

Leçon 1 Exercices corrigés

(Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.)

Exercice 1. Sur $X = [0, 1]$, décrire l'algèbre (de Boole) $\mathcal{C}$ engendrée par :
a) $]0, \frac{1}{2}[$; b) $[0, \frac{1}{3}[$, $]\frac{2}{3}, 1]$; c) $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{2}{3}, 1]$.

Corrigé. b) Si $I_1 = [0, \frac{1}{3}[$ et $I_2 =]\frac{2}{3}, 1]$, l'algèbre $\mathcal{C}$ devra contenir aussi $I_3 = (I_1 \cup I_2)^c = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. Or I_1, I_2, I_3 forme une partition de $X = [0, 1]$. Un élément de $\mathcal{C}$ est alors de la forme $\bigcup_{\ell \in L} I_\ell$ où L est l'ensemble des parties de $\{1, 2, 3\}$. Au final, outre $\emptyset, X, I_1, I_2, I_3$, $\mathcal{C}$ comporte $I_1 \cup I_2, I_1 \cup I_3 = [0, \frac{2}{3}]$ et $I_2 \cup I_3 = [\frac{1}{3}, 1]$.

Exercice 2. Démontrer que $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{N} ; A \text{ ou } A^c \text{ est fini}\}$ est une algèbre de Boole. Est-ce une σ -algèbre ? Mêmes questions si $\mathbb{N}$ est remplacé par $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Si l'on définit la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ comme la tribu sur $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles $]a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, démontrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est aussi engendrée par les intervalles $]a, b]$, $a, b \in \mathbb{Q}$. Proposer d'autres familles génératrices.

Indication. Si $]a, b]$ est un intervalle avec $b \in \mathbb{R}$, $]a, b] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}}]a, q_n]$ où q_n , $n \in \mathbb{N}$, est une suite de rationnels qui décroît vers b .

Exercice 4.

- a) Démontrer que si A et B sont des parties de X , $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$, $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_{A \Delta B} = |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|$.
- b) Si A_n , $n \in \mathbb{N}$, est une suite de parties de X et $A = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} A_n$, établir l'égalité, pour tout $x \in X$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) = \mathbb{1}_A(x)$.

Corrigé. b) Par définition, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m} \mathbb{1}_{A_n}(x)$. Si $x \in A = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} A_n$, x appartient à une infinité de A_n , et donc

$\sup_{n \geq m} \mathbb{1}_{A_n}(x) = 1$ pour tout m . Réciproquement, si $x \notin A$, à partir d'un certain rang m , $x \notin A_n$ pour tout $n \geq m$, et donc $\sup_{n \geq m} \mathbb{1}_{A_n}(x) = 0$.

Exercice 5. Si $\mathcal{B}$ est une σ -algèbre sur un ensemble E et si $f : X \rightarrow E$ est une fonction, démontrer que $f^{-1}(\mathcal{B})$ est une σ -algèbre sur X . Établir que $f^{-1}(\mathcal{B})$ est la plus petite σ -algèbre sur X rendant $f : X \rightarrow (E, \mathcal{B})$ mesurable.

Corrigé. Pour rappel, si $B \subset E$, $f^{-1}(B) = \{x \in X ; f(x) \in B\}$. Il est clair que $f^{-1}(E) = X$. Comme

$$(f^{-1}(B))^c = \{x \in X ; f(x) \notin B\} = f^{-1}(B^c),$$

$f^{-1}(\mathcal{B})$ est stable par passage au complémentaire. Enfin, si B_n , $n \in \mathbb{N}$, est une famille de parties de E (mais les identités suivantes ne nécessitent pas de se limiter à une famille dénombrable),

$$\begin{aligned} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_n) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X ; f(x) \in B_n\} \\ &= \left\{ x \in X ; f(x) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right\} \\ &= f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right), \end{aligned}$$

de sorte que $f^{-1}(\mathcal{B})$ est stable par réunion dénombrable. En conclusion, $f^{-1}(\mathcal{B})$ vérifie les axiomes d'une σ -algèbre. Soit $\mathcal{A}$ une σ -algèbre sur X telle que $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (E, \mathcal{B})$ soit mesurable ; par définition, $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$. Comme $f^{-1}(\mathcal{B})$ est elle-même une σ -algèbre, elle répond bien à la question demandée.