Leçon 1

Rappels de la théorie de la mesure : σ-algèbre, fonction mesurable

Cette leçon a pour but de rappeler les parties et fonctions mesurables qui pourront être mesurées et intégrées de façon efficace dans le cadre de la théorie de la mesure et de l'intégration de Lebesgue [1]. Un point délicat de cette théorie est en effet que, par exemple, toutes les parties de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ne peuvent pas être mesurées à travers une définition raisonnable de mesure (comme proposée à travers les axiomes de la Leçon 2). Cette limitation n'est en fait pas un obstacle pour l'usage, et une fois le cadre bien placé, les contraintes liées à l'absence de mesurabilité de certains ensembles ou fonctions sont sans conséquence pratique.

Soit X un ensemble ; ce pourra être un ensemble abstrait, ou un ensemble concret comme un ensemble fini ou dénombrable, l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, ou une partie de $\mathbb{R}$, le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$, un espace de Hilbert ou de Banach, ou un espace topologique.

L'ensemble des parties de X est désigné par $\mathcal{P}(X)$ (donc $A \in \mathcal{P}(X)$ signifie $A \subset X$). Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{A}$ sera appelée une famille (ou classe) de parties de X. Un point $x \in X$ (singleton) définit la partie $\{x\}$ dans $\mathcal{P}(X)$. Si A est une partie de X,

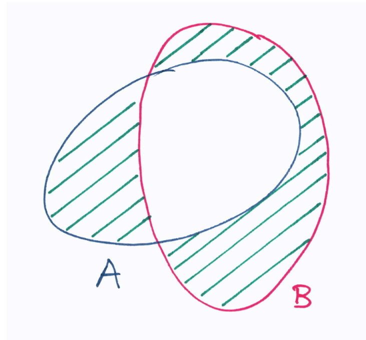
$$A^c \,=\, \{x \in X \,;\, x \notin A\}$$

désigne son complémentaire, aussi noté $X \setminus A$. Si $A, B \in \mathcal{P}(X)$,

$$A \Delta B \,=\, (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

est la différence symétrique de A et B.

1. Henri Lebesgue, mathématicien français (1875–1941).



Une partition dénombrable de X est une famille A_n, $n \in \mathbb{N}$, de parties (non vides) de X disjointes deux à deux (c'est-à-dire $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$) et telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$.

1 Algèbre, σ-algèbre

Les définitions suivantes d'algèbre et de σ-algèbre décrivent des familles de parties avec de bonnes propriétés de stabilité pour le développement de la théorie de la mesure et l'intégration.

Définition 1 (Algèbre)**.** *Une famille $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ de parties de X est une algèbre (ou algèbre de Boole[2]) si :*

a) $\mathcal{C}$ contient X ($X \in \mathcal{C}$) ;

b) $\mathcal{C}$ est stable par passage au complémentaire (si $A \in \mathcal{C}$, alors $A^c \in \mathcal{C}$) ;

c) $\mathcal{C}$ est stable par réunion finie (si $A, B \in \mathcal{C}$, alors $A \cup B \in \mathcal{C}$).

La stabilité par réunion finie (si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$, alors $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{C}$) s'obtient par récurrence sur c). En vertu de b), l'algèbre $\mathcal{C}$ est de façon équivalente stable par intersection finie (si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$, alors $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{C}$). La terminologie d'*algèbre (de Boole)* sera justifiée plus loin.

2. George Boole, logicien, mathématicien et philosophe britannique (1815–1864).

La théorie de la mesure et de l'intégration s'appuie de manière essentielle sur des opérations dénombrables. La définition suivante étend la précédente dans cette direction, le symbole σ signifiant précisément une opération dénombrable.

Définition 2 (σ-algèbre)**.** *Une famille $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ de parties de X est une σ-algèbre si c'est une algèbre stable par réunion dénombrable (si $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$). Autrement dit, $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre si :*

a) $\mathcal{A}$ contient X $(X \in \mathcal{A})$;

b) $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire (si $A \in \mathcal{A}$, alors $A^c \in \mathcal{A}$) ;

c) $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable (si $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$).

Une σ-algèbre est aussi appelée *tribu*, les deux termes seront utilisés de façon indifférente.

En vertu de la stabilité par passage au complémentaire, la σ-algèbre $\mathcal{A}$ est de façon équivalente stable par intersection dénombrable (si $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$). Une σ-algèbre est une algèbre, la réciproque est fausse en général.

Définition 3 (Espace mesurable)**.** *Un couple $(X, \mathcal{A})$ constitué d'un ensemble X et d'une σ-algèbre $\mathcal{A}$ de parties de X est appelé un espace mesurable.*

Si $(X, \mathcal{A})$ est un espace mesurable, et si $B \in \mathcal{A}$, l'ensemble B muni de la σ-algèbre, appelée parfois *σ-algèbre trace*,

$$\mathcal{A} \cap B = \{A \cap B \,;\, A \in \mathcal{A}\}$$

constitue un nouvel espace mesurable.

La description des éléments d'une σ-algèbre n'est souvent pas explicite. En revanche, des familles de parties qui engendrent une σ-algèbre, appelées *systèmes générateurs*, le sont. Noter pour commencer que sur un espace X, il existe une plus petite σ-algèbre $\{\emptyset, X\}$ et une plus grande $\mathcal{P}(X)$, et que l'intersection de deux, ou d'un nombre quelconque de, σ-algèbres est encore une σ-algèbre. Ce n'est plus vrai pour une réunion (et il faut alors parler de σ-algèbre engendrée par une réunion au sens de la définition suivante).

Définition 4 (σ-algèbre engendrée)**.** *La σ-algèbre engendrée par une famille de parties $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ est la plus petite σ-algèbre contenant $\mathcal{E}$; elle est définie comme l'intersection de toutes les σ-algèbres qui contiennent $\mathcal{E}$ et notée d'ordinaire $\sigma(\mathcal{E})$.*

La notion d'algèbre engendrée est similaire. Un aspect pratique important dans la définition de σ-algèbre (ou algèbre) engendrée est que si $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre qui contient $\mathcal{E}$, alors elle contient aussi $\sigma(\mathcal{E})$ (puisque cette dernière est la plus petite σ-algèbre contenant $\mathcal{E}$).

L'exemple fondamental de σ-algèbre engendrée est la σ-algèbre sur $X = \mathbb{R}$ engendrée par la famille $\mathcal{E}$ des ouverts (ou des fermés) de $\mathbb{R}$, dite *σ-algèbre des boréliens,* ou *tribu borélienne*, et notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, d'après É. Borel [3].

Un ouvert O de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in O$, il existe un intervalle $]a, b[$ tel que $x \in]a, b[\subset O$. Comme a et b peuvent être choisis rationnels, tout ouvert dans $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts (qui peuvent être en outre pris disjoints, mais c'est un peu plus délicat à démontrer). Ainsi la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est aussi engendrée par la famille des intervalles. Cette famille peut être seulement composée de l'une quelconque des formes d'intervalles $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$, $[a, \infty[$, $]a, \infty[$, $]-\infty, b]$, $]-\infty, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$, ou même seulement $a, b \in \mathbb{Q}$, pourvu que la famille soit au moins paramétrée par une variable (réelle ou rationnelle). Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou plus généralement un borélien), $\mathcal{B}(I)$ est la σ-algèbre trace $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap I$ de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sur I.

Il est un peu délicat de montrer qu'il existe des parties de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas boréliennes, et il faut utiliser l'axiome du choix en logique pour en exhiber.

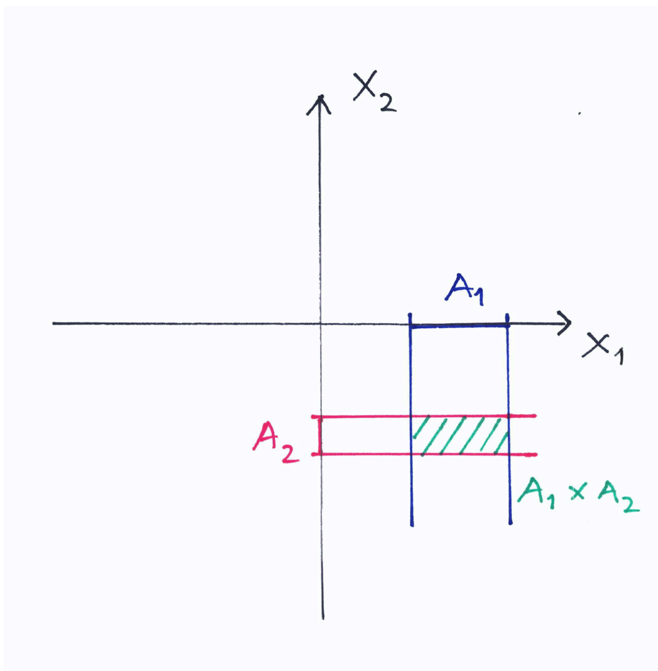
3. Émile Borel, mathématicien et homme politique français (1871–1956).

La tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$ d'un espace métrique (X, d), ou plus généralement d'un espace topologique, est définie de la même façon, comme la σ-algèbre engendrée par les ouverts de X.

En particulier, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est la σ-algèbre engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^d$. Il est cependant profitable de réaliser cette σ-algèbre comme une σ-algèbre produit sur $\mathbb{R}^d = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$.

Si X_1 et X_2 sont deux espaces, le produit cartésien $X = X_1 \times X_2$ de X_1 et X_2 est l'ensemble des couples $x = (x_1, x_2)$ tels que $x_1 \in X_1$ et $x_2 \in X_2$. Soient $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ des σ-algèbres sur X_1 et X_2 respectivement ; la σ-algèbre naturelle sur l'espace produit $X = X_1 \times X_2$ induite par $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ est définie comme la σ-algèbre engendrée par les *pavés*, ou *rectangles*,

$$A_1 \times A_2, \quad A_1 \in \mathcal{A}_1,\ A_2 \in \mathcal{A}_2.$$



Cette σ-algèbre est dite la *σ-algèbre produit* (de $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$) et notée sous forme tensorielle $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. (La notation de produit tensoriel $\otimes$ n'est pas pour effrayer, mais se doit de distinguer du simple produit cartésien $\times$.)

Cette construction s'étend à tout produit fini $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_d$ de σ-algèbres $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_d$ sur des espaces $X_1, \ldots, X_d$, $d \geq 2$.

Proposition 5. *Avec les notations précédentes,* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Démonstration. Elle est détaillée pour $d = 2$. La famille

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \;=\; \big\{ B \times \mathbb{R}\,;\; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \big\}$$

est clairement une σ-algèbre sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ engendrée par les pavés de la forme $B \times \mathbb{R}$ où B est un ouvert de $\mathbb{R}$. C'est donc la plus petite σ-algèbre sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ contenant les pavés $B \times \mathbb{R}$ où B est un ouvert de $\mathbb{R}$; mais ces derniers sont aussi des ouverts de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et donc éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. De même $\mathbb{R} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Ainsi, si B_1 et B_2 sont deux boréliens de $\mathbb{R}$,

$$B_1 \times B_2 \;=\; (B_1 \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times B_2) \;\in\; \mathcal{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}),$$

de sorte que $\mathcal{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par définition de la σ-algèbre produit. Réciproquement, tout ouvert de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ peut se représenter comme une réunion dénombrable de rectangles d'intervalles ouverts ; il s'ensuit que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. La double inclusion conclut la démonstration. $\square$

Dans toute la suite, si $X = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$, ou un espace métrique ou topologique, il sera toujours muni de la tribu borélienne. Idem pour le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes (identifié à $\mathbb{R}^2$). Si X est un ensemble fini ou dénombrable, il sera muni de la σ-algèbre des parties $\mathcal{P}(X)$.

Il sera parfois utile, pour un développement souple de la théorie de la mesure et de l'intégration, de considérer

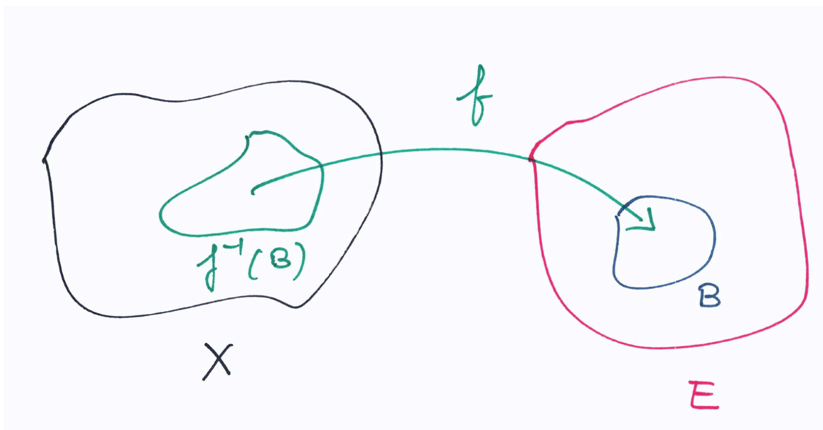
$$\overline{\mathbb{R}} \;=\; \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

(ou $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$). La σ-algèbre des boréliens de $\overline{\mathbb{R}}$ est composée des éléments de la forme $B \cup S$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $S \in \{\emptyset, \{-\infty\}, \{+\infty\}, \{-\infty, +\infty\}\}$, et est engendrée de la même façon par les intervalles.

2 Fonction mesurable

Une fonction $f : X \to E$ entre deux espaces mesurables $(X, \mathcal{A})$ et $(E, \mathcal{B})$ transporte la structure mesurable (comme un morphisme). Si $B \subset E$,

$$f^{-1}(B) = \big\{x \in X \,;\, f(x) \in B\big\}$$



est l'*image réciproque ensembliste* de B par f (aucune propriété de bijection n'est en jeu ici). La partie $f^{-1}(B)$ est aussi notée $\{f \in B\}$.

Définition 6 (fonction mesurable)**.** *Si $(X, \mathcal{A})$ et $(E, \mathcal{B})$ sont deux espaces mesurables, une fonction $f : X \to E$ est dite mesurable (par rapport à $\mathcal{A}$ la σ-algèbre sur l'espace de départ X, et $\mathcal{B}$ la σ-algèbre sur l'espace d'arrivée E) si*

$$\textit{pour tout } B \in \mathcal{B}, \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

Il sera commode d'indiquer $f : (X, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{B})$ pour représenter les structures mesurables au départ et à l'arrivée, et de transcrire la propriété de mesurabilité de f dans la notation compacte

$$f^{-1}(\mathcal{B}) = \big\{f^{-1}(B) \,;\, B \in \mathcal{B}\big\} \subset \mathcal{A}.$$

En fait, $f^{-1}(\mathcal{B})$ est une σ-algèbre sur X (cf. Exercice 5) ; c'est la plus petite σ-algèbre sur X rendant $f : X \to (E, \mathcal{B})$ mesurable. Elle est parfois notée $\sigma(f)$ (pour la σ-algèbre sous-jacente $\mathcal{B}$).

Il arrive souvent qu'une fonction mesurable soit présentée comme prenant ses valeurs dans E, alors qu'en fait elle est à valeurs dans une partie (stricte) $E_0 \subset E$ (mesurable). Par exemple, une fonction mesurable $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ positive est en fait à valeurs dans $[0, \infty[$ muni de la σ-algèbre trace de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sur $[0, \infty[$. Ou encore, une fonction mesurable $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ à valeurs entières est aussi mesurable en tant que fonction à valeurs réelles pour la tribu borélienne puisque si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$),

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \big\{x \in X \,;\, f(x) \in B \cap \mathbb{N}\big\} \\ &= \bigcup_{n \in B \cap \mathbb{N}} \big\{x \in X \,;\, f(x) = n\big\} \\ &= \bigcup_{n \in B \cap \mathbb{N}} f^{-1}\big(\{n\}\big), \end{aligned}$$

la réunion étant disjointe. Les deux points de vue sont équivalents et peuvent être utilisés librement.

Comme une σ-algèbre $\mathcal{B}$ n'est souvent décrite que par un système générateur (comme pour la tribu borélienne), il est commode de ne vérifier la propriété de mesurabilité d'une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{B})$ que sur le système générateur.

Proposition 7. *Si $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E})$ pour une famille $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)$, pour qu'une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{B})$ soit mesurable, il suffit que $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ pour tout $E \in \mathcal{E}$.*

Démonstration. Il est aisé de vérifier que

$$\mathcal{T} = \big\{B \subset E \,;\, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\big\}$$

est une σ-algèbre (sur E). Elle contient $\mathcal{E}$ par hypothèse, donc aussi $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E})$. Donc pour tout $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ ce qui démontre que f est mesurable. $\square$

Un schéma de démonstration similaire établit en fait que si $f : X \to E$ est une fonction et $\mathcal{E}$ une famille de parties de E, alors

$$f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{E})\big) \,=\, \sigma\big(f^{-1}(\mathcal{E})\big)$$

(ce qui entraîne, dans les notations de la proposition, que $f^{-1}(\mathcal{B}) = \sigma\big(f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}\big)$.

Ainsi, pour qu'une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ soit mesurable, il suffit de vérifier que $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ pour tout ouvert (ou fermé) B de $\mathbb{R}$, ou pour tout intervalle des sous-familles génératrices d'intervalles. Typiquement, f est mesurable dès que

$$f^{-1}\big(]-\infty, t]\big) \,=\, \big\{x \in X\,;\, f(x) \leq t\big\} \,\in\, \mathcal{A} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Il en va de même si f est à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Une fonction mesurable $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (ou, en dimension d, $f : (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sera souvent qualifiée de *borélienne*. Il sera alors simplement dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ou $f : I \to \mathbb{R}$ si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, est borélienne.

Une autre conséquence simple est que toute fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ou plus généralement $f : X \to Y$ entre deux espaces métriques ou topologiques, est mesurable (pour les tribus boréliennes au départ et à l'arrivée) puisque l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert, donc un borélien.

Les propriétés des produits tensoriels de σ-algèbres indiquent également qu'une fonction

$$f \,=\, (f_1, f_2) : (X, \mathcal{A}) \,\to\, \big(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\big)$$

est mesurable si et seulement si chaque fonction coordonnée

$$f_i : (X, \mathcal{A}) \,\to\, (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})), \quad i = 1, 2,$$

est mesurable. Par exemple, si ces dernières le sont, et si $B_1 \times B_2$ est un pavé de boréliens (la famille de ces derniers engendrant $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$),

$$f^{-1}(B_1 \times B_2) \,=\, f_1^{-1}(B_1) \cap f_2^{-1}(B_2) \,\in\, \mathcal{A}.$$

À titre de conséquence utile, une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ à valeurs complexes est mesurable si et seulement si les fonctions parties réelle et imaginaire de f sont mesurables (en tant que fonctions à valeurs réelles).

Un exemple fondamental de fonction mesurable est fourni par la fonction *indicatrice* d'une partie $A \subset X$ définie par

$$\mathbb{1}_A(x) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A, \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A. \end{cases}$$

La fonction $\mathbb{1}_A : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{A}$. En fait $\sigma(\mathbb{1}_A) = \sigma(\{A\})$. Cette fonction peut bien sûr aussi être considérée à valeurs dans $\{0, 1\}$ muni de la σ-algèbre des parties, auquel cas

$$(\mathbb{1}_A)^{-1}\big(\{1\}\big) \;=\; A, \quad (\mathbb{1}_A)^{-1}\big(\{0\}\big) \;=\; A^c,$$

justifiant l'assertion.

Une fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ est aussi appelée fonction caractéristique, notée parfois χ_A. Elle justifie naturellement la terminologie d'algèbre de Boole (le mot « algèbre » étant habituellement réservé aux anneaux qui sont aussi des espaces vectoriels). Les propriétés $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \cap B}$ et $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \Delta B}$ modulo 2 montrent en effet que si F_2 est le corps à 2 éléments notés 0 et 1, si $\mathcal{C}$ est une algèbre de Boole, $(\mathcal{C}, \Delta, \cap)$ s'identifie de manière isomorphe à travers la fonction indicatrice à une sous-algèbre de $(F_2^X, +, \cdot)$.

Les fonctions indicatrices donnent lieu aux fonctions *étagées*, ou *simples*, définies comme combinaisons linéaires de fonctions indicatrices. Plus précisément, il sera convenu qu'une fonction étagée $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est de la forme

$$f \;=\; \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbb{1}_{A_k}$$

où les $A_k \in \mathcal{A}$ sont disjoints deux à deux et $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$. Il peut être supposé, et cela sera le cas dans la suite, que les c_k sont distincts et différents de 0. (Par ailleurs, si les A_k ne sont pas disjoints, il est toujours possible de se ramener à cette situation, comme par exemple

$$c_1 \mathbb{1}_{A_1} + c_2 \mathbb{1}_{A_2} \,=\, c_1 \mathbb{1}_{A_1 \cap A_2^c} + c_2 \mathbb{1}_{A_2 \cap A_1^c} + (c_1 + c_2) \mathbb{1}_{A_1 \cap A_2}.)$$

Une fonction étagée n'est rien d'autre qu'une fonction mesurable réelle ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, et (si donc tous les c_k sont supposés distincts et différents de 0), $A_k = f^{-1}(\{c_k\})$, $k = 1, \ldots, n$, $\big(\bigcup_{k=1}^n A_k\big)^c = f^{-1}(\{0\})$.

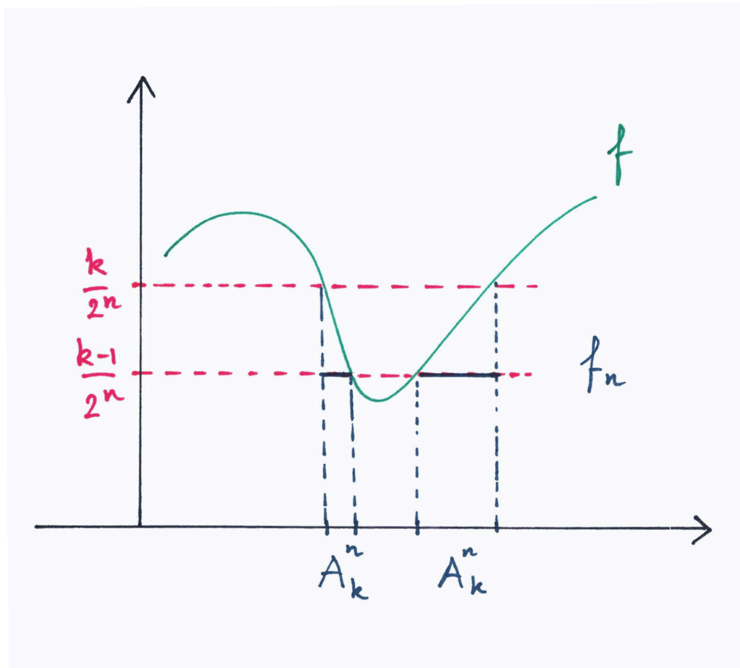
Proposition 8. *Toute fonction mesurable $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ positive ou nulle est limite croissante (ponctuelle) de fonctions étagées positives ou nulles.*

Démonstration. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, poser par exemple

$$f_n \,=\, \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \, \mathbb{1}_{A_k^n}$$

où, pour $k = 1, \ldots, n2^n$,

$$A_k^n \,=\, \Big\{ x \in X \,;\, \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \Big\}.$$



Comme image réciproque par f de l'intervalle $[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}[$, $A_k^n \in \mathcal{A}$. Si $x \in A_k^n$, alors $f_n(x) = \frac{k-1}{2^n}$; mais $A_k^n = A_{2k-1}^{n+1} \cup A_{2k}^{n+1}$, et donc $f_{n+1}(x) = \frac{2k-2}{2^{n+1}}$ ou $f_{n+1}(x) = \frac{2k-1}{2^{n+1}}$. Dans tous les cas, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, et donc la suite des fonctions étagées f_n, $n \in \mathbb{N}$, est croissante. Enfin, pour tout $x \in X$, il existe des entiers n et k, $1 \leq k \leq n2^n$, tels que $\frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}$, de sorte que

$$f_n(x) \;=\; \frac{k-1}{2^n} \;\leq\; f(x) \;<\; \frac{k}{2^n} \;=\; f_n(x) + \frac{1}{2^n}\,.$$

Ainsi $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ et $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ comme annoncé. □

Si $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est une fonction mesurable de signe quelconque, elle peut être décomposée f en sa partie positive et sa partie négative sous la forme $f = f_+ - f_-$ où $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = -\min(f, 0)$. Comme f_+ et f_- sont des fonctions mesurables (voir le paragraphe suivant) positives, la fonction f reste limite simple (mais pas nécessairement croissante) de fonctions étagées. Noter que $|f| = f_+ + f_-$.

3 Ensemble de fonctions mesurables

La propriété de mesurabilité est stable sous diverses opérations classiques et algébriques. Quelques exemples sont rassemblés ici, tous, sauf pour le premier d'entres eux, pour des fonctions $f : X \to \mathbb{R}$ à valeurs réelles.

Proposition 9. *Si $f : (X, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{B})$ et $g : (E, \mathcal{B}) \to (F, \mathcal{G})$ sont des fonctions mesurables, alors $g \circ f : (X, \mathcal{A}) \to (F, \mathcal{G})$ est mesurable.*

En effet, il suffit de vérifier que si $C \subset F$, alors $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$.

À titre d'illustration importante, si $\phi = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est borélienne, et $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable, alors $\phi \circ f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable. Par exemple, toutes les fonctions f^2, e^f, $\sin(f)$ etc. sont mesurables.

Proposition 10. *Si $f, g : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sont des fonctions mesurables, il en est de même de $\max(f, g)$, $\min(f, g)$, $f + g$, fg etc. Si $f_n : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $n \in \mathbb{N}$, sont des fonctions mesurables, il en va de même de $\liminf_{n\to\infty} f_n$ et $\limsup_{n\to\infty} f_n$ (à valeurs éventuellement dans $\overline{\mathbb{R}}$). En particulier, si f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge ponctuellement, la limite $\lim_{n\to\infty} f_n$ est mesurable.*

La mesurabilité de $f + g$ peut s'obtenir simplement comme la composition du couple mesurable $(f, g) : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ et de la fonction continue, donc borélienne, de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(x, y) \to x + y$.

Il n'est pas inutile de rappeler, pour la suite des leçons, les définitions de limites supérieure et inférieure (dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$). Si u_n, $n \in \mathbb{N}$, est une suite de nombres réels, poser $\overline{u}_n = \sup_{m\geq n} u_m$ (éventuellement égal à $+\infty$), $n \in \mathbb{N}$, et $\underline{u}_n = \inf_{m\geq n} u_m$ (éventuellement égal à $-\infty$), $n \in \mathbb{N}$. La suite $\overline{u}_n$, $n \in \mathbb{N}$, est croissante, et converge (dans $\overline{\mathbb{R}}$) vers une limite appelée limite supérieure de la suite u_n, $n \in \mathbb{N}$, notée $\limsup_{n\to\infty} u_n$ (c'est la plus grande des limites des suites extraites). La suite $\underline{u}_n$, $n \in \mathbb{N}$, est décroissante, et converge (dans $\overline{\mathbb{R}}$) vers une limite appelée limite inférieure de la suite u_n, $n \in \mathbb{N}$, notée $\liminf_{n\to\infty} u_n$ (c'est la plus petite des limites des suites extraites). La suite u_n, $n \in \mathbb{N}$, converge si et seulement si $\liminf_{n\to\infty} u_n = \limsup_{n\to\infty} u_n$.

Il est souvent utile de caractériser $\limsup_{n\to\infty} u_n = L$ (finie) à travers le couple de propriétés :

– pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq m$, $u_n \leq L + \varepsilon$ (autrement dit, $u_n \leq L + \varepsilon$ pour tout n sauf un nombre fini) ;

– pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq m$ tel que $u_n \geq L - \varepsilon$ (autrement dit, il existe une infinité d'entiers n tels que $u_n \geq L - \varepsilon$).

Une caractérisation analogue a lieu pour les limites inférieures, par exemple à travers l'identité $\limsup_{n\to\infty}(-u_n) = -\liminf_{n\to\infty} u_n$.

4 Complément : Classe monotone

Pour de nombreux développements en calcul des probabilités, il est utile de considérer, outre les algèbres et σ-algèbres, une classe intermédiaire de parties, appelée classe monotone. Si $A, B \in \mathcal{P}(X)$ avec $B \subset A$, $A \setminus B = A \cap B^c$.

Définition 11 (Classe monotone)**.** *Un famille $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ de parties d'un ensemble X est une classe monotone si :*

a) $\mathcal{M}$ contient X ($X \in \mathcal{M}$) ;

b) $\mathcal{M}$ est stable par passage au complémentaire relatif (si $A, B \in \mathcal{M}$, $B \subset A$, alors $A \setminus B \in \mathcal{M}$) ;

c) $\mathcal{M}$ est stable par réunion dénombrable croissante (si $A_n \in \mathcal{M}$, $A_n \subset A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$) .

Le passage au complémentaire relatif est plus fort que le passage au complémentaire. Mais pour une algèbre par exemple, les deux propriétés sont équivalentes. En particulier, une σ-algèbre est une classe monotone. Une classe monotone $\mathcal{M}$ stable par réunion ou intersection finie est une σ-algèbre ; en effet, si $B_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$, alors $A_n = \bigcup_{k\leq n} B_k$, $n \in \mathbb{N}$, est une famille croissante dans $\mathcal{M}$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

À titre de rappel, $\sigma(\mathcal{E})$ désigne la σ-algèbre engendrée par une famille de parties $\mathcal{E}$ de X. De la même façon, $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ est la classe monotone engendrée par $\mathcal{E}$ (l'intersection de toutes les classes monotones contenant $\mathcal{E}$).

Théorème 12. *Soit $\mathcal{E}$ une famille de parties de X stable par intersection finie ; alors $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{M}(\mathcal{E})$.*

Démonstration. Il a déjà été mentionné que $\sigma(\mathcal{E})$, en tant que σ-algèbre, est une classe monotone ; comme elle contient $\mathcal{E}$, elle contient aussi $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ (la plus petite classe monotone contenant $\mathcal{E}$). Réciproquement, il suffit, d'après ce qui précède, de démontrer que $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ est stable par intersection finie (car alors $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ sera une σ-algèbre contenant $\mathcal{E}$, donc aussi $\sigma(\mathcal{E})$). Dans ce but, poser

$$\mathcal{M}_1 = \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{E})\,;\, A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{E}) \text{ pour tout } B \in \mathcal{E}\}$$

puis

$$\mathcal{M}_2 = \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{E})\,;\, A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{E}) \text{ pour tout } B \in \mathcal{M}(\mathcal{E})\}.$$

Il est aisé de vérifier que les familles de parties $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont des classes monotones. La classe $\mathcal{M}_1$ contient $\mathcal{E}$ (puisque $\mathcal{E}$ est stable par intersection finie), donc $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. La classe $\mathcal{M}_2$ contient $\mathcal{E}$ (puisque $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}_1$), donc $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Ainsi $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}(\mathcal{E})$ et la définition de $\mathcal{M}_2$ indique exactement que si $A, B \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$, alors $A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$, c'est-à-dire que $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ est stable par intersection finie. Ce schéma de démonstration permet ainsi de conclure au théorème annoncé. $\square$

Exercices

(*Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.*)

Exercice 1. Sur $X = [0,1]$, décrire l'algèbre (de Boole) $\mathcal{C}$ engendrée par : a) $]0, \frac{1}{2}[$; b) $[0, \frac{1}{3}[,]\frac{2}{3}, 1]$; c) $[0, \frac{1}{4}], [\frac{2}{3}, 1]$.

Exercice 2. Démontrer que $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{N} \,; A \text{ ou } A^c \text{ est fini}\}$ est une algèbre de Boole. Est-ce une σ-algèbre ? Mêmes questions si $\mathbb{N}$ est remplacé par $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Si l'on définit la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ comme la tribu sur $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles $]a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, démontrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est aussi engendrée par les intervalles $]a,b]$, $a, b \in \mathbb{Q}$. Proposer d'autres familles génératrices.

Exercice 4.

a) Démontrer que si A et B sont des parties de X, $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$, $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_{A\triangle B} = |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|$.

b) Si A_n, $n \in \mathbb{N}$, est une suite de parties de X et $A = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} A_n$, établir l'égalité, pour tout $x \in X$, $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) = \mathbb{1}_A(x)$.

Exercice 5. Si $\mathcal{B}$ est une σ-algèbre sur un ensemble E et si $f : X \to E$ est une fonction, démontrer que $f^{-1}(\mathcal{B})$ est une σ-algèbre sur X. Établir que $f^{-1}(\mathcal{B})$ est la plus petite σ-algèbre sur X rendant $f : X \to (E, \mathcal{B})$ mesurable.