

# Comment l'équation de la chaleur explore-t-elle des inégalités géométriques et fonctionnelles ?

• M. LEDOUX

Des travaux récents ont exploité les propriétés de monotonie du flot de la chaleur dans l'étude de diverses inégalités pour intégrales multiples, ainsi que d'inégalités isopérimétriques. Initialement considérée dans l'espace euclidien, la méthode s'est amplifiée à divers cadres géométriques, jusqu'à des modèles discrets. Ces développements, au carrefour de l'analyse, de la géométrie et des probabilités, ont trouvé également un écho en analyse booléenne en informatique théorique, dans l'étude de la stabilité au bruit.

Cet exposé propose une introduction élémentaire à ces idées, à travers quelques illustrations simples d'inégalités intégrales (comme celle de Hölder) ou isopérimétriques. Le flot de la chaleur mis en œuvre sera le plus souvent celui régi par l'équation de la chaleur traditionnelle. Sur  $\mathbb{R}^n$ , soit

$$h_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/4t}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n,$$

le noyau de la chaleur classique (où  $|\cdot|$  est la norme euclidienne), solution fondamentale de l'équation  $\partial_t h_t = \Delta h_t$ , pour  $\Delta$  le laplacien sur  $\mathbb{R}^n$ . Par convolution, ce noyau engendre un semi-groupe d'opérateurs agissant sur toute fonction, par exemple mesurable bornée,  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\begin{aligned} H_t \varphi(x) &= \varphi * h_t(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{-|x-y|^2/4t} \frac{dy}{(4\pi t)^{n/2}}, \\ & \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

avec la convention  $H_0 = \text{Id}$ . Sous forme probabiliste,

$$H_t \varphi(x) = \mathbb{E}(\varphi(x + B_{2t}))$$

où  $(B_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien (issu de 0).

Pour toute fonction  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continue et bornée, la fonction  $u(t, x) = H_t \varphi(x)$  est alors solution

de l'équation aux dérivées partielles  $\partial_t u = \Delta u$  sur  $]0, \infty[ \times \mathbb{R}^n$  avec condition initiale  $u(0, \cdot) = \varphi$  (cf. [12]).

Au delà de l'exemple euclidien (auquel cet exposé se limite), la construction de noyaux et semi-groupes de la chaleur peut être étendue à de nombreux cadres, variétés riemanniennes, groupes de Lie, physique mathématique, graphes etc., jusqu'en mécanique ou biologie. L'équation de la chaleur peut être considérée sur des domaines de  $\mathbb{R}^n$  avec conditions au bord (Dirichlet, Neumann, mixtes). Il fait sens de parler d'un semi-groupe de la chaleur sur une variété riemannienne, de générateur l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la variété. Il est également possible de considérer des opérateurs avec dérive du type (sur  $\mathbb{R}^n$ )  $L = \Delta - \langle \nabla V, \nabla \rangle$  où  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est un potentiel régulier, la mesure  $e^{-V} dx$  étant invariante et symétrique par rapport à  $L$  et au semi-groupe  $P_t = e^{tL}$ ,  $t \geq 0$ , qu'il engendre. La fonction  $u = P_t \varphi$  est alors solution de l'équation de la chaleur  $\partial_t u = Lu$  pour  $L$  avec condition initiale  $\varphi$ . D'un point de vue plus géométrique, l'espace  $\mathbb{R}^n$  muni de la mesure  $e^{-V} dx$  invariante pour  $L$  peut alors être analysé comme une variété à poids. L'exemple du potentiel quadratique  $V(x) = \frac{|x|^2}{2}$  donne lieu au semi-groupe dit d'Ornstein-Uhlenbeck de mesure invariante la distribution normale  $e^{-|x|^2/2} \frac{dx}{(2\pi)^{n/2}}$ .

Dans une formulation duale plus traditionnelle en équations aux dérivées partielles, l'équation de la chaleur  $\partial_t u = Lu$  par rapport à l'opérateur  $L = \Delta - \langle \nabla V, \nabla \rangle$  se traduit par l'évolution de Fokker-Planck

$$\partial_t p = \Delta p + \nabla \cdot (p \nabla V)$$

le long d'une famille de densités de probabilités (par rapport à la mesure de Lebesgue)  $p = p(t, x)$  ( $= u e^{-V}$ ) (cf. [12, 20]).

# 1. Flot de la chaleur et inégalités intégrales

Une première illustration du principe de monotonie le long de l'équation de la chaleur est décrite dans une démonstration (pas la plus simple ni la plus générale) de l'inégalité très classique de Hölder

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^\theta g^{1-\theta} dx \leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} f dx \right)^\theta \left( \int_{\mathbb{R}^n} g dx \right)^{1-\theta}$$

pour des fonctions mesurable positives  $f, g$  sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\theta \in [0, 1]$ . Pour établir cette inégalité, il suffit de montrer que, pour tout  $t > 0$  et toutes fonctions positives  $f$  et  $g$  dans une classe de fonctions continues et bornées dense dans tous les espaces  $L^p$ ,

$$H_t(f^\theta g^{1-\theta}) \leq (H_t f)^\theta (H_t g)^{1-\theta}. \quad (1)$$

Par rapport à l'inégalité numérique de Hölder, il s'agit là d'une inégalité entre fonctions valide en tout point de  $\mathbb{R}^n$  (omis dans les formules). Par définition de  $H_t$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} (4\pi t)^{n/2} H_t \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi dx$  dans la classe considérée. Ainsi, après multiplication par  $(4\pi t)^{n/2}$  des deux membres de (1) et passage à la limite, l'inégalité de Hölder s'ensuit.

L'inégalité (1) s'établit alors par un principe d'interpolation remontant aux travaux de J.-M. Duhamel au XIX<sup>e</sup> siècle (cf. [13]) en montrant que la fonction

$$\Lambda(s) = H_s((H_{t-s} f)^\theta (H_{t-s} g)^{1-\theta}), \quad s \in [0, t],$$

est décroissante, de sorte que  $\Lambda(t) \leq \Lambda(0)$  qui exprime (1). Pour vérifier que  $\Lambda$  est décroissante, il suffit de prendre sa dérivée (sur  $]0, t[$ ). À cet effet, pour faciliter les écritures, posons

$$F = \ln H_{t-s} f, \quad G = \ln H_{t-s} g, \quad K = \theta F + (1-\theta)G$$

(fonctions de  $s$  et de la variable spatiale), et ainsi  $\Lambda(s) = H_s(e^K)$ . Par la règle de dérivation des fonctions composées en le temps (et la linéarité des opérateurs  $H_s$ ),

$$\Lambda'(s) = \partial_s H_s(e^K) + H_s(\partial_s(e^K)).$$

Or, d'après l'équation de la chaleur,  $\partial_s F = -e^{-F} \Delta(e^F)$ , avec l'identité similaire pour  $G$ , et donc

$$\partial_s(e^K) = e^K \partial_s K = -e^K [\theta e^{-F} \Delta(e^F) + (1-\theta) e^{-G} \Delta(e^G)].$$

Comme par ailleurs  $\partial_s H_s(e^K) = \Delta H_s(e^K) = H_s \Delta(e^K)$  après une autre application de l'équation de la chaleur<sup>1</sup>, il vient

$$\Lambda'(s) = H_s \left( \Delta(e^K) - e^K [\theta e^{-F} \Delta(e^F) + (1-\theta) e^{-G} \Delta(e^G)] \right).$$

Maintenant, par dérivation en espace,  $e^{-F} \Delta(e^F) = \Delta F + |\nabla F|^2$  et de même pour  $G$  et  $K$  de sorte que, dans l'expression précédente, les termes linéaires s'éliminent et

$$\Lambda'(s) = H_s \left( e^K [|\nabla K|^2 - \theta |\nabla F|^2 - (1-\theta) |\nabla G|^2] \right).$$

Comme  $\nabla K = \theta \nabla F + (1-\theta) \nabla G$ , cette expression est négative par convexité de la fonction quadratique et la conclusion s'ensuit.

Un aspect important de cette démonstration est qu'elle ramène une inégalité de type Hölder pour n'importe quelle valeur de  $\theta \in [0, 1]$  à une inégalité quadratique (autrement dit démontrer Hölder avec Cauchy-Schwarz!) et en un sens introduit de la géométrie dans les inégalités fonctionnelles.

Cette observation est clairement mise en évidence dans la famille des inégalités pour intégrales multiples dites de Brascamp-Lieb remontant aux travaux de ces auteurs dans les années soixante-dix. En effet, exactement le même schéma de démonstration permet d'établir la forme dite géométrique de ces inégalités.

**Théorème 1.** Soient  $u_1, \dots, u_m$  des vecteurs unités de  $\mathbb{R}^n$  décomposant l'identité au sens où

$$\sum_{k=1}^m c_k u_k \otimes u_k = \text{Id}_{\mathbb{R}^n} \quad (2)$$

pour des réels  $0 \leq c_k \leq 1$ ,  $k = 1, \dots, m$  (autrement dit, tout vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  se décompose sous la forme  $x = \sum_{k=1}^m c_k \langle u_k, x \rangle u_k$ ). Alors, pour toutes fonctions mesurables positives  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k = 1, \dots, m$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^m f_k^{c_k}(\langle u_k, x \rangle) dx \leq \prod_{k=1}^m \left( \int_{\mathbb{R}} f_k dx \right)^{c_k}. \quad (3)$$

En prenant la trace dans (2), on a que  $\sum_{k=1}^m c_k = n$  de sorte que (3) améliore l'inégalité de Hölder dans les directions  $u_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Par

1. La démonstration rigoureuse fait usage de la commutation  $\Delta H_t \varphi = H_t \Delta \varphi$  qui se vérifie immédiatement sur les fonctions  $C^\infty$  à support compact, et s'étend par exemple à la classe de Schwartz des fonctions  $C^\infty$  à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées, stable par  $H_t$  et dense dans les espaces  $L^p$ .

exemple, pour la décomposition de l'identité de  $\mathbb{R}^2$  suivant les racines cubiques de l'unité,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_1^{2/3}(x) f_2^{2/3}\left(-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) f_3^{2/3}\left(-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) dx dy \leq \prod_{k=1}^3 \left( \int_{\mathbb{R}} f_k dx \right)^{2/3}.$$

La démonstration du Théorème 1 suit donc celle de l'inégalité de Hölder présentée ci-dessus en analysant les variations de la fonction du temps

$$\Lambda(s) = H_s\left(e^{\sum_{k=1}^m c_k F_k}\right), \quad s \in [0, t],$$

où  $F_k = \ln H_{t-s} g_k(x)$ ,  $g_k(x) = f_k(\langle u_k, x \rangle)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Le semi-groupe commutant aux projections sur les vecteurs  $u_k$ ,  $F_k = \ln H_{t-s} f_k(\langle u_k, x \rangle)$  ( $H_{t-s} f_k$  signifiant l'application du semi-groupe de la chaleur uni-dimensionnel à la fonction d'une variable  $f_k$ ) et donc

$$\nabla F_k = (\ln H_{t-s} f_k)'(\langle u_k, x \rangle) u_k.$$

La convexité quadratique est alors assurée par la décomposition (2) qui entraîne que pour tous  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ ,

$$\left| \sum_{k=1}^m c_k \alpha_k u_k \right|^2 \leq \sum_{k=1}^m c_k \alpha_k^2$$

appliqué pour  $\alpha_k = (\ln H_{t-s} f_k)'(\langle u_k, x \rangle)$ .

Le Théorème 1 admet des versions multi-dimensionnelles en remplaçant les projections sur les vecteurs  $u_k$  par des applications linéaires. Ces inégalités pour intégrales multiples remontent donc aux travaux de J. Brascamp et E. Lieb [7] qui les établissaient par des outils de réarrangements. F. Barthe [3] en propose une démonstration par transport optimal, établissant par la même occasion des formes inverses. L'approche par flot de la chaleur a été promue il y a quelques années par E. Carlen, E. Lieb, M. Loss [8] et J. Bennett, A. Carbery, M. Christ, T. Tao [5] qui mettent à profit ce nouvel outil à travers une analyse géométrique et combinatoire des fonctions extrémales. Le principe permet en outre de sortir du cas produit euclidien et d'obtenir des formes de ces inégalités sur la sphère (la motivation première de [8]), des espaces symétriques, des groupes de Lie, et même des modèles discrets comme le groupe symétrique cf. [4].

## 2. Hypercontractivité

Une première application significative des inégalités de Brascamp-Lieb a été le calcul de la constante optimale dans les inégalités de convolution de Young [7]. Voici une autre application, élémentaire. Notons tout d'abord que, par le simple changement de fonctions  $f_k(x)$  en  $f_k(x)e^{-x^2/2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , et la compatibilité des exposants  $\sum_{k=1}^m c_k = n$ , la mesure de Lebesgue peut être remplacée dans (3) par la mesure gaussienne

$$d\gamma(x) = d\gamma_n(x) = e^{-|x|^2/2} \frac{dx}{(2\pi)^{n/2}}$$

(produit de la mesure gaussienne standard  $d\gamma_1$  sur  $\mathbb{R}$ ), sous la forme

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^m f_k^{c_k}(\langle u_k, x \rangle) d\gamma_n(x) \leq \prod_{k=1}^m \left( \int_{\mathbb{R}} f_k d\gamma_1 \right)^{c_k}.$$

Illustrons alors l'intérêt de cette inégalité, pour  $n=2$ ,  $m=2$ , et simplement  $u_1 = (1,0)$ ,  $u_2 = (\rho, \sqrt{1-\rho^2})$  avec  $\rho \in ]0,1[$  et  $c_1, c_2 \in ]0,1[$  tels que

$$\rho^2 c_1 c_2 = (1-c_1)(1-c_2). \quad (4)$$

Les vecteurs  $u_1, u_2$  ne définissent qu'une sous-décomposition de l'identité, mais suffisante pour conclure que pour  $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  positives,

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_1^{c_1}(x_1) f_2^{c_2}(\rho x_1 + \sqrt{1-\rho^2} x_2) d\gamma(x_1) d\gamma(x_2) \leq \left( \int_{\mathbb{R}} f_1 d\gamma \right)^{c_1} \left( \int_{\mathbb{R}} f_2 d\gamma \right)^{c_2}. \quad (5)$$

Par tensorisation et le caractère produit de la mesure gaussienne  $\gamma = \gamma_n$ , cette inégalité s'étend immédiatement à des fonctions sur  $\mathbb{R}^n$ . En outre, en posant  $p_i = \frac{1}{c_i}$ ,  $i = 1, 2$ , et en remplaçant  $f_i$  par  $f_i^{p_i}$ , il vient

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x_1) f_2(\rho x_1 + \sqrt{1-\rho^2} x_2) d\gamma(x_1) d\gamma(x_2) \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}, \quad (6)$$

les normes étant entendues dans les espaces de Lebesgue  $L^p(\gamma)$  par rapport à  $\gamma$ .

Soit alors l'opérateur, défini pour tout  $\rho \in [0, 1]$  et toute fonction convenable  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , par

$$T_\rho \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\rho x + \sqrt{1-\rho^2} y) d\gamma(y), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (7)$$

L'invariance par rotation de la mesure gaussienne  $\gamma$  entraîne que l'opérateur  $T_\rho$  est une contraction dans tous les espaces  $L^p(\gamma)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  (décroissants en  $p$ ). Mais, par dualité et la relation (4), (6) exprime le plongement plus fort, pour toute  $f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\|T_\rho f_2\|_{p'_1} \leq \|f_2\|_{p_2} \quad (8)$$

où  $p'_1$  est l'exposant conjugué de  $p$ ,  $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_1} = 1$ , et  $p_2$  et  $p'_1$  sont tels que  $1 < p_2 < p'_1 < \infty$  et

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{p'_1 - 1}{p_2 - 1}$$

(ou seulement  $\geq$ ). Cette propriété (8), qui a pris le nom d'hypercontractivité, a été mise en évidence par E. Nelson en théorie quantique des champs. Pour  $\rho = e^{-t}$ ,  $t \geq 0$ ,  $P_t = T_{e^{-t}}$  est le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck de mesure invariante et réversible la mesure gaussienne standard  $\gamma$  et de générateur  $L = \Delta - \langle x, \nabla \rangle$  dans la description de l'introduction. En particulier, pour toute fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable positive,  $\int_{\mathbb{R}^n} P_t f d\gamma = \int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma$ , et si  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sont régulières,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(-Lg) d\gamma = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f, \nabla g \rangle d\gamma.$$

Si l'inégalité (5) a été présentée à partir du flot de la chaleur euclidien, le même principe s'applique pour ce semi-groupe, et (5) s'établit de façon équivalente, grâce aux propriétés précédentes d'invariance et d'intégration par parties, en faisant évoluer  $f_1$  et  $f_2$  le long de  $P_t$ ,  $t \geq 0$ , et en montrant que l'expression de gauche est décroissante en le temps.

### 3. Isopérimétrie gaussienne

L. Gross, dans un jalon important (cf. [1, 2]), démontre, par différentiation de la norme

$$\|T_\rho f_2\|_{p'_1}, \quad p'_1 = 1 + \frac{1}{\rho^2}(p_2 - 1),$$

en fonction de  $\rho$ , que la propriété d'hypercontractivité (8) est équivalente à l'inégalité dite de Sobolev logarithmique, exprimant que pour toute fonction régulière  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\gamma = 1$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2 \ln f^2 d\gamma \leq 2 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma. \quad (9)$$

Par rapport à l'inégalité de Sobolev traditionnelle sous la mesure de Lebesgue, une fonction dont le

gradient est dans l'espace  $L^2(\gamma)$  n'est pas nécessairement dans un espace  $L^p(\gamma) \subset L^2(\gamma)$  avec  $p > 2$ , il y a une dégénérescence quand  $p \rightarrow 2$  qui conserve toutefois un facteur logarithmique. En revanche, aucune constante dépendant de la dimension n'apparaît dans (9), faisant de l'inégalité de Sobolev logarithmique un outil majeur, notamment dans l'analyse de dimension infinie sur l'espace de Wiener (cf. e.g. [1, 20, 2]).

Maintenant, le champ des inégalités fonctionnelles de Sobolev est étroitement lié aux inégalités isopérimétriques à leur origine. En renvoyant à [15] pour une présentation complète, l'inégalité isopérimétrique classique dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , exprimant que les boules réalisent le minimum de mesure de bord à volume fixé, est en effet à la racine de toutes les inégalités de Sobolev à travers sa version fonctionnelle, pour toute fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  à support compact,

$$n\omega_n^{1/n} \|f\|_{\frac{n}{n-1}} \leq \|\nabla f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f| dx \quad (10)$$

où les normes sont cette fois prises sous la mesure de Lebesgue et  $\omega_n$  est le volume de la boule unité. Pour une approximation régulière de la fonction caractéristique  $\mathbb{1}_A$  d'un borélien  $A$  à bord  $\partial A$  régulier, la norme  $L^1$  du gradient de  $f$ ,  $\|\nabla f\|_1$ , approche la mesure  $\text{vol}_{n-1}(\partial A)$  du bord de  $A$ . L'inégalité fonctionnelle (10) indique alors que

$$n\omega_n^{1/n} \text{vol}_n(A)^{(n-1)/n} \leq \text{vol}_{n-1}(\partial A) \quad (11)$$

qui décrit l'isopérimétrie euclidienne. En effet, si  $A$  a même volume qu'une boule  $B$  de rayon  $r > 0$ ,  $\text{vol}_n(A) = \text{vol}_n(B) = \omega_n r^n$ ,  $\text{vol}_{n-1}(\partial B) = n\omega_n r^{n-1}$ , de sorte que

$$\text{vol}_{n-1}(\partial B) = n\omega_n^{1/n} \text{vol}_n(A)^{(n-1)/n} \leq \text{vol}_{n-1}(\partial A).$$

Réciproquement, (11) entraîne la forme fonctionnelle (10) par les formules de coaire. En remplaçant dans (10)  $f$  (positive) par  $f^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , et en faisant usage de l'inégalité de Hölder, toutes les inégalités de Sobolev traditionnelles

$$\|f\|_{\frac{pn}{n-p}} \leq C_{n,p} \|\nabla f\|_p, \quad 1 \leq p < n,$$

en découlent (avec néanmoins des constantes sous-optimales).

De la même manière, l'inégalité isopérimétrique sous la mesure gaussienne engendre l'inégalité de Sobolev logarithmique. Mais quels sont les éléments extrémaux du problème isopérimétrique sur  $\mathbb{R}^n$  muni de la mesure gaussienne  $\gamma$ ? Autrement dit, à mesure  $\gamma(A)$  fixée, quels sont les boréliens  $A$

de  $\mathbb{R}^n$  minimisant la mesure gaussienne de bord ? Cette dernière peut se définir à travers le contenu de Minkowski par

$$\gamma(\partial A) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [\gamma(A_\varepsilon) - \gamma(A)]$$

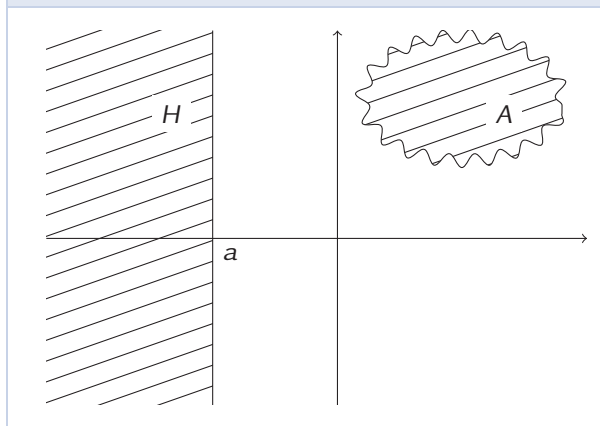
où  $A_\varepsilon$  est le voisinage, pour la distance euclidienne, d'ordre  $\varepsilon > 0$  de  $A$ . Lorsque le bord de  $A$  est régulier, cette expression revient à intégrer la densité gaussienne le long de ce bord.

Les éléments extrémaux du problème isopérimétrique dans  $\mathbb{R}^n$  muni de la mesure gaussienne  $\gamma$  sont fournis par les demi-espaces

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle x, u \rangle \leq a\}$$

où  $u$  est un vecteur unité de  $\mathbb{R}^n$  et  $a \in \mathbb{R}$ . Autrement dit, si  $A$  est un borélien et si  $\gamma(A) = \gamma(H)$  pour un tel demi-espace, alors  $\gamma(\partial A) \geq \gamma(\partial H)$  (cf. Fig. 1).

FIGURE 1 – Un ensemble  $A$  et un demi-espace  $H$  de même mesure gaussienne.



Cette propriété isopérimétrique se traduit de façon équivalente à travers le profil isopérimétrique

$$\mathcal{I}_\gamma(v) = \inf\{\gamma(\partial A); \gamma(A) = v\}, \quad v \in ]0, 1[,$$

qui se calcule donc sur les demi-espaces. Or, par invariance par rotation de  $\gamma$ , les mesures d'un demi-espace et de son bord peuvent s'évaluer en dimension un sur la représentation, par exemple,

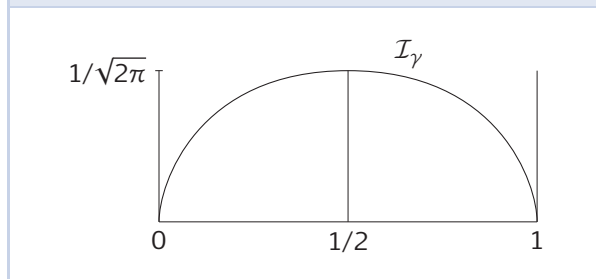
$$H = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 \leq a\}$$

de sorte que  $\gamma(H) = \int_{-\infty}^a e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$ , noté  $\Phi(a)$ , et  $\gamma(\partial H) = \Phi'(a) = \frac{e^{-a^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ . De façon explicite, la fonction  $\mathcal{I}_\gamma$ , qui se prolonge par continuité à l'intervalle  $[0, 1]$ , est ainsi donnée par

$$\mathcal{I}_\gamma = \Phi' \circ \Phi^{-1}.$$

La fonction  $\mathcal{I}_\gamma$  est concave continue, symétrique par rapport à la verticale passant par  $\frac{1}{2}$  et telle que  $\mathcal{I}_\gamma(0) = \mathcal{I}_\gamma(1) = 0$ . Elle vérifie en outre l'équation différentielle  $\mathcal{I}_\gamma \mathcal{I}_\gamma'' = -1$  et  $\mathcal{I}_\gamma(v) \sim v \sqrt{2 \ln \frac{1}{v}}$  quand  $v \rightarrow 0$  (cf. Fig. 2).

FIGURE 2 – Le graphe du profil isopérimétrique  $\mathcal{I}_\gamma$ .



Si le flot de la chaleur permet d'accéder à l'hypercontractivité, et donc à l'inégalité de Sobolev logarithmique, il permet en fait aussi d'établir l'isopérimétrie gaussienne. En effet, le schéma de monotonie le long du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck peut être mis à profit exactement de la même façon pour démontrer l'énoncé suivant. Rappelons l'opérateur  $T_\rho$  de (7).

**Théorème 2.** Si  $A$  et  $B$  sont des boréliens de  $\mathbb{R}^n$ , pour tout  $\rho \in [0, 1]$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A T_\rho(\mathbb{1}_B) d\gamma \leq \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_H T_\rho(\mathbb{1}_K) d\gamma \quad (12)$$

où  $H$  et  $K$  sont des demi-espaces parallèles de même mesure que  $A$  et  $B$  respectivement.

Les ensembles  $H$  et  $K$  étant des demi-espaces, le membre de droite de (12) se calcule explicitement en dimension un comme une fonction  $J_\rho(\gamma(A), \gamma(B))$  ne dépendant que (de  $\rho$  et) des mesures  $\gamma(H) = \gamma(A)$  et  $\gamma(K) = \gamma(B)$ . L'expression de la fonction  $J_\rho(u, v)$ ,  $u, v \in [0, 1]$ , est explicite comme des intégrales de la densité gaussienne, mais nous ne la détaillons pas ici. En revanche, par définition même, il est immédiat d'observer que  $J_\rho(u, v)$  est égale à 0 si l'un de ses arguments est nul ( $\gamma(H) = 0$  ou  $\gamma(K) = 0$ ) et à 1 si ses deux arguments sont égaux à 1 ( $\gamma(H) = 1$  et  $\gamma(K) = 1$ ), de sorte que la propriété (12) s'exprime de façon équivalente sous la forme

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} J_\rho(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(\rho x + \sqrt{1-\rho^2} y)) d\gamma(x) d\gamma(y) \leq J_\rho\left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A d\gamma, \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_B d\gamma\right). \quad (13)$$

Suivant le principe déployé précédemment pour les inégalités de Brascamp-Lieb et l'hypercontractivité, il suffit alors de remplacer  $\mathbb{1}_A$  et  $\mathbb{1}_B$  par  $P_t(\mathbb{1}_A)$  et  $P_t(\mathbb{1}_B)$ ,  $t \geq 0$  (plus généralement n'importe quelles fonctions mesurables  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ ), et l'évolution le long du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck  $(P_t)_{t \geq 0}$  assurera alors, par monotonie, l'inégalité souhaitée sous réserve de se convaincre que la fonction  $J_\rho$  vérifie une propriété un peu curieuse de concavité, à savoir que la matrice

$$\begin{pmatrix} \partial_{11} J_\rho & \rho \partial_{12} J_\rho \\ \rho \partial_{12} J_\rho & \partial_{22} J_\rho \end{pmatrix} \quad (14)$$

est semi-définie négative. C'est effectivement le cas (mais cela nécessite un peu de calcul). C'est aussi, plus simplement, le cas pour la fonction  $J^H(u, v) = u^{c_1} v^{c_2}$ ,  $u, v \in [0, \infty[$ , correspondant à l'hypercontractivité lorsque  $\rho^2 c_1 c_2 \leq (1 - c_1)(1 - c_2)$  et fournissant (5).

De la propriété (12) à l'isopérimétrie, il est classique que la mesure du bord  $\gamma(\partial A)$  peut se décrire le long du flot de la chaleur (gaussien) à travers la limite

$$\gamma(\partial A) \geq \limsup_{\rho \rightarrow 1} \sqrt{\frac{\pi}{\ln \frac{1}{\rho}}} \left[ \gamma(A) - \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A T_\rho(\mathbb{1}_A) d\gamma \right]$$

avec égalité sur un demi-espace  $H$ , de sorte que si  $\gamma(A) = \gamma(H)$ , alors  $\gamma(\partial A) \geq \gamma(\partial H)$ .

Le Théorème 2 est dû à C. Borell [6] par les outils de symétrisation gaussienne de A. Ehrhard. L'analyse de la fonction  $J_\rho$  et la démonstration précédente par flot de la chaleur ont été proposées par J. Neeman et E. Mossel [16], qui en font usage dans une version robuste contrôlant le déficit dans (12) et l'inégalité isopérimétrique (question aujourd'hui résolue de façon presque optimale [11], cet article fournissant par ailleurs une autre démonstration du théorème de Borell s'appuyant sur le calcul stochastique brownien).

La méthode de monotonie le long de l'équation de la chaleur permet en fait d'accéder à de nombreux théorèmes de comparaison isopérimétrique sur des variétés riemanniennes (à poids) de courbure de Ricci strictement positive, comparant le profil isopérimétrique de l'élément de volume à celui de l'espace gaussien. (Une variété riemannienne à poids est la donnée d'une variété lisse, complète, et d'une fonction de densité régulière  $\Psi$  par rapport à la mesure de volume.) Par exemple, si  $d\mu = e^{-V} dx$  finie (de masse 1) où  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est un potentiel régulier tel que, uniformément,  $\text{Hess}(V) \geq \rho \text{Id}$  pour un

$\rho > 0$  au sens des matrices symétriques, alors le profil isopérimétrique  $\mathcal{I}_\mu$  de  $\mu$  (défini comme  $\mathcal{I}_\gamma$ ) est minoré par  $\frac{1}{\sqrt{\rho}} \mathcal{I}_\gamma$  (cf. [2]). Ces énoncés s'apparentent au théorème célèbre de Lévy-Gromov comparant le profil isopérimétrique d'une variété riemannienne compacte de courbure de Ricci strictement positive à celui de la sphère de même dimension et de même courbure. Si un développement récent remarquable de B. Klartag [14] et F. Cavaletti et A. Mondino [9] fournit une version de ce théorème dans les espaces métriques mesurés à l'aide d'un transport de mesures, une démonstration par flot de la chaleur reste néanmoins ouverte.

## 4. Stabilité au bruit et cube discret

Une autre motivation des travaux de J. Neeman et E. Mossel est la question de la stabilité (ou sensibilité) au bruit sur le cube discret. Restons pour l'instant dans l'espace gaussien en reformulant le théorème de comparaison de Borell (Théorème 2) sous une forme probabiliste. Soit  $X$  un vecteur aléatoire sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  de loi gaussienne standard  $\gamma$  sur  $\mathbb{R}^n$ , et soit

$$X^\rho = \rho X + \sqrt{1 - \rho^2} Y$$

où  $Y$  est une copie indépendante de  $X$ . Le couple  $(X, X^\rho)$  est composé de deux vecteurs de loi gaussienne standard de corrélation  $\mathbb{E}(X \otimes X^\rho) = \rho \text{Id}$ , et pour toutes fonctions mesurables positives  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{E}(f(X)g(X^\rho)) = \int_{\mathbb{R}^n} f T_\rho g d\gamma$$

par définition de l'opérateur  $T_\rho$ .

Posons alors, pour un borélien  $A$  de  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\mathcal{S}_\rho(A) = \mathbb{P}(X \in A, X^\rho \in A)$$

appelée stabilité (de  $A$ ) au bruit, ce dernier étant représenté par la copie indépendante  $Y$ . Par passage au complémentaire, on parle aussi de sensibilité au bruit pour la probabilité  $\mathbb{P}(X \in A, X^\rho \notin A)$ . Une question est de savoir quels sont les ensembles  $A$  les plus stables au bruit, donc maximisant  $\mathcal{S}_\rho(A)$  à mesure de  $A$  fixée. Comme

$$\mathcal{S}_\rho(A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A(X)\mathbb{1}_A(X^\rho)) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A T_\rho(\mathbb{1}_A) d\gamma,$$

le théorème de Borell (12) exprime que les demi-espaces sont les plus stables.

Cette question de stabilité au bruit a en fait son origine en informatique théorique sur le cube

discret  $\{-1, +1\}^n$ . Soit à présent  $X = (X_1, \dots, X_n)$  de loi uniforme sur  $\{-1, +1\}^n$  et, pour  $\rho \in [0, 1]$ ,  $X^\rho$  uniforme et  $\rho$ -corrélée avec  $X$ . En désignant par  $Y$  une copie indépendante de  $X$ , le vecteur  $X^\rho = (X_1^\rho, \dots, X_n^\rho)$  peut être défini en posant, pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $X_i^\rho = X_i$  avec probabilité  $\rho$  et  $X_i^\rho = Y_i$  avec probabilité  $1 - \rho$  (de sorte que, comme dans le cas gaussien,  $\mathbb{E}(X \otimes X^\rho) = \rho \text{Id}$ ).

Déterminer les parties  $A$  de  $\{-1, +1\}^n$  les plus stables est dans ce cas un problème ouvert. Mais une version réduite est connue. Supposons, pour simplifier, que l'on s'intéresse aux parties  $A$  telles que  $\mathbb{P}(X \in A) = \frac{1}{2}$ , et considérons

$$M_n = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, +1\}^n; \text{signe} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) = + \right\}.$$

En considérant  $n$  impair pour simplifier, il y a nécessairement un nombre différent de  $+1$  et de  $-1$  et la définition est ainsi sans ambiguïté. Cet ensemble  $M_n$  est l'ensemble dit majoritaire (puisqu'il retient l'avis de la majorité de  $+1$ ). La limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}_\rho(M_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \arccos(\rho)$$

a été calculée par W. Sheppard dès ...1899. Il n'est pas étonnant, en vertu du théorème central limite, que cette valeur est exactement  $J_\rho\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  correspondant, dans la description gaussienne de la partie 3, à un demi-espace dont la frontière passe par l'origine. En effet, par transformée de Laplace par exemple, le couple  $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i, \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i^\rho\right)$  converge en loi vers un couple gaussien  $\rho$ -corrélé et  $M_n$  est essentiellement l'ensemble  $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \geq 0\right\}$ .

Il est alors naturel, d'après l'analogie gaussienne, de se demander si pour tout  $A \subset \{-1, +1\}^n$ ,

$$\mathcal{S}_\rho(A) \leq J_\rho\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)? \quad (15)$$

Cette borne est fautive en général, et un contre-exemple est fourni par l'ensemble dictateur  $D$  défini par  $D = \{x_1 = +1\}$  (ne prenant en compte que l'avis d'un seul parmi  $x_1, \dots, x_n$ ) puisque

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\rho(D) &= \mathbb{P}(X \in D, X^\rho \in D) \\ &= \frac{1}{4} (1 + \rho) > \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \arccos(\rho) = J_\rho\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

pour  $\rho \in ]0, 1[$ . Néanmoins, si les ensembles de ce type sont exclus d'une certaine manière, la conjecture (15) est presque vraie. C'est l'objet du théorème « Majority is Stablest ».

## 5. Majority is Stablest

L'énoncé du théorème « Majority is Stablest » de E. Mossel, R. O'Donnell et K. Oleszkiewicz [17] nécessite d'exclure de façon quantitative des ensembles comme le dictateur  $D$ . Ceci s'effectue à travers la notion d'influence d'une coordonnée  $i = 1, \dots, n$  sur un ensemble  $A \subset \{-1, +1\}^n$  définie comme

$$I_i(A) = \mathbb{P}(X \in A, \tau_i(X) \notin A)$$

où  $\tau_i(x)$  d'un élément  $x = (x_1, \dots, x_n)$  de  $\{-1, +1\}^n$  est obtenu en changeant la  $i$ -ème coordonnée en  $-x_i$ . L'ensemble majoritaire a de petites influences, de l'ordre de  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ , alors que l'influence de l'ensemble dictateur dans sa coordonnée déterminante est grande (égale à  $\frac{1}{2}$ ).

**Théorème 3.** (« Majority is Stablest ») *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta = \eta(\rho, \varepsilon) > 0$  tel que pour toute partie  $A \subset \{-1, +1\}^n$  telle que  $\mathbb{P}(X \in A) = \frac{1}{2}$  et  $I_i(A) \leq \eta$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ , alors*

$$\mathcal{S}_\rho(A) \leq J_\rho\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \varepsilon.$$

L'application principale de ce résultat est l'optimalité de la proportion d'approximation algorithmique du problème Max-Cut. Le problème Max-Cut est un problème NP-complet de théorie des graphes. Il admet, sous la conjecture de jeu unique de S. Khot, une approximation par un algorithme polynomial dont l'ordre maximal est précisément fourni par la constante  $J_\rho\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ . Nous renvoyons à l'exposé de P. Pansu [19] et à la monographie récente de R. O'Donnell [18] pour une présentation détaillée de cet aspect du théorème.

La première démonstration du Théorème 3 de [17, 18] fait appel au cas gaussien à travers un nouveau et fructueux principe d'invariance. Une démonstration récente de A. De, E. Mossel, J. Neeman [10] suit une trajectoire proche de l'approche par flot de la chaleur, avec une variation significative due au cadre discret. L'inégalité gaussienne (13) sur des fonctions  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  se représente en notation probabiliste comme

$$\mathbb{E}\left(J_\rho(f(X), g(X^\rho))\right) \leq J_\rho\left(\mathbb{E}(f(X)), \mathbb{E}(g(X))\right). \quad (16)$$

S'il était vrai, son analogue discret pour des fonctions  $f, g : \{-1, +1\}^n \rightarrow [0, 1]$  sur le cube aurait la même forme, mais donc, pour  $f = g = \mathbb{1}_A$  avec  $\mathbb{P}(X \in A) = \frac{1}{2}$ , entraînerait l'inégalité (15) fautive en général. Néanmoins, l'examen de cet analogue est enrichissant. En désignant par  $\mu^n$  la loi de  $X$ , mesure produit de la mesure uniforme  $\mu = \frac{1}{2} \delta_{-1} + \frac{1}{2} \delta_{+1}$

sur  $\{-1, +1\}$ , la définition de  $X^\rho$  fournit la traduction analytique

$$\int_{\{-1,+1\}^n} \int_{\{-1,+1\}^n} J_\rho(f(x), g(y)) \prod_{i=1}^n (1 + \rho x_i y_i) d\mu^n(x) d\mu^n(y) \leq J_\rho \left( \int_{\{-1,+1\}^n} f d\mu^n, \int_{\{-1,+1\}^n} g d\mu^n \right).$$

Il est assez immédiat de constater d'après le théorème de Fubini que cette inégalité se tensorise, et que sa validité est donc attestée sur  $\{-1, +1\}$ , où elle se réduit à une inégalité de concavité à quatre points : pour tous  $(u, v) \in [0, 1]$ ,  $(u', v') \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1+\rho}{4} J_\rho(u, v) + \frac{1-\rho}{4} J_\rho(u', v) \\ + \frac{1-\rho}{4} J_\rho(u, v') + \frac{1+\rho}{4} J_\rho(u', v') \\ \leq J_\rho \left( \frac{u+u'}{2}, \frac{v+v'}{2} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Pour  $\rho = 1$ , (17) est la concavité usuelle, pour  $\rho = 0$  la concavité par coordonnées. D'après la formule

de Taylor, cette inégalité à quatre points entraîne la concavité différentielle (14), mais la réciproque est donc fautive puisque (15) est en défaut sur l'ensemble dictateur correspondant au choix de  $u = v = 1$  et  $u' = v' = 0$ . À noter que l'analogie de (17) pour la fonction  $J^H$  de l'hypercontractivité est en revanche satisfaite, c'est la fameuse hypercontractivité sur l'espace à deux points de Bonami-Beckner (cf. [1, 18]).

Ce que démontrent les auteurs de [10], à travers simplement une formule de Taylor sur  $J_\rho$ , est que l'inégalité (17) est néanmoins vraie avec un reste, ajouté au membre de droite, de la forme

$$C(\rho) \kappa^{-C(\rho)} (|u - u'|^3 + |v - v'|^3)$$

pour tous  $u, u', v, v' \in [\kappa, 1 - \kappa]$  pour  $\kappa > 0$  et  $C(\rho) > 0$ . Ce reste peut alors être analysé par l'inégalité à deux points de l'hypercontractivité sous l'hypothèse du contrôle des influences, concluant ainsi après tensorisation au Théorème 3. La simplicité de l'argument ouvre la perspective d'énoncés analogues sur d'autres structures discrètes (comme le groupe symétrique par exemple).

## Références

- [1] C. ANÉ et al. *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*. Panoramas et Synthèses 10. Société Mathématique de France, 2000.
- [2] D. BAKRY, I. GENTIL et M. LEDOUX. *Analysis and geometry of Markov diffusion operators*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 348. Springer, 2014.
- [3] F. BARTHE. *On a reverse form of the Brascamp-Lieb inequality*. Inventiones Math. 134, 1998, p. 335–361.
- [4] F. BARTHE et al. *Correlation and Brascamp-Lieb inequalities for Markov semigroups*. Int. Math. Res. Not. IMRN, 2011, p. 2177–2216.
- [5] J. BENNETT et al. *The Brascamp-Lieb inequalities: finiteness, structure and extremals*. Geom. Funct. Anal. 17, 2008, p. 1343–1415.
- [6] C. BORELL. *Geometric bounds on the Ornstein-Uhlenbeck velocity process*. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 70, 1985, p. 1–13.
- [7] H. J. BRASCAMP et E. H. LIEB. *Best constants in Young's inequality, its converse, and its generalization to more than three functions*. Advances in Math. 20, 1976, p. 151–173.
- [8] E. A. CARLEN, E. H. LIEB et M. LOSS. *A sharp analog of Young's inequality on  $S^N$  and related entropy inequalities*. J. Geom. Anal. 14, 2004, p. 487–520.
- [9] F. CAVALLETTI et A. MONDINO. *Sharp and rigid isoperimetric inequalities in metric-measure spaces with lower Ricci curvature bounds*. Preprint arXiv:1502.06465. 2015.
- [10] A. DE, E. MOSSEL et J. NEEMAN. *Majority is stablest: Discrete and SoS*. In Proceedings of the forty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing, 2013, p. 477–486.
- [11] R. ELKAN. *A two-sided estimate for the Gaussian noise stability deficit*. Invent. Math. 201, 2015, p. 561–624.
- [12] L. C. EVANS. *Partial differential equations*. Graduate Studies in Mathematics 19. American Mathematical Society, 1998.
- [13] F. JOHN. *Partial differential equations*. Applied Mathematical Sciences. Springer, 1982.
- [14] B. KLARTAG. *Needle decompositions in Riemannian geometry*. Mem. Amer. Math. Soc. 2015.
- [15] V. MAZ'YA. *Sobolev spaces with applications to elliptic partial differential equations*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 342. Springer, 2011.



- [16] E. MOSSEL et J. NEEMAN. *Robust optimality of Gaussian noise stability*. J. Eur. Math. Soc. 17, 2015, p. 433–482.
- [17] E. MOSSEL, R. O'DONNELL et K. OLESZKIEWICZ. *Noise stability of functions with low influences: invariance and optimality*. Ann. of Math. 171, 2010, p. 295–341.
- [18] R. O'DONNELL. *Analysis of boolean functions*. Cambridge University Press, 2014.
- [19] P. PANSU. *Difficulté d'approximation (d'après Khot, Kindler, Mossel, O'Donnell, ...)*. Astérisque 352, Société Mathématique de France, 2013.
- [20] C. VILLANI. *Topics in optimal transportation*. Graduate Studies in Mathematics 58. American Mathematical Society, 2003.



**Michel LEDOUX**

Université Paul-Sabatier, Toulouse

Michel Ledoux est professeur à l'Université de Toulouse, Paul-Sabatier, et membre senior de l'Institut Universitaire de France. Ses travaux se situent à l'interface entre analyse et probabilités.

Je remercie B. Helffer d'avoir suscité cette rédaction et de sa lecture attentive et constructive. Mes remerciements vont aussi à D. Bakry, F. Barthe, D. Chafaï, D. Cordero-Erausquin, I. Gentil, S. Gouëzel, J. Lehec et P. Pansu pour leurs remarques et commentaires. Une mention spéciale à S. Gouëzel pour la réalisation des figures.

DRAFT