# Poincaré Inequalities in Probability and Geometric Analysis

M. Ledoux

Institut de Mathématiques de Toulouse, France

# Poincaré inequalities

# Poincaré-Wirtinger inequalities

from the origin to recent developments

in probability theory and geometric analysis work of **Henri Poincaré**

**partial differential equations of mathematical physics**

Fourier problem for the heat equation

$$\Delta U + kU = 0 \quad \text{on} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega$$

$\Omega$ bounded domain in $\mathbb{R}^3$

## *Sur les Equations aux Dérivées Partielles de la Physique Mathématique.*

PAR H. POINCARÉ.

Quand on envisage les divers problèmes de Calcul Intégral qui se posent naturellement lorsqu'on veut approfondir les parties les plus différentes de la Physique, il est impossible de n'être pas frappé des analogies que tous ces problèmes présentent entre eux. Qu'il s'agisse de l'électricité statique ou dynamique, de la propagation de la chaleur, de l'optique, de l'élasticité, de l'hydrodynamique, on est toujours conduit à des équations différentielles de même famille et les conditions aux limites, quoique différentes, ne sont pas pourtant sans offrir quelques resemblances. Nous ne citerons ici que quelques exemples.

J'imagine d'abord que l'on se propose de trouver la température finale d'un corps solide conducteur, homogène et isotrope, lorsque les divers points de la surface de ce corps sont maintenus artificiellement à des températures données.

Ce problème traduit dans le langage analytique s'énonce comme il suit :

Trouver une fonction $V$ qui dans une portion de l'espace satisfasse à l'équation de Laplace,

$$\Delta V = \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0\,,$$

et qui prenne des valeurs données aux divers points de la surface qui limite cet espace.

C'est le *problème de Dirichlet.*

American Journal of Mathematics 12, 1890

Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 1887, 1888

spectral problem

$$\Delta u_j + k_j u_j = 0, \quad j \geq 1$$

Neumann boundary condition $\quad \frac{\partial u_j}{\partial n} = 0$

$$k_j = \frac{\int_\Omega u_j(-\Delta u_j)dx}{\int_\Omega u_j^2 dx} = \frac{\int_\Omega |\nabla u_j|^2 dx}{\int_\Omega u_j^2 dx} \qquad (j \geq 2)$$

Rayleigh-Ritz ratio

min-max characterization

$$k_2 \geq \kappa(\Omega) > 0$$

$$k_j \to \infty$$

Rappelons d'abord la définition de $k_2$; $k_2$ est le minimum du rapport

$$\frac{\int\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]d\tau}{\int V^2 d\tau}$$

quand la fonction $V$ et assujettie à la condition :

$$\int V d\tau = 0. \tag{10}$$

Par conséquent *pour un solide convexe quelconque on a*:

$$k_2 > \frac{6K_0 W}{\pi\lambda^5},$$

*$K_0$ désignant une constante numérique, $W$ le volume du corps, et $\lambda$ la plus grande distance de deux points de la surface du corps.*

## Poincaré inequality

$\Omega$ bounded open convex (connected) set in $\mathbb{R}^n$

$f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ smooth $\qquad \int_\Omega f\, dx = 0$

$$\kappa \int_\Omega f^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla f|^2 dx$$

$$\kappa = \kappa(\Omega) > 0$$

explicit lower bound on $\kappa(\Omega)$ $\qquad$ (diameter of $\Omega$)

# Poincaré's proof

## duplication

$$\int_\Omega f^2 \, \frac{dx}{|\Omega|} - \left( \int_\Omega f \, \frac{dx}{|\Omega|} \right)^2 = \frac{1}{2} \int_\Omega \int_\Omega \big| f(x) - f(y) \big|^2 \, \frac{dx}{|\Omega|} \, \frac{dy}{|\Omega|}$$

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 (x-y) \cdot \nabla f \big( tx + (1-t)y \big) \, dt$$

after a suitable change of variables

$$\kappa \int_\Omega f^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla f|^2 dx \qquad \int_\Omega f \, dx = 0$$

$$\kappa \geq \frac{c_n}{D(\Omega)^2} \qquad D(\Omega) \quad \text{diameter} \qquad (\Omega \quad \text{convex})$$

**L. Payne, H. Weinberger (1960)** (optimal) $\kappa = \dfrac{\pi^2}{D(\Omega)^2}$

***Sur les Equations aux Dérivées Partielles de la Physique Mathématique.***

PAR H. POINCARÉ.

Quand on envisage les divers problèmes de Calcul Intégral qui se posent naturellement lorsqu'on veut approfondir les parties les plus différentes de la Physique, il est impossible de n'être pas frappé des analogies que tous ces problèmes présentent entre eux. Qu'il s'agisse de l'électricité statique ou dynamique, de la propagation de la chaleur, de l'optique, de l'élasticité, de l'hydrodynamique, on est toujours conduit à des équations différentielles de même famille et les conditions aux limites, quoique différentes, ne sont pas pourtant sans offrir quelques resemblances. Nous ne citerons ici que quelques exemples.

J'imagine d'abord que l'on se propose de trouver la température finale d'un corps solide conducteur, homogène et isotrope, lorsque les divers points de la surface de ce corps sont maintenus artificiellement à des températures données.

Ce problème traduit dans le langage analytique s'énonce comme il suit:

Trouver une fonction $V$ qui dans une portion de l'espace satisfasse à l'équation de Laplace,

$$\Delta V = \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0,$$

et qui prenne des valeurs données aux divers points de la surface qui limite cet espace.

C'est le *problème de Dirichlet.*

American Journal of Mathematics 12, 1890

Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 1887, 1888

## cited by J. Mawhin (2006)

Mais alors comment reconnaîtra-t-on qu'on raisonnement dont la rigueur n'est pas absolue, n'est pas un simple paralogisme ? Quand aura-t-on le droit de dire que telle démonstration, insuffisante pour l'Analyse, est assez rigoureuse pour la Physique ?

Néanmoins toutes les fois que je le pourrai, je viserai à la rigueur absolue et cela pour deux raisons ; en premier lieu, il est toujours dur pour un géomètre d'aborder un problème sans le résoudre complètement ; en second lieu, les équations que j'étudierai sont susceptibles, non seulement d'applications physiques, mais encore d'applications analytiques.

Et qui nous dit que les autres problèmes de la Physique Mathématique ne seront pas un jour, comme l'a déjà été le plus simple d'entre eux appelés à jouer en Analyse un rôle considérable ?

Poincaré inequalities

Poincaré-Wirtinger inequalities

from the origin to recent developments

in probability theory and geometric analysis

# Wirtinger inequality

$f : \bar{\Omega} = [0,1] \to \mathbb{R}$ smooth periodic $f(0) = f(1)$

$$4\pi^2 \int_{[0,1]} f^2 dx \leq \int_{[0,1]} f'^2 dx \qquad \int_{[0,1]} f\, dx = 0$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{m \geq 1} a_m \cos(2\pi m x) + b_m \sin(2\pi k x)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[0,1]} f^2 dx = a_0^2 + \sum_{m \geq 1} (a_m^2 + b_m^2)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[0,1]} f'^2 dx = \sum_{m \geq 1} 4\pi^2 m \, (a_m^2 + b_m^2)$$

$$\int_{[0,1]} f\, dx = 0 = a_0$$

## Wirtinger inequality

$f : \bar{\Omega} = [0,1] \to \mathbb{R}$ smooth

$$\pi^2 \int_{[0,1]} f^2 dx \leq \int_{[0,1]} f'^2 dx \qquad \int_{[0,1]} f \, dx = 0$$

symmetrization and periodization

$$g : [-1,+1] \to \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [0,+1], \\ f(-x) & x \in [-1,0] \end{cases}$$

**W. Wirtinger 1865-1945**

cited by **A. Hurwitz (1904), W. Blaschke (1949)**

independently **E. Almansi (1906)**

application to the **isoperimetric inequality** in the plane

$C = (x(t), y(t))$ simple closed smooth curve in the plane

arc length $\quad L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt$

area enclosed by $C \quad A = -\int_C y\, dx = -\int_a^b y(t)\, \dot{x}(t) dt$

$$t = \frac{2\pi}{L} s$$

$$L^2 - 4\pi A = 2\pi \int_0^{2\pi} (\dot{x} + y)^2 dt + 2\pi \int_0^{2\pi} \left[\dot{y}^2 - y^2\right] dt$$

Wirtinger inequality $\quad \int_0^{2\pi} \dot{y}^2 dt \geq \int_0^{2\pi} y^2 dt$

$$L^2 \geq 4\pi A$$

isoperimetric inequality in the plane

# Wirtinger inequality

the **sphere version**

$\sigma$ uniform (normalized) measure on $\mathbb{S}^n$

$f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ smooth enough, $\int_{\mathbb{S}^n} f \, d\sigma = 0$

$$n \int_{\mathbb{S}^n} f^2 d\sigma \leq \int_{\mathbb{S}^n} |\nabla f|^2 d\sigma$$

expansion in spherical harmonics

(not enough to reach isoperimetry)

the **Gaussian (Maxwellian) version**

$$d\gamma(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-|x|^2/2} dx$$

standard Gaussian probability measure on $\mathbb{R}^n$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ smooth enough, $\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\gamma = 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\gamma \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma$$

expansion in Hermite polynomials

**J. Nash (1959), H. Chernoff (1981), L. Chen (1982)...**

# Poincaré inequalities : **modern language**

$\mu$ probability measure on $E$

$$\mathrm{Var}_\mu(f) = \int_E f^2 d\mu - \left( \int_E f \, d\mu \right)^2$$ **variance**

$\mathcal{E}(f)$ **energy**

$$\mathcal{E}(f) = \int_E f(-\mathrm{L}f) d\mu = \int_E |\nabla f|^2 d\mu$$

$\mathrm{L}$ operator (Laplace) with invariant measure $\mu$

$\nabla$ gradient operator

## examples

Poincaré's setting : $dx$ uniform on $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ convex

$$\mathcal{E}(f) = \int_\Omega f(-\Delta f)dx = \int_\Omega |\nabla f|^2 dx \qquad \Big(\frac{\partial f}{\partial n} = 0\Big)$$

$\mathrm{L} = \Delta$ Laplace operator on $(\mathbb{S}^n, \sigma)$

$$\mathcal{E}(f) = \int_{\mathbb{S}^n} f(-\Delta f)d\sigma = \int_{\mathbb{S}^n} |\nabla f|^2 d\sigma$$

$\mathrm{L} = \Delta - x \cdot \nabla$ Ornstein-Uhlenbeck operator on $(\mathbb{R}^n, \gamma)$

$$d\gamma(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-|x|^2/2} dx$$

$$\mathcal{E}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(-\mathrm{L}f)d\gamma = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma$$

## Poincaré inequality

$$\kappa \, \mathrm{Var}_\mu(f) \, \leq \, \mathcal{E}(f) \, = \, \int_E f(-\mathrm{L}f) d\mu \, = \, \int_E |\nabla f|^2 d\mu$$

for all $f : E \to \mathbb{R}$ in a suitable class

$\kappa$ Poincaré constant

## spectral interpretation

$\lambda_1$ first non-trivial eigenvalue of $\mathrm{L}$ $\qquad -\mathrm{L}f = \lambda_1 f$

$$\lambda_1 \, \geq \, \kappa$$

first non-trivial eigenvalue of $\Delta$ on $\mathbb{S}^n$ : $\quad \lambda_1 = n$

## convergence to equilibrium

### Poincaré inequality

$$k\,\mathrm{Var}_\mu(f) \,\leq\, \mathcal{E}(f) = \int_E f(-\mathrm{L}f)\,d\mu$$

$(P_t)_{t\geq 0}$ semigroup with infinitesimal generator $\mathrm{L}$

ergodicity $\quad t \to \infty \quad P_t \to \mu$ invariant measure

### exponential decay

$$\|P_t f\|_2 \,\leq\, e^{-\kappa t}\,\|f\|_2 \qquad \int_E f\,d\mu = 0$$

(derivative in $t$)

## discrete models

Markov chains, statistical mechanics

random walks

$$\mathrm{L} = K - Id$$

$K$ (reversible) Markov kernel on $E$ finite

$\mu$ invariant measure

energy

$$\mathcal{E}(f) = \int_E f(-\mathrm{L}f)\,d\mu = \frac{1}{2}\sum_{x,y\in E}\big[f(x) - f(y)\big]^2 K(x,y)\mu(x)$$

$$P_t = e^{t(K - Id)}, \quad t \geq 0$$

kernel $\quad K_t(x, \cdot) \to \mu(\cdot) \quad$ stationary measure

(quantitative) $\quad \mathrm{L}^2$ **time to equilibrium** $\tau$

**Poincaré constant** $\qquad \kappa \, \mathrm{Var}_\mu(f) \leq \mathcal{E}(f)$

$$\tau \sim \frac{1}{\kappa}$$

**P. Diaconis and coauthors**

# **Poincaré inequalities** and **geometric bounds**

the modern era : **Lichnerowicz's** bound **(1958)**

$(M, g)$ compact Riemannian manifold

$\mu$ normalized Riemannian volume element

**Bochner's formula**

$\Delta$ Laplace-Beltrami operator on $M$

$$\frac{1}{2}\,\Delta\big(|\nabla f|^2\big) - \nabla f \cdot \nabla(\Delta f) \,=\, \big|\mathrm{Hess}(f)\big|^2 + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f)$$

$f : M \to \mathbb{R}$ smooth

$\mathrm{Ric}$ **Ricci curvature**

$$\frac{1}{2}\,\Delta\big(|\nabla f|^2\big) - \nabla f\cdot\nabla(\Delta f) \,=\, \big|\mathrm{Hess}(f)\big|^2 + \mathrm{Ric}(\nabla f,\nabla f)$$

assume $\mathrm{Ric} \geq \rho > 0$ uniformly on M

$$\frac{1}{2}\,\Delta\big(|\nabla f|^2\big) - \nabla f\cdot\nabla(\Delta f) \,\geq\, \frac{1}{n}\,(\Delta f)^2 + \rho\,|\nabla f|^2$$

**integrate** with respect to volume element $\mu$

integration by parts

$$\int_M u(-\Delta v)d\mu \,=\, \int_M \nabla u\cdot\nabla v\,d\mu$$

$$\int_M (\Delta f)^2 d\mu \,\geq\, \frac{1}{n}\int_M (\Delta f)^2 d\mu + \rho\int_M |\nabla f|^2 d\mu$$

$$\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\int_M (\Delta f)^2 d\mu \,\geq\, \rho\int_M |\nabla f|^2 d\mu \,=\, \rho\int_M f(-\Delta f)d\mu$$

$f$ eigenfunction with eigenvalue $\lambda_1$

$$-\Delta f = \lambda_1 f$$

$$\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\lambda_1^2\int_M f^2 d\mu \,\geq\, \rho\lambda_1\int_M f^2 d\mu$$

$$\lambda_1 \,\geq\, \frac{\rho\, n}{n-1}$$ **Lichnerowicz's lower bound**

Poincaré constant $\quad \kappa \,=\, \lambda_1 \,\geq\, \dfrac{\rho\, n}{n-1}$

optimal on $\mathbb{S}^n \qquad \rho = n-1 \qquad \lambda_1 = n \qquad$ (Wirtinger)

$(M, g)$ (compact) Riemannian manifold

$$\lambda_1 \geq K(n, \rho, D)$$

dimension $n$ $\qquad \mathrm{Ric} \geq \rho \in \mathbb{R}$ $\qquad$ diameter $D$

**P. Li (1979), J. Zhong, H. Yang (1984)**

$(M, g)$ Riemannian manifold non-negative Ricci curvature

$$\lambda_1 \geq \frac{\pi^2}{D^2}$$

extremal : torus

## from the sphere to Gauss space

$\mathrm{L} = \Delta$ Laplace operator on $(\mathbb{S}^n, \sigma)$

$$\mathcal{E}(f) = \int_{\mathbb{S}^n} f(-\Delta f) d\sigma = \int_{\mathbb{S}^n} |\nabla f|^2 d\sigma$$

$$n \operatorname{Var}_\sigma(f) \leq \mathcal{E}(f)$$

$\mathrm{L} = \Delta - x \cdot \nabla$ Ornstein-Uhlenbeck operator on $(\mathbb{R}^n, \gamma)$

$$d\gamma(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-|x|^2/2} dx$$

$$\mathcal{E}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(-\mathrm{L} f) d\gamma = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma$$

$$\operatorname{Var}_\gamma(f) \leq \mathcal{E}(f)$$

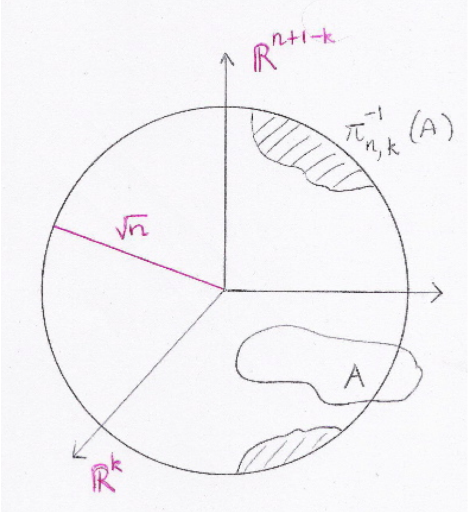
## the **Poincaré lemma**

$$\pi_{n,k} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^k$$

$\sigma_n$ uniform (normalized) on $\mathbb{S}^n(\sqrt{n}\,)$

if $A \subset \mathbb{R}^k$

$$\sigma_n\Big(\pi_{n,k}^{-1}(A) \cap \mathbb{S}^n(\sqrt{n}\,)\Big)$$




$$\sigma_n\left(\pi_{n,k}^{-1}(A) \cap \mathbb{S}^n(\sqrt{n})\right) \to \gamma(A) \qquad n \to \infty$$

# the **Poincaré lemma**

$$\pi_{n,k} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^k$$

$\sigma_n$ uniform (normalized) on $\mathbb{S}^n(\sqrt{n}\,)$

if $A \subset \mathbb{R}^k$

$$\sigma_n\Big(\pi_{n,k}^{-1}(A) \cap \mathbb{S}^n(\sqrt{n}\,)\Big) \to \gamma(A)$$

$$d\gamma(x) = e^{-|x|^2/2}\,\frac{dx}{(2\pi)^{k/2}}$$

cited by **H. P. McKean (1973), M. Kac...**

COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

COURS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

# CALCUL
DES
# PROBABILITÉS

PAR

H. POINCARÉ,
MEMBRE DE L'INSTITUT,

RÉDACTION DE

A. QUIQUET,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

DEUXIÈME ÉDITION, REVUE ET AUGMENTÉE PAR L'AUTEUR.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1912

the **Poincaré lemma**

$$\pi_{n,k} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^k$$

$\sigma_n$ uniform (normalized) on $\mathbb{S}^n(\sqrt{n}\,)$

if $A \subset \mathbb{R}^k$

$$\sigma_n\Big(\pi_{n,k}^{-1}(A) \cap \mathbb{S}^n(\sqrt{n}\,)\Big) \to \gamma(A)$$

$$d\gamma(x) = e^{-|x|^2/2} \, \frac{dx}{(2\pi)^{k/2}}$$

seemingly not due to **H. Poincaré (1912)**

**F. Mehler (1866), L. Boltzmann (1868),**

**J. Maxwell (1878), E. Borel (1906)**

## Bochner's formula

$$\frac{1}{2}\,\Delta\big(|\nabla f|^2\big) - \nabla f \cdot \nabla(\Delta f) \;=\; \big|\mathrm{Hess}(f)\big|^2 + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f)$$

$$\mathrm{Ric}_{\mathbb{S}^n} \;=\; n-1$$

$$\mathrm{Ric}_{\mathbb{S}^n(r)} \;=\; \frac{n-1}{r^2}$$

$$r \;\sim\; \sqrt{n}$$

$$\mathrm{Ric} \;\sim\; 1$$

## Ornstein-Uhlenbeck operator on $\mathbb{R}^k$

$$\mathrm{L} = \Delta - x \cdot \nabla$$

invariant measure $d\gamma(x) = e^{-|x|^2/2} \frac{dx}{(2\pi)^{k/2}}$

## **Bochner's formula** for $\mathrm{L}$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{L}\big(|\nabla f|^2\big) - \nabla f \cdot \nabla(\mathrm{L}f) = \big|\mathrm{Hess}(f)\big|^2 + |\nabla f|^2$$

constant Ricci curvature $(= 1)$ infinite dimension $(n = \infty)$

$$\kappa = \lambda_1 \geq \frac{\rho\, n}{n-1} = 1$$

Poincaré inequality

$$\mathrm{Var}_\gamma(f) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma$$

## D. Bakry, M. Émery **theory** (1985)

Markov operator $\mathrm{L}$ on state space $E$

$\mu$ invariant symmetric probability measure

$\Gamma$ (bilinear) gradient operator

$$\Gamma(f,g) \,=\, \frac{1}{2}\left[\mathrm{L}(fg) - f\,\mathrm{L}g - g\,\mathrm{L}f\right]$$

$f, g : E \to \mathbb{R}$ in some nice algebra $\mathcal{A}$

$\mathrm{L} = \Delta$ on $M$ Riemannian manifold $\Gamma(f,g) = \nabla f \cdot \nabla g$

$$\mathcal{E}(f) \,=\, \int_E f(-\mathrm{L}f)\,d\mu \,=\, \int_E \Gamma(f,f)d\mu$$

$$\Gamma(f,g) = \tfrac{1}{2}\left[\mathrm{L}(fg) - f\,\mathrm{L}g - g\,\mathrm{L}f\right]$$

$\Gamma_2$ **operator**

$$\Gamma_2(f,g) = \tfrac{1}{2}\left[\mathrm{L}\,\Gamma(f,g) - \Gamma(f,\mathrm{L}g) - \Gamma(g,\mathrm{L}f)\right]$$

Bochner's formula on $M$ Riemannian manifold, $\mathrm{L} = \Delta$

$$\Gamma_2(f,f) = \left|\mathrm{Hess}(f)\right|^2 + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f)$$

Ornstein-Uhlenbeck operator on $\mathbb{R}^k$

$$\mathrm{L} = \Delta - x \cdot \nabla$$

$$\Gamma_2(f,f) = \left|\mathrm{Hess}(f)\right|^2 + |\nabla f|^2$$

$$\mathrm{Ric} = 1$$

## curvature - dimension condition

$$\Gamma_2(f,f) \,\geq\, \rho\,\Gamma(f,f) + \frac{1}{n}\,(\mathrm{L}f)^2, \quad f \in \mathcal{A}$$

## model spaces

sphere $\mathbb{S}^n$ uniform measure

$\rho \,=\, n-1$ dimension $n$

$\mathbb{R}^k$ Gaussian measure

$\rho \,=\, 1$ infinite dimension $n = \infty$

# dynamical (heat flow) proof

of Lichnerowicz's bound

$(P_t)_{t\geq 0}$ Markov semigroup with generator $\mathrm{L}$

$$f : E \to \mathbb{R}, \quad \int_E f\, d\mu = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_E (P_t f)^2 d\mu = 2 \int_E P_t f(-\mathrm{L} P_t f) d\mu = 2 \int_E \Gamma(P_t f, P_t f) d\mu$$

very definition of $\Gamma_2$

$$\frac{d}{dt} \int_E \Gamma(P_t f, P_t f) d\mu = 2 \int_E \Gamma_2(P_t f, P_t f)) d\mu$$

curvature - dimension condition

$$\Gamma_2(f,f) \,\geq\, \rho\,\Gamma(f,f) + \frac{1}{n}\,(\mathrm{L}f)^2, \quad f \in \mathcal{A}$$

$$\frac{d}{dt}\int_E \Gamma(P_tf, P_tf)d\mu \,=\, 2\int_E \Gamma_2(P_tf, P_tf))d\mu$$

differential inequality

$$\frac{\rho n}{n-1}\,\mathrm{Var}_\mu(f) \,\leq\, \int_E \Gamma(f,f)d\mu \,=\, \mathcal{E}(f)$$

**Poincaré inequality** $\quad \kappa \,\geq\, \dfrac{\rho n}{n-1}$

**same heat flow scheme**

## logarithmic Sobolev and Sobolev inequalities

$$\frac{\rho n}{n-1} \, \frac{\|f\|_p^2 - \|f\|_2^2}{p-2} \, \leq \, \int_E \Gamma(f,f) d\mu$$

$$1 \, \leq \, p \, \leq \frac{2n}{n-2}$$

◇ $p = 1$ Poincaré inequality

◇ $p = 2$ logarithmic Sobolev inequality **(G. Perelman)**

◇ $p = \frac{2n}{n-2}$ sharp Sobolev inequality

## open problem

$$\Gamma_2(f,f) \,\geq\, \rho\,\Gamma(f,f) + \frac{1}{n}\,(\mathrm{L}f)^2, \quad f \in \mathcal{A}$$

model space : sphere $\mathbb{S}^n$ $\qquad \rho = n-1$

## Lévy-Gromov's isoperimetric comparison theorem

$$I_\mu(s) \,=\, \inf\big\{\mu^+(A); \mu(A) = s\big\}, \quad s \in (0,1)$$

$$\mu^+(A) \,=\, \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\big[\mu(A_\varepsilon) - \mu(A)\big]$$

$$I_\mu \,\geq\, I_{\mathbb{S}^n}$$

**D. Bakry, M. L. (1996)** infinite dimensional model $\quad (n = \infty)$

## J. Lott - C. Villani, K.-Th. Sturm (2006-09)

**synthetic definition of lower bound on curvature**

**in metric measure space** $(E, d, \mu)$

$\mu_\theta$ geodesic joining $\mu_0$ and $\mu_1$

$$H(\mu_\theta \,|\, \mu) \leq (1-\theta) H(\mu_0 \,|\, \mu) + \theta H(\mu_1 \,|\, \mu) - \rho\, \theta(1-\theta) W_2(\mu_0, \mu_1)^2$$

$$H(\nu \,|\, \mu) = \int_E \log \frac{d\nu}{d\mu}\, d\nu, \quad \nu \ll \mu$$

relative entropy

$$W_2(\nu, \mu)^2 = \inf_{\nu \leftarrow \pi \rightarrow \mu} \int_E \int_E d(x,y)^2 d\pi(x,y)$$

Kantorovich-Rubinstein-Wasserstein distance

## J. Lott - C. Villani, K.-Th. Sturm (2006-09)

**synthetic definition of lower bound on curvature**

**in metric measure space** $(E, d, \mu)$

$\mu_\theta$ geodesic joining $\mu_0$ and $\mu_1$

$$H(\mu_\theta \,|\, \mu) \leq (1-\theta) H(\mu_0 \,|\, \mu) + \theta H(\mu_1 \,|\, \mu) - \rho\, \theta(1-\theta) W_2(\mu_0, \mu_1)^2$$

◇ generalizes Ricci curvature in Riemannian manifolds

◇ main result : stability by Gromov-Hausdorff limit

◇ analysis on singular spaces (limits of Riemannian manifolds)

◇ **allows for geometric and functional inequalities**

**J. Lott, C. Villani (2007)**

metric probability measure space $(E, d, \mu)$

under synthetic curvature $\rho > 0$ dimension $n$ $(> 1)$

$$\frac{\rho\, n}{n-1} \operatorname{Var}_\mu(f) \leq \int_E |\nabla f^2| d\mu$$

**open for**

logarithmic Sobolev and Sobolev inequalities

isoperimetry (Lévy-Gromov)

**back to Poincaré's initial context**

## log-concave measures

$d\mu = e^{-V}dx$ probability measure on $\mathbb{R}^n$

log-concave : $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convex

$\mu$ uniform normalized on $\Omega$ convex body

Rappelons d'abord la définition de $k_2$; $k_2$ est le minimum du rapport

$$\frac{\int\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]d\tau}{\int V^2 d\tau}$$

quand la fonction $V$ et assujettie à la condition :

$$\int V d\tau = 0. \tag{10}$$

Par conséquent *pour un solide convexe quelconque on a*:

$$k_2 > \frac{6K_0 W}{\pi\lambda^5},$$

*$K_0$ désignant une constante numérique, $W$ le volume du corps, et $\lambda$ la plus grande distance de deux points de la surface du corps.*

**back to Poincaré's initial context**

**log-concave measures**

$d\mu = e^{-V} dx$ probability measure on $\mathbb{R}^n$

log-concave : $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convex

$\mu$ uniform normalized on $\Omega$ convex body

**convex analysis**

**geometry of convex bodies**

## log-concave measures

$d\mu = e^{-V} dx$ probability measure on $\mathbb{R}^n$

log-concave : $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convex

diffusion operator with invariant measure $\mu$

$$\mathrm{L} = \Delta - \nabla V \cdot \nabla$$

$V$ quadratic : Gaussian model

$$\Gamma_2(f, f) = \big\| \mathrm{Hess}(f) \big\|_2^2 + \mathrm{Hess}(V)(\nabla f, \nabla f)$$

(strict) convexity $\quad \mathrm{Hess}(V) \geq c > 0 \quad \Gamma_2 \geq c$

$$c \, \mathrm{Var}_\mu(f) \leq \mathcal{E}(f)$$

## log-concave measures

$d\mu = e^{-V}dx$ probability measure on $\mathbb{R}^n$

log-concave : $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convex

diffusion operator with invariant measure $\mu$

$$\mathrm{L} = \Delta - \nabla V \cdot \nabla$$

$V$ quadratic : Gaussian model

$$\Gamma_2(f,f) = \big\|\mathrm{Hess}(f)\big\|_2^2 + \mathrm{Hess}(V)(\nabla f, \nabla f)$$

convexity $\mathrm{Hess}(V) \geq 0$ $\Gamma_2 \geq 0$

**Poincaré inequality ?**

## Kannan-Lovasz-Siminovits (1995)

algorithmic approach to the volume of convex bodies

$\mu$ uniform normalized on $\Omega$ convex body

## S. Bobkov (1999)

$d\mu = e^{-V} dx$ probability measure on $\mathbb{R}^n$

log-concave : $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convex

# Poincaré's proof

## duplication

$$\int_\Omega f^2 \frac{dx}{|\Omega|} - \left( \int_\Omega f \frac{dx}{|\Omega|} \right)^2 = \frac{1}{2} \int_\Omega \int_\Omega \big| f(x) - f(y) \big|^2 \frac{dx}{|\Omega|} \frac{dy}{|\Omega|}$$

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 (x-y) \cdot \nabla f \big( tx + (1-t)y \big) dt$$

after a suitable change of variables

$$\kappa \int_\Omega f^2 dx \le \int_\Omega |\nabla f|^2 dx, \qquad \int_\Omega f \, dx = 0$$

$\kappa \ge \dfrac{c_n}{D(\Omega)^2}$ $\quad D(\Omega)$ diameter $\quad$ ($\Omega$ convex)

**L. Payne, H. Weinberger (1960)** (optimal) $\kappa = \dfrac{\pi^2}{D(\Omega)^2}$

## Kannan-Lovasz-Siminovits (1995)

algorithmic approach to the volume of convex bodies

$\mu$ uniform normalized on $\Omega$ convex body

## S. Bobkov (1999)

$d\mu = e^{-V} dx$ probability measure on $\mathbb{R}^n$

log-concave : $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convex

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ smooth enough

$$c \,\mathrm{Var}_\mu(f) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\mu$$

$$\frac{1}{c} \sim \int_{\mathbb{R}^n} \Big| x - \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} x \, d\mu \Big|^2 d\mu \leq D^2(\Omega) \qquad \text{diameter}$$

# the **Kannan-Lovasz-Siminovits** **conjecture** **(1995)**

$d\mu = e^{-V} dx$ probability measure on $\mathbb{R}^n$

log-concave : $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convex

isotropic position (after affine transformation)

$$\int_{\mathbb{R}^n} x \, d\mu = 0 \qquad \int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j \, d\mu = \delta_{ij}$$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ smooth enough

$$c \, \mathrm{Var}_\mu(f) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\mu$$

$c > 0$ **universal, independent of** $n$

## the **Kannan-Lovasz-Siminovits conjecture (1995)**

$d\mu = e^{-V} dx$ probability measure on $\mathbb{R}^n$

log-concave : $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convex

isotropic position (after affine transformation)

$$\int_{\mathbb{R}^n} x \, d\mu = 0 \qquad \int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j \, d\mu = \delta_{ij}$$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ smooth enough

$$c \left( \sup_{|u|=1} \int_{\mathbb{R}^n} \langle u, x \rangle^2 d\mu \right)^{-1} \mathrm{Var}_\mu(f) \le \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\mu$$

$c > 0$ **universal, independent of** $n$

## the **Kannan-Lovasz-Siminovits conjecture (1995)**

$d\mu = e^{-V} dx$ probability measure on $\mathbb{R}^n$

log-concave : $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convex

isotropic position (after affine transformation)

$$\int_{\mathbb{R}^n} x \, d\mu = 0 \qquad \int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j \, d\mu = \delta_{ij}$$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ smooth enough

$$c \, \mathrm{Var}_\mu(f) \le \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\mu$$

**O. Guédon, E. Milman (2011), R. Eldan (2012) :** $c \sim n^{-2/3}$

the **Kannan-Lovasz-Siminovits conjecture (1995)**

geometric (isoperimetric) content

central hyperplane

**stronger** than the **hyperplane (slicing) conjecture**

$\Omega$ convex body in $\mathbb{R}^n$, volume $1$

does there exists a hyperplane $H \subset \mathbb{R}^n$

$\mathrm{vol}_{n-1}(\Omega \cap H) \geq c$ $c > 0$ absolute ?

**K. Ball (2004), R. Eldan, B. Klartag (2011)**

## hyperplane (slicing) conjecture

$\Omega$ convex body in $\mathbb{R}^n$, volume $1$

does there exists a hyperplane $H \subset \mathbb{R}^n$

$\mathrm{vol}_{n-1}(\Omega \cap H) \geq c \qquad c > 0$ absolute ?

**J. Bourgain (1991)** probabilistic tools

**B. Klartag (2006)** probabilistic and optimal transport tools

$$c \sim n^{-1/4}$$

**Thanks to Henri Poincaré !**