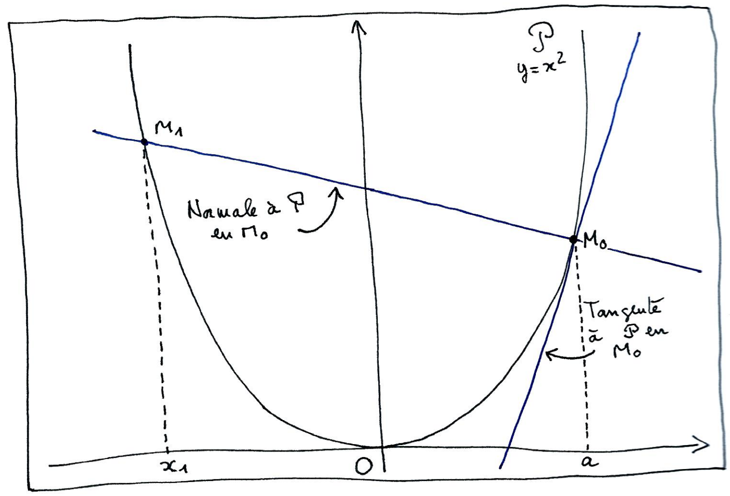
L3E – Résolution de Problèmes – Janvier 2021.

Exercice 1. *Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$.*

(1)(a) Soit $a > 0$. Quelle est l'équation de la normale à $\mathscr{P}$ passant par le point $M_0 = (a, a^2)$?



(b) Montrer que la normale à $\mathscr{P}$ passant par (a, a^2) recoupe la parabole $\mathscr{P}$ en un point M_1 dont on précisera les coordonnées (x_1, y_1) en fonction du paramètre a.

(2)(a) Étudier les variations (tableau de variation, représentation graphique.... ect... avec les calculs détaillés) de la fonction $\varphi(t) = t^2 + \frac{1}{4t^2}$ sur son domaine de définition.

(b) En déduire que pour tout $a > 0$: $y_1 \geq 2$ et préciser le cas d'égalité.

(c) Soit $M = (x, x^2) \in \mathscr{P}$ avec $x \in [0, \sqrt{2}[$. Combien de normales à $\mathscr{P}$ passent par M ?

(d) Montrer que par $M = (x, x^2) \in \mathscr{P}$ passe trois normales à $\mathscr{P}$ si $x > \sqrt{2}$ et deux si $x = \sqrt{2}$.

(e) Donner une autre démonstration que par tout point $M = (x, x^2) \in \mathscr{P}$ il existe au plus trois normales à $\mathscr{P}$ passant par M.

(3) Pour $a > 0$, $\psi(a)$ désigne la longueur du segment reliant les point M_0 et M_1 définis dans la question précédente.

(a) Calculer $\psi(a)$ et donner une expression factorisée simple de $\psi^2(a)$.

(b) Montrer que $\psi(a) = 2a + \frac{3}{4a} + \frac{3}{64a^3} + o(1/a^3), \quad (a \to +\infty)$.

(c) Montrer que $\psi(a) = \frac{1}{4a^2} + \frac{3}{2} + \frac{3a^2}{2} + o(a^2), \quad (a \to 0_+)$.

(d) Étudier les variations de $g(X) = X(X + 1/X)^3$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ et esquisser son graphe.

(e) En déduire l'existence et la valeur d'un réel a pour lequel le segment M_0M_1 soit de longueur minimale.

(4) $M_0 = (a, a^2)$ étant fixé, on définit par récurrence sur n la suite $(M_n)_n$ d'éléments de $\mathscr{P}$ par : M_{n+1} est le point où la normale à $\mathscr{P}$ en M_n recoupe $\mathscr{P}$. On notera $M_n = (x_n, y_n)$.

(a) Déduire de la première partie une relation entre x_{n+1} et x_n.

(b) *En déduire que pour tout entier* n : $x_{n+1}^2 = x_n^2 + \frac{1}{2x_n^2} + 1$.

(c) *Montrer que* $\lim_n x_n^2 = +\infty$.

(d) *Montrer que* $\lim_n (x_{n+1}^2 - x_n^2) = 1$.

(e) *A l'aide du théorème de Cesàro, en déduire que* $x_n^2 \sim n, (n \to \infty)$ *(rappel : théorème de Cesàro : soit* $(u_n)_n$ *une suite dans* $\mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*). Si* $\lim_n u_n = l$ *alors* $\lim_n \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n} = l$*).*

(f) *Quelle est la nature de la série de terme général* $\frac{1}{n^2 \ln(1+|x_n|}$ *?*

(g) *Quelle est la nature de la série de terme général* $\frac{1}{x_n^2 \ln(n)}$ *?*

(5) *On admet (rappelle) que pour une fonction* $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ *la longueur* l *du graphe de* f *sur* $[a,b]$ *reliant le point* $(a, f(a))$ *au point* $(b, f(b))$ *vaut :*

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)} dt.$$

(a) *Soit* $a > 0$. *Exprimer sous la forme d'une intégrale* ***(que l'on ne calculera pas !)*** *la longueur* $l(a)$ *de l'arc* $\mathscr{A}(a)$ *de* $\mathscr{P}$ *reliant les points* M_1 *et* M_0 *définis dans la première question.*

(b) *Calculer les limites* $\lim_{a \to 0_+} l(a),\ \lim_{a \to +\infty} l(a)$.

(c) *Montrer que* l *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+$.

(d) *Résoudre* $l'(a) = 0$.

(e) *Déduire de ce qui précède les variations de* l.

(f) *Montrer* $\inf_{a>0} l(a) = l(\sqrt{3}/3)$.

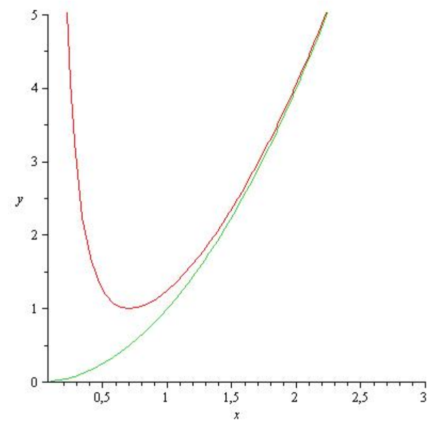
Corrigé.

Solution :

(1)(a) 0n trouve sans peine : $y = -\frac{x}{2a} + a^2 + \frac{1}{2}$.

(b) $M_1 = (x_1, y_1 = x_1^2)$ est sur la normale à $\mathscr{P}$ passant par (a, a^2) si $y_1 = x_1^2 = -\frac{x_1}{2a} + a^2 + \frac{1}{2}$ soit $(x_1 - a)(x_1 + a + 1/2a) = 0$: on retrouve bien entendu M_0 et un autre point : $M_1 = (-a - 1/2a, (a + 1/2a)^2)$. Ainsi, la normale à $\mathscr{P}$ passant par (a, a^2) recoupe bien la parabole $\mathscr{P}$ en le point $M_1 = (-a - 1/2a, (a + 1/2a)^2)$.

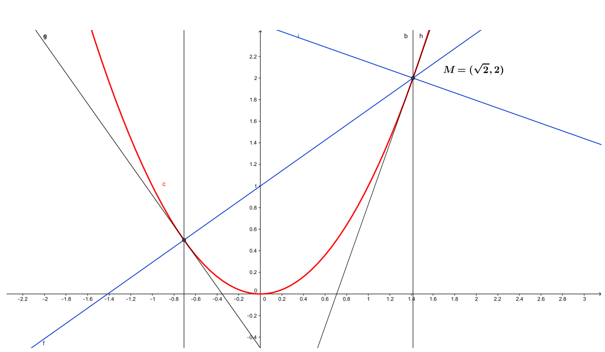
(2)(a) φ est paire on travaille donc sur $\mathbb{R}_+^\star$. Nous avons $\varphi'(t) = \frac{(2t^2+1)(2t^2-1)}{2t^3}$, $\lim_{+} \varphi(t) = +\infty = \lim_{+\infty} \varphi(t)$ si bien que φ est strictement décroissante sur $]0, \sqrt{2}/2]$ et strictement croissante sur $[\sqrt{2}/2, +\infty[$. Elle présente donc un minimum global pour $t = \sqrt{2}/2$ et $\inf_{t>0} \varphi(t) = \varphi(\sqrt{2}/2) = 1$. La représentation graphique en découle aussitôt (remarquer que $\varphi(t)/t^2$ tends vers 1 en $+\infty$ on donc un branche parabolique.

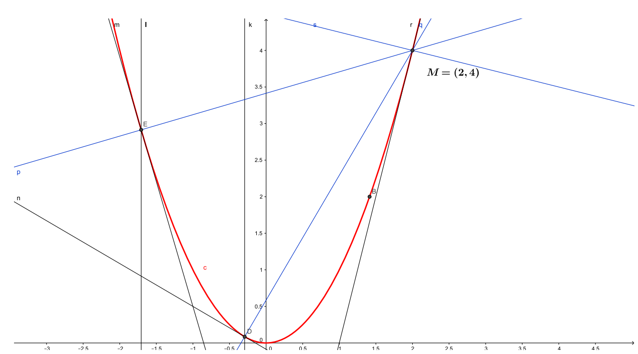


(b) De l'étude précédente on en déduit immédiatement que pour tout $a > 0$: $y_1 = \varphi(a) + 1 \geq 2$ avec égalité si et seulement si $a = \sqrt{2}/2$ soit le point $(\sqrt{2}, 2)$.

(c) Soit $M = (x, x^2) \in \mathscr{P}$ avec $x \in [0, \sqrt{2}[$. Par (2-1), il ne passe par (x, x^2) qu'une normale à $\mathscr{P}$: c'est celle issue de (x, x^2).

(d) Par symétrie de $\mathscr{P}$ avec l'axe des ordonnéeson suppose $x < 0$. Par $M = (x, x^2)$ passe déjà la normale à $\mathscr{P}$ issue de M. Les autres éventuelles normales sont issues d'un point (a, a^2) avec $a > 0$ vérifiant $x^2 = \varphi(a) + 1$. Avec (2-1) $\varphi(a) + 1$ admet exactement deux antécédents si $x^2 > 2$ et 1 sinon. Le résultat en découle. Les deux figures ci-dessous illustre le cas critique $x = \sqrt{2}$ avec seulement deux normales et $x = 2$ avec 3.





(e) Soit $x \in \mathbb{R}$, vu (1-2), les réels a tels que la normale à $\mathscr{P}$ en (a, a^2) passe par (x, x^2) doivent vérifier : $(x - a)(x + a + 1/2a) = 0$ ou encore $(x - a)(2ax + 2a^2 + 1) = 0$. C'est une équation du troisième degré en a : elle admet donc au plus trois racine, d'où le résultat.

(3) Soit $x \in \mathbb{R}$, vu (1-2), les réels a tels que la normale à $\mathscr{P}$ en (a, a^2) passe par (x, x^2) doivent vérifier : $(x-a)(x+a+1/2a) = 0$ ou encore $(x-a)(2ax+2a^2+1) = 0$. C'est une équation du troisième degré en a : elle admet donc au plus trois racine, d'où le résultat.

(4) Pour $a > 0$, $\psi(a)$ désigne la longueur du segment reliant les point M_0 et M_1 définis dans la question précédente.

(a) On a : $\psi(a) = \sqrt{(2a+1/2a)^2 + (a^2 - (a+1/2a)^2)^2}$. Donc :

$$\begin{aligned}\psi^2(a) &= (2a+1/2a)^2 + (a^2-(a+1/2a)^2)^2 = (2a+1/2a)^2 + (1/4a^2)(2a+1/2a)^2 \\ &= (1+1/4a^2)(2a+1/2a)^2 = 4a^2(1+1/4a^2)^3.\end{aligned}$$

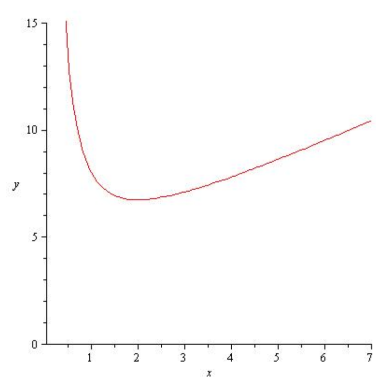
(b) $\psi(a) = 2a(1+1/4a^2)^{3/2}$. Lorsque a tends vers l'infini, $1/4a^2$ tends vers 0 donc via le DL_0 de $(1+u)^{3/2} = 1 + 3/2u + (3/2)(1/2)(u^2/2) + o(u^2)$ on aura :

$$\begin{aligned}\psi(a) = 2a\left(1+1/4a^2\right)^{3/2} &= 2a\left(1 + \frac{3}{8a^2} + \frac{3}{128a^4} + o(1/a^4)\right) \\ &= 2a + \frac{3}{4a} + \frac{3}{64a^3} + o(1/a^3), \quad (a \to +\infty)\end{aligned}$$

(c) Pour le développement asymptotique à deux termes de $\psi(a)$ lorsque a tends vers 0_+ c'est du même tonneau (se ramener encore à $(1+u)^\alpha$ avec $u \to 0$) :

$$\begin{aligned}\psi(a) &= 2a\left(1+1/4a^2\right)^{3/2} = \frac{1}{4a^2}\left(1+4a^2\right)^{3/2} = \frac{1}{4a^2}\left(1+6a^2+6a^4+o(a^4)\right) \\ &= \frac{1}{4a^2} + \frac{3}{2} + \frac{3a^2}{2} + o(a^2), \quad (a \to 0_+)\end{aligned}$$

(d) g est paire on travaille donc sur $\mathbb{R}_+^\star$. Nous avons $g'(t) = (1+1/t)^2(1-2/t)$, $\lim_{0_+} g(t) = +\infty = \lim_{+\infty} g(t)$ si bien que φ est strictement décroissante sur $]0, 2]$ et strictement croissante sur $[2, +\infty[$. Elle présente donc un minimum global pour $t = 2$ et $\inf_{t>0} g(t) = g(2) = 27/4 \simeq 6.75$. La représentation graphique en découle aussitôt



(e) Nous avons $g(4a^2) = \psi^2(a)$ donc $\inf_{t>0}\sqrt{g(t)} = 3\sqrt{3}/2 = \inf_{a>0}\psi(a)$. ψ est donc minorée sur $\mathbb{R}_+^\star$ et atteint sa borne inf pour $4a^2 = 2$ soit $a = \sqrt{2}/2$. Enfin, comme $\psi(a) = M_0M_1$, $M_0M_1 = \psi(a)$ sera de longueur minimale pour $a = \sqrt{2}/2$. En résumé, $M_0M_1 \geq \sqrt{g(2)} = 3\sqrt{3}/2$ avec égalité ssi $a = \sqrt{2}/2$.

(5)(a) Avec (1-2), on a immédiatement $x_{n+1} = -(x_n + 1/2x_n)$.

(b) Élever au carré la formule précédente.

(c) • Sol. 1. $x_{n+1}^2 - x_n^2 = \frac{1}{2x_n^2} + 1 \geq 1$, en sommant ces inégalités on trouve par télescopage : $x_{n+1}^2 \geq n + 1 + x_0^2$ et par suite $\lim_n x_n^2 = +\infty$.

• Sol. 2. $x_{n+1}^2 - x_n^2 \geq 1$, donc $(x_n^2)_n$ est croissante, elle est soit convergente vers un réel $l \geq 1$, soit divergente vers $+\infty$. Si elle converge, en passant à la limite dans $x_{n+1}^2 = x_n^2 + \frac{1}{2x_n^2} + 1$ il vient $1 + 1/4l^2 = 0$ ce qui est absurde donc : $\lim_n x_n^2 = +\infty$.

(d) Comme $\lim_n x_n^2=+\infty$ on a : $\lim_n\left(x_{n+1}^2-x_n^2\right)=\lim_n \frac{1}{2x_n^2}+1=1$.

(e) $\lim_n\left(x_{n+1}^2-x_n^2\right)=1$ donc par Cesàro : $1=\lim_n \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left(x_{k+1}^2-x_k^2\right)=\lim_n \frac{x_n^2-x_0^2}{n}=\lim_n \frac{x_n^2}{n}$ qui implique : $x_n^2\sim n,(n\to\infty)$ CQFD.

(f) avec (5-3) $\frac{1}{n^2\ln(1+|x|}\sim_n \frac{1}{n^2\ln(n)}$ terme général d'une série à terme positifs convergente (Bertrand ou $o(n^{3/2})$). Par théorème de comparaison pour les séries de signe constant notre série converge.

(g) avec (5-3) $\frac{1}{n^2\ln(1+|x|}\sim_n \frac{1}{n\ln(n)}$ terme général d'une série à terme positifs divergente (Bertrand ou comparaison avec une intégrale). Par théorème de comparaison pour les séries de signe constant notre série diverge.

(6)(a) Vu (1-2) pour tout $a>0.$: $l(a)=\int_{-a-1/2a}^{a}\sqrt{1+4t^2}dt$.

(b) • $\lim_{a\to 0_+}a=0,\lim_{a\to 0_+}-a-1/2a=-\infty$ donc $\lim_{a\to 0_+}l(a)$ existe si et seulement si $\sqrt{1+4t^2}$ est intégrable en $-\infty$ ce qui n'est pas. $\sqrt{1+4t^2}dt$ étant positive : $\lim_{a\to 0_+}l(a)=+\infty$.
• $\lim_{a\to+\infty}a=+\infty,\lim_{a\to+\infty}-a-1/2a=-\infty$ donc $\lim_{a\to 0_+}l(a)$ existe si et seulement si $\sqrt{1+4t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on a donc : $\lim_{a\to 0_+}l(a)=+\infty$.

(c) l est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, c'est le théorème fondamental du calcul intégral car $t\mapsto\sqrt{1+4t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $l(a)=\int_{-a-1/2a}^{a}\sqrt{1+4t^2}dt=F(a)-F(-a-1/2a)$ où F est une primitive de $t\mapsto\sqrt{1+4t^2}$.

(d) De la question précédente :

$$l'(a)=F'(a)-(-1+1/2a^2)F'(-a-1/2a)=\sqrt{1+4a^2}-(1/2a^2-1)\sqrt{1+4(a+1/2a)^2}.$$

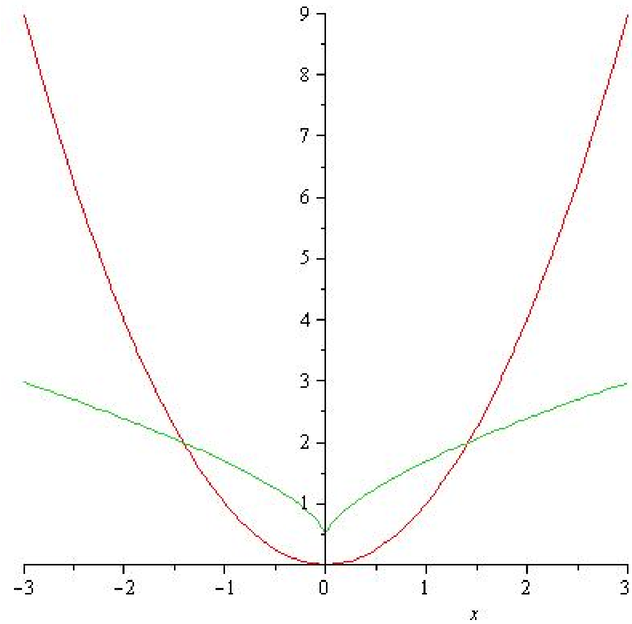
(e) $l'(a)=0$ équivaut donc à : $1+4a^2=(1/2a^2-1)^2(1+4(a+1/2a)^2)=(1+1/a^2+1/4a^4)(5+4a^2+1/a^2)$ soit après quelques simplifications miraculeuses : $0=1+a^2-12a^4$. En posant $X=a^2$ on tombe sur une équation de degré 2 admettant comme racines $-1/4$ et $1/3$. Comme $a>0$ on trouve finalement l'unique solution $a=\sqrt{3})/3$.

(f) On a donc un unique point critique en $a=\sqrt{3}/3$ comme $\lim_{a\to 0_+}l(a)=+\infty=\lim_{a\to 0_+}l(a)=+\infty$ la seule alternative est que l décroit sur $]0,\sqrt{3}/3[$ puis croit sur $]\sqrt{3}/3,+\infty$.

(g) En combinant les questions précédentes : $\inf_{a>0}l(a)=l(\sqrt{3}/3)$.

■

Conclusion : Il n'est pas difficile d'être plus précis dans cette étude en considérant le problème suivant : « combien de normales à $\mathscr{P}$ passent par un point donné $(x,y)\in\mathbb{R}^2$? » Après quelques calculs on trouve deux zones séparées par la courbe d'équation $y=3\sqrt[3]{4x^2}/4+1/2$ (W.Neile, 1657) voir la figure ci-dessous. Dans celle située au dessus de la courbe il passe trois normales, une dans celle sous la courbe et enfin deux normales pour les points situés sur la courbe. Il va sans dire que la courbe de Neile rencontre notre parabole exactement en les points $(\pm\sqrt{2},2)$ rencontrés dans la partie 2 de notre problème et corrobore les résultats démontrés en 2.


9
8
7
6
5
4
3
2
1
-3
-2
-1
0
1
2
3
x