Probabilité

Philippe Barbe et Michel Ledoux

Errata

Nous remercions Michel Benaïm, Hervé Carrieu, Pierre Mathieu, Raphaël Sellam pour les corrections indiquées ci-dessous.

– page 7, ligne 2 de la Démonstration de la **Proposition I.2.1**, lire : “On a $(f_2 \circ f_1)^{-1}(A) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(A))$.”

– page 16, **Théorème I.4.9 (de prolongement),** modifier l'énoncé sous la forme :

Théorème I.4.9. *(de prolongement).*

Soit μ une fonction additive d'ensembles, positive, définie sur une algèbre de Boole $\mathcal{C}$ de parties de Ω. Si μ est σ-additive sur $\mathcal{C}$, alors μ se prolonge en une mesure σ-additive sur $(\Omega, \sigma(\mathcal{C}))$. Si μ est σ-finie (sur $\mathcal{C}$), le prolongement est unique, et σ-fini.

La σ-additivité sur $\mathcal{C}$ est équivalente au fait que si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite croissante d'éléments de réunion $A \in \mathcal{C}$, $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

– page 17, ligne 1 : changer la phrase en : “Alors μ est une fonction que l'on peut montrer σ-additive d'ensembles, et s'étend... ”

– page 20, ligne 11 : $A \subset [0,1[$.

– page 20, **Exercice I.7** : attention, pas de b).

– page 39, lignes 1-2 : lire “...mais le dual de L^∞ n'est pas (en général) L^1 ”.

– page 95, ligne 12 : lire $U_i = [2^{i+1}U] - 2[2^iU]$ au lieu de $U_i = [2^{i+1}U] - [2^iU]$.

– page 97, ligne 14 : lire ... $\leq e^{-2c_n^2/n(1+o(1)}$ au lieu de ... $= e^{-2c_n^2/n(1+o(1)}$. Idem ligne -1. (Des détails sur l'optimisation sont fournis plus bas.)

– page 101, ligne 3 de la Démonstration du **Théorème IV.4.3** : u_k^2 au lieu de u_k.

– page 169, ligne -1 et ligne -3 : il n'y a pas de dénominateur : pas de $1-F(x)$ à la ligne -3 et pas de $F(x)$ dans la ligne -1.

– page 170, ligne 14 : $n(n-1)^{-1} - L_n(x)$ au lieu de $1 - L_n(x)$.

– page 171, ligne 12 : $0 \le y \le cf(x)$ au lieu de $0 \le y \le f(x)$.

– page 172, ligne 5 : $X_{n-1,n}$ au lieu de $X_{n,n}$.

– page 172, ligne 8 : $\cdots \le t_p = t$ au lieu de $\cdots \le t_p \le t$.

– page 172, ligne -3 : $\exp(-\lambda(t_i - t_{i-1}))$ au lieu de $\exp(-\lambda(t_{i+1} - t_i))$.

– page 188, ligne -14 : uniforme sur $\{1, 2, \dots, k\} \setminus \cdots$ au lieu de uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \cdots$.

– page 226, **Exercice VIII.4** : lire "... chaîne de Markov à espace d'états fini".

– page 97, ligne 14 : **Détails de l'optimisation de la fonction**

$$f(s) \;=\; s^{c_n - n/2} G_n(s).$$

Soit $g(s) = \log f(s)$. On a

$$g'(s) \;=\; f(s)\Big(\Big(c_n - \frac{n}{2} + 1\Big)\frac{1}{s} + \frac{n-1}{s}\Big)$$

et cette dérivée s'annule en

$$s \;=\; \frac{(n/2) - c_n - 1}{c_n + (n/2)} \;=\; 1 - h_n$$

où $h_n = (2c_n + 1)/\big(c_n + (n/2)\big)$. Observer que si $c_n \ll n$ alors $h_n \sim 4c_n/n$ tend vers 0.

Considérer alors la fonction

$$\log f(1-h) \;=\; \Big(c_n - \frac{n}{2} + 1\Big)\log(1-h) + (n-1)\log\Big(1 - \frac{h}{2}\Big).$$

Par un développement de Taylor pour h au voisinage de 0,

$$\log f(1-h_n) \;=\; \Big(c_n - \frac{n}{2} + 1\Big)\Big(-h_n - \frac{h_n^2}{2} + o(h_n^2)\Big) + (n-1)\Big(-\frac{h_n}{2} - \frac{h_n^2}{8} + o(h_n^2)\Big).$$

Dans ce développement, le terme en h_n est $-(c_n + \frac{1}{2})h_n$ et, pour c_n tendant vers l'infini, il est de l'ordre de $-c_n h_n = -4c_n^2/n$. Le terme en h_n^2 est

$$\Big(-c_n + \frac{n}{2} - 1 - \frac{n}{4} + \frac{1}{4}\Big)\frac{h_n^2}{2} \;\sim\; \frac{n}{8}\,h_n^2 \;\sim\; 2\,\frac{c_n^2}{n}\,.$$

On voit alors que

$$\log f(1-h_n) \;=\; -2\,\frac{c_n^2}{n}\big(1+o(1)\big).$$

Cette borne est valable quand $\lim_{n\to\infty} c_n/n = 0$ et $\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$ (ce qui est le cas quand on prend $c_n = \sqrt{n\log n}$ comme à la ligne 15, page 97).

Le même calcul montre que si maintenant c_n ne tend pas vers l'infini, les termes linéaire et quadratique du développement fournissent

$$\log f(1-h_n) \;=\; -\Big(c_n+\frac{1}{2}\Big)h_n\big(1+o(1)\big)+\frac{n}{8}h_n^2\big(1+o(1)\big).$$

Puisque maintenant $h_n \sim 2(2c_n+1)/n$, on obtient

$$\begin{aligned}\log f(1-h_n) \;&=\; -\frac{(2c_n+1)^2}{n}\big(1+o(1)\big)+\frac{(2_n+1)^2}{2n}\\ &=\; -\frac{(2c_n+1)^2}{2n}\\ &=\; -2\,\frac{(c_n+1/2)^2}{n}\\ &\le\; -2\,\frac{c_n^2}{n}\,.\end{aligned}$$

On voit qu'alors la dernière égalité page 97, ligne 14, est en fait une inégalité. Cette erreur n'a néanmoins aucune influence sur la suite du texte. Remarquons aussi que l'égalité indiquée est clairement fausse si c_n est plus grand que $n/2$, puisque dans ce cas la probabilité que l'on cherche à évaluer est nulle.

Si maintenant, c_n est de l'ordre de n, poser $c_n = cn/2$. Alors la fonction f est maximum en $1-h_n$ avec maintenant

$$h_n \;=\; \frac{2c+(2/n)}{1+c}\,.$$

On vérifie que

$$\log f(1-h_n) \;=\; \frac{n}{2}g(c)\big(1+o(1)\big)$$

où à présent

$$g(c) \;=\; (c-1)\log(1-c)+(c-3)\log(1+c).$$

Il suffit donc de montrer que $g(c) \ge c^2$ pour tout c dans $[\,0,1\,]$, ce qui se fait en étudiant la fonction $g(c)-c^2$ (dériver 2 fois, étudier la dérivée, et revenir à la fonction...).