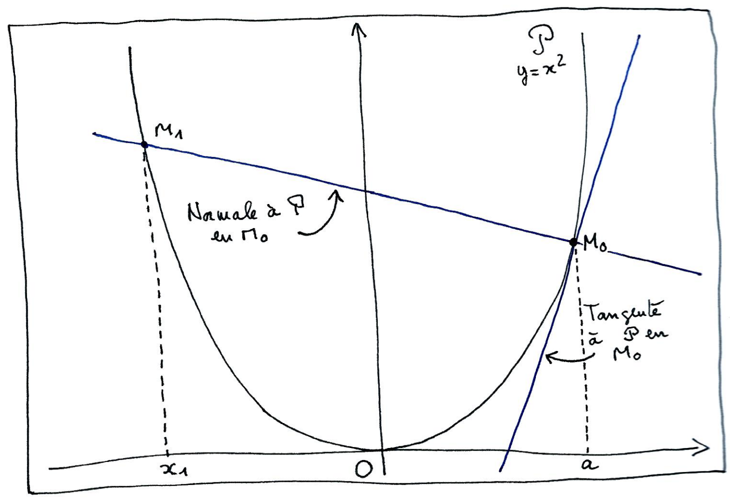
L3E – Résolution de Problèmes – Janvier 2021.

Exercice 1. *Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$.*

(1)(a) Soit $a > 0$. Quelle est l'équation de la normale à $\mathscr{P}$ passant par le point $M_0 = (a, a^2)$?



(b) Montrer que la normale à $\mathscr{P}$ passant par (a, a^2) recoupe la parabole $\mathscr{P}$ en un point M_1 dont on précisera les coordonnées (x_1, y_1) en fonction du paramètre a.

(2)(a) Étudier les variations (tableau de variation, représentation graphique.... ect... avec les calculs détaillés) de la fonction $\varphi(t) = t^2 + \frac{1}{4t^2}$ sur son domaine de définition.

(b) En déduire que pour tout $a > 0$: $y_1 \geq 2$ et préciser le cas d'égalité.

(c) Soit $M = (x, x^2) \in \mathscr{P}$ avec $x \in [0, \sqrt{2}[$. Combien de normales à $\mathscr{P}$ passent par M ?

(d) Montrer que par $M = (x, x^2) \in \mathscr{P}$ passe trois normales à $\mathscr{P}$ si $x > \sqrt{2}$ et deux si $x = \sqrt{2}$.

(e) Donner une autre démonstration que par tout point $M = (x, x^2) \in \mathscr{P}$ il existe au plus trois normales à $\mathscr{P}$ passant par M.

(3) Pour $a > 0$, $\psi(a)$ désigne la longueur du segment reliant les point M_0 et M_1 définis dans la question précédente.

(a) Calculer $\psi(a)$ et donner une expression factorisée simple de $\psi^2(a)$.

(b) Montrer que $\psi(a) = 2a + \frac{3}{4a} + \frac{3}{64a^3} + o(1/a^3), \quad (a \to +\infty)$.

(c) Montrer que $\psi(a) = \frac{1}{4a^2} + \frac{3}{2} + \frac{3a^2}{2} + o(a^2), \quad (a \to 0_+)$.

(d) Étudier les variations de $g(X) = X(X + 1/X)^3$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ et esquisser son graphe.

(e) En déduire l'existence et la valeur d'un réel a pour lequel le segment M_0M_1 soit de longueur minimale.

(4) $M_0 = (a, a^2)$ étant fixé, on définit par récurrence sur n la suite $(M_n)_n$ d'éléments de $\mathscr{P}$ par : M_{n+1} est le point où la normale à $\mathscr{P}$ en M_n recoupe $\mathscr{P}$. On notera $M_n = (x_n, y_n)$.

(a) Déduire de la première partie une relation entre x_{n+1} et x_n.

(b) *En déduire que pour tout entier* n *:* $x_{n+1}^2 = x_n^2 + \frac{1}{2x_n^2} + 1$.

(c) *Montrer que* $\lim_n x_n^2 = +\infty$.

(d) *Montrer que* $\lim_n (x_{n+1}^2 - x_n^2) = 1$.

(e) *A l'aide du théorème de Cesàro, en déduire que* $x_n^2 \sim n, (n \to \infty)$ *(rappel : théorème de Cesàro : soit* $(u_n)_n$ *une suite dans* $\mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*). Si* $\lim_n u_n = l$ *alors* $\lim_n \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n} = l$*).*

(f) *Quelle est la nature de la série de terme général* $\frac{1}{n^2 \ln(1+|x_n|}$ *?*

(g) *Quelle est la nature de la série de terme général* $\frac{1}{x_n^2 \ln(n)}$ *?*

(5) *On admet (rappelle) que pour une fonction* $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ *la longueur* l *du graphe de* f *sur* $[a,b]$ *reliant le point* $(a, f(a))$ *au point* $(b, f(b))$ *vaut :*

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)} dt.$$

(a) *Soit* $a > 0$. *Exprimer sous la forme d'une intégrale* ***(que l'on ne calculera pas !)*** *la longueur* $l(a)$ *de l'arc* $\mathscr{A}(a)$ *de* $\mathscr{P}$ *reliant les points* M_1 *et* M_0 *définis dans la première question.*

(b) *Calculer les limites* $\lim_{a \to 0_+} l(a),\ \lim_{a \to +\infty} l(a)$.

(c) *Montrer que* l *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+$.

(d) *Résoudre* $l'(a) = 0$.

(e) *Déduire de ce qui précède les variations de* l.

(f) *Montrer* $\inf_{a>0} l(a) = l(\sqrt{3}/3)$.