$$

$$\left.x + y = 4 \neq z^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8\right\} \ 2X \notin V$$

donc V **n'est pas** un sev de $\mathbb{R}^3$

B- exo7 page 20

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 ,\ \underbrace{x_1 + x_2 = x_3 + x_4 ,\ x_1 = x_4}\}$$

Question : V est un sev de $\mathbb{R}^4$?

- V n'est pas vide car $(0,0,0,0) = 0_{\mathbb{R}^4} \in V$
- $X = (a, b, c, d) \in V$, $Y = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in V$. $\lambda \in \mathbb{R}$

Montrons que $X + \lambda Y \in V$

$$X + \lambda Y = (a, b, c, d) + \lambda(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\overbrace{a+\lambda\alpha}^{x_1}, \overbrace{b+\lambda\beta}^{x_2}, \overbrace{c+\lambda\gamma}^{x_3}, \overbrace{d+\lambda\delta}^{x_4})$$

$$\longrightarrow x_1 + x_2 = a + \lambda\alpha + b + \lambda\beta = \underbrace{a+b}_{X \in V \Rightarrow\ = c+d} + \lambda(\underbrace{\alpha + \beta}_{\gamma+\delta}) = c + d + \lambda(\gamma + \delta) = \underbrace{c + \lambda\gamma} + \underbrace{d + \lambda\delta} = x_3 + x_4$$

$$\longrightarrow x_1 = \underset{X \in V \Rightarrow\ = d}{a} + \lambda \underset{Y \in V \Rightarrow\ = \delta}{\alpha} = d + \lambda\delta = x_4$$

Donc V est bien un sev de $\mathbb{R}^4$

$$X=(a,b,c,d)\in V \iff a+b=c+d \ \& \ a=d$$

$$\hookrightarrow c = a+b-d$$
$$= b$$

$$X=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\b\\a\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a\\0\\0\\a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\b\\b\\0\end{pmatrix}=a\underbrace{\boxed{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}}}_{\in V}+b\underbrace{\boxed{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}}}_{\in V}$$

C- exo 7 page 19

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & e & 0 \end{pmatrix}, \ a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\}$$

$\mathcal{V} \subset M_3(\mathbb{R})$, $\mathcal{V}$ est-il un sev de $M_3(\mathbb{R})$?

$$\mathcal{V} = \left\{ (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}} : a_{21} = 0 = a_{13} = a_{31} = a_{33} \right\}$$

Contre exemple : $\mathcal{V}' = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & e & 8 \end{pmatrix} \ldots \right\}$ pas un sev

$0_{M_3(\mathbb{R})} \notin \mathcal{V}'$

- $\mathcal{V} \neq \emptyset$: $0_{M_3(\mathbb{R})} \in \mathcal{V}$
- $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & e & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' & 0 \\ 0 & c' & d' \\ 0 & e' & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$, $\lambda \in \mathbb{R}$: $\boxed{A + \lambda B \in \mathcal{V} ?}$

$$A + \lambda B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & e & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a' & b' & 0 \\ 0 & c' & d' \\ 0 & e' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \lambda a' & b + \lambda b' & 0 \\ 0 & c + \lambda c' & d + \lambda d' \\ 0 & e + \lambda e' & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$$

qui est donc un sev de $M_3(\mathbb{R})$

D_exp7 hax 20 :

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ |a| & 0 \end{pmatrix} \text{ où } a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Question : $\mathcal{V}$ sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ |a| & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda < 0, \text{ si } \mathcal{V} \text{ est un sev de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

alors $\lambda A \in \mathcal{V}$ pour tout $\lambda < 0$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda |a| & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{V} \iff \lambda a = \overset{<0}{\lambda} \overbrace{|a|}^{\geq 0} \geq 0$$

Si $a = 0$ vrai,

$$\lambda \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$$

≥ 0

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$$

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathcal{V} \quad \underset{\overset{\shortparallel}{-1}}{a_{21}} \neq |a_{11}| = 1$$

$$-A = \underbrace{(-1)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{A}_{\in \mathcal{V}} \notin \mathcal{V} : \text{donc } \boxed{\mathcal{V} \text{ n'est pas un sev de } M_2(\mathbb{R})}$$

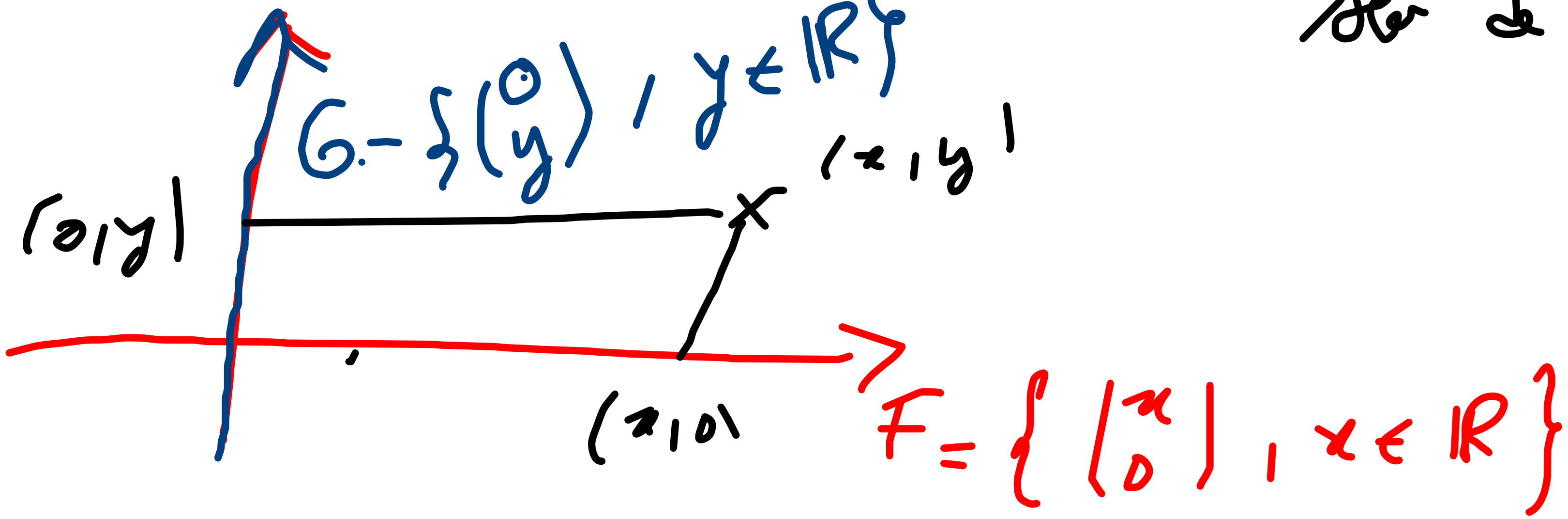
Exercice : démonstration du th. 8 (en bas de la page 11)

E un $\mathbb{R}$-ev

F, G deux sev de E . MQ :

1) $F \cap G$ est un sev de E

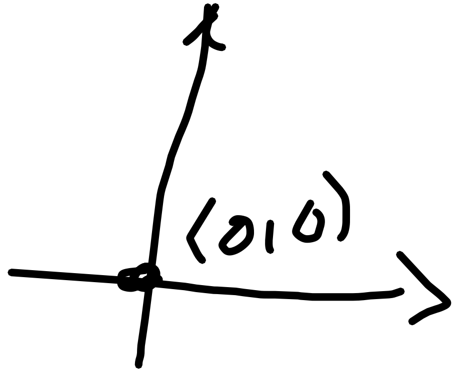
2) $F+G = \{x+y$ où $x \in F$ et $y \in G\}$ sev de E



F & G sont 2 sev de $\mathbb{R}^2$ (ex. élémentaire)

$$F+G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ x, y \in \mathbb{R}^2 \right\} = \underline{\underline{\mathbb{R}^2}}$$

1) Montrons que $F \cap G$ est un sev de E



• $F \cap G$ n'est pas vide car

$0_E \in F$ car F sev de E

$0_E \in G$ car G sev de E $\Big\}$ $\boxed{0_E \in F \cap G}$

• Montrons que $X \in F \cap G$, $Y \in F \cap G$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow X + \lambda Y \in F \cap G$

$\Leftrightarrow$

$\boxed{X + \lambda Y \in F}$

et

$X + \lambda Y \in G$

$X, Y \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

en particulier X et $Y \in F$, F est un sev de E

donc $X + \lambda Y \in F$

De même $X, Y \in G$ sev de E : $X + \lambda Y \in G$ $\Big\}$ $X + \lambda Y \in F \cap G$!

$F \cap G$ est bien un sev de E

2) $F+G = \{x+y \text{ où } x \in F,\ y \in G\}$ sev de $\underline{\underline{E}}$

E étant un ev : $F+G \subset E$

- $F+G \neq \emptyset$: F sev : $0_E \in F$
  G sev : $0_E \in G$ $\Rightarrow \underbrace{\overset{F}{\overset{\Downarrow}{\underset{\overset{\cap}{x}}{0_E}}} + \overset{G}{\overset{\Downarrow}{\underset{\overset{\shortparallel}{y}}{0_E}}}}_{=0_E} \in F+G$

  $\left(\begin{array}{l} 0_E + x = x \quad \forall x \in E \\ x = 0_E \end{array} \right)$

- $\underbrace{\alpha \in F+G}_{\beta}$, $\lambda \in \mathbb{R}$: $\alpha + \lambda \beta \in F+G$?

  $\alpha \in F+G$: $\exists x \in F,\ y \in G,\ \alpha = x+y$
  $\beta \in F+G$: $\exists x' \in F,\ y' \in G$: $\beta = x'+y'$

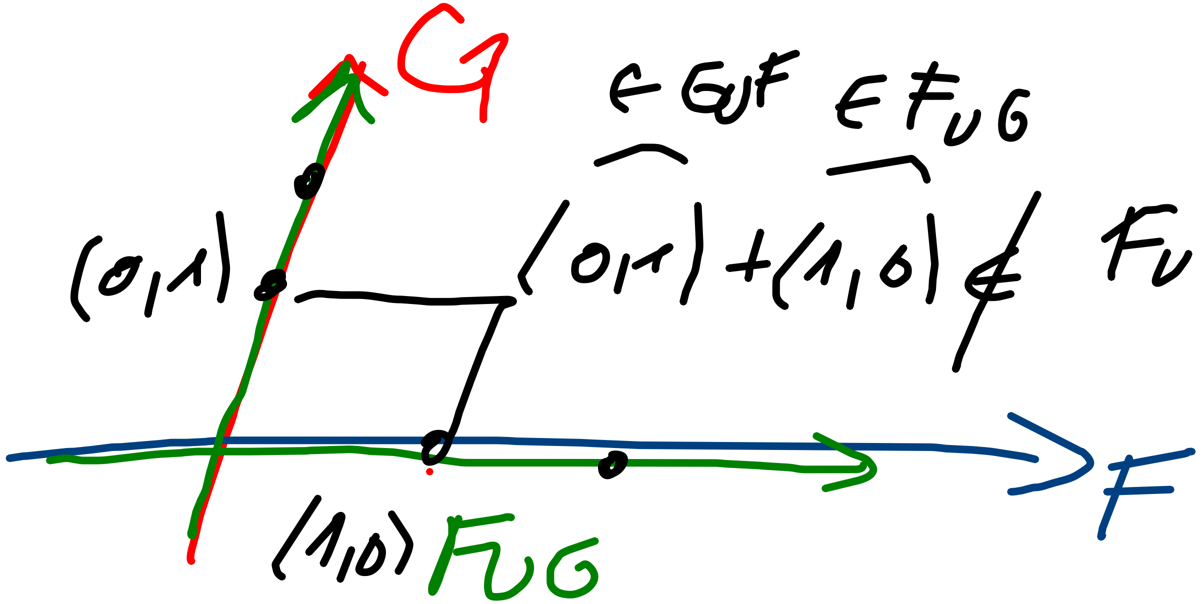
Donc $\alpha + \lambda\beta = x + y + \lambda(x' + y')$

$$= \underbrace{x + \lambda x'}_{\substack{\in F \\ \text{car } x, x' \in F \\ \lambda \in \mathbb{R} \\ F \text{ sev}}} + \underbrace{y + \lambda y'}_{\substack{\in G \\ \text{car } G \text{ sev} \\ y, y' \in G \;\&\; \lambda \in \mathbb{R}}} = x_F + x_G \in F + G$$

$F+G$ est bien un sev de E CQFD.

Remarque En général $F \cup G$ n'est pas un sev

ex



$$\overbrace{(0,1)}^{\in G\cup F} + \overbrace{(1,0)}^{\in F\cup G} \notin F \cup G$$

Par contre ici :

$x \in F \cup G$

$2x \in F \cup G$!

Exercice (*) $F \cup G$ est un sev ssi $F \subset G$ ou $G \subset F$

$F \cup G = G$ $\qquad$ $F \cup G = F$

Exercice 9 (page 20)

Devoir pour la prochaine séance : Exercice 5 et 8

$\boxed{A}$ $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y,z) \longmapsto T(x,y,z) = (x-2y,\ x+z)$$

Question : T est-elle linéaire ? $\left(T \overset{?}{\in} \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2) \right)$.

Méthode : Si on pense qu'elle est linéaire et on montre que

$$T(X+\lambda Y) = T(X) + \lambda T(Y)$$

Soit on pense qu'elle n'est pas linéaire dans ce ~~que~~ cas on cherche un contre exemple :

$\longrightarrow$ Trouver $X \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$: $f(\lambda X) \neq \lambda f(X)$

ou bien $\longrightarrow$ Trouver $X, Y \in E$: $f(X+Y) \neq f(X) + f(Y)$

$$f(x,y,z) = (\underbrace{x - 2y}_{cl\ x,y}, \underbrace{x + z}_{cl\ x z}) \Longrightarrow \text{Ce doit être } \underline{\text{linéaire}}$$

$X = (x, y, z)$
$Y = (x', y', z')$
$\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(X + \lambda Y) \stackrel{?}{=} \underbrace{f(X)} + \lambda \underbrace{f(Y)}$$

$$f(x,y,z)+\lambda f(x',y',z') = (x-2y,\ x+z) + \lambda(x'-2y',\ x'+z')$$

$$= \big(x-2y+\lambda(x'-2y'),\ x+z+\lambda(x'+z')\big)$$

$$\underline{x+\lambda x'-2(y-\lambda y')} \qquad x+\lambda x'+z+\lambda z'$$

$$f(X+\lambda Y) = f(x+\lambda x',\ y+\lambda y',\ z+\lambda z')$$

$$= (\underline{x+\lambda x'-2(y+\lambda y')},\ x+\lambda x'+z+\lambda z')$$

On a bien $f(X+\lambda Y) = f(X)+\lambda f(Y)$

f est bien <u>linéaire</u> : $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$

A)

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longmapsto (x-2y,\ \underbrace{x+z+1}_{\xi})$$

est-elle linéaire ?

Si $f : E \to F$ est linéaire, alors $f(0_E) = 0_F$

ici si g est linéaire on aura $g(\underbrace{0,0,0}_{0_{\mathbb{R}^3}}) = (0,0) = 0_{\mathbb{R}^2}$

or $g(0,0,0) = (0,1) \neq (0,0)$

donc g n'est pas linéaire

c) $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto f(A) = abcd$ → n'est pas une c. l. de a, b, c, d

f est-elle linéaire ?

$f\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{0_{M_2(\mathbb{R})}} = 0.0.0.0 = 0_{\mathbb{R}}$

On pense qu'elle n'est pas linéaire. Montrons-le :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$: $f(A) = 1.1.1.1 = 1$

$f(A+A) = f\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2.2.2.2. = 16$

$f(A) + f(A) = 1 + 1 = 2$. ; $f(A+A) \neq f(A) + f(A)$

ou $f(2A) \neq 2f(A)$

f n'est pas linéaire.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: $\underbrace{f(\lambda B)}_{=0} = \lambda \underbrace{f(B)}_{=0}$: Bien choisir la <u>matrice</u>.