Leçon 10 Exercices corrigés

(*Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.*)

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ de paramètre 1.

a) Décrire et représenter la fonction de répartition de la loi de la variable aléatoire $Z = \min(X, 2)$.

b) Décomposer la loi de Z sous la forme d'une combinaison linéaire d'une masse de Dirac et d'une mesure à densité.

Corrigé. a) S'agissant d'un minimum, il est plus efficace de chercher pour commencer $1 - F_Z(t) = \mathbb{P}(Z > t)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\big(\min(X,2) > t\big) \;=\; \begin{cases} \mathbb{P}(X > t) & \text{si} \quad t < 2, \\ 0 & \text{si} \quad t \geq 2. \end{cases}$$

Ainsi, comme $\mathbb{P}(X > t) = e^{-t}$ pour tout $t > 0$, il s'ensuit que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire $Z = \min(X, 2)$ est de la forme

$$F_Z(t) \;=\; 1 - \mathbb{P}(Z > t) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0, \\ 1 - e^{-t} & \text{si} \quad 0 \leq t < 2, \\ 1 & \text{si} \quad t \geq 2. \end{cases}$$

b) F_Z est continue, sauf au point $t = 2$ auquel elle présente un saut d'amplitude e^{-2}. Sinon, elle est aussi dérivable en dehors de $t = 0$ et $t = 2$, de dérivée $f(t) = e^{-t}\mathbb{1}_{]0,2[}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Ainsi la loi de Z se décompose sous la forme de la somme $e^{-2}\,\delta_2 + f d\lambda$.

Exercice 2* (*Fonction quantile ou inverse généralisée*). Soit X une variable aléatoire réelle. Démontrer que la fonction de répartition F_X de la loi de X est croissante, continue à droite, et vérifie $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$.

Soit $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction croissante, continue à droite telle que $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$. On se propose de montrer qu'il existe une loi sur $\mathbb{R}$ dont F est la fonction de répartition.

a) On définit la fonction inverse généralisée $F^{(-1)}$ de F par la formule

$$F^{(-1)}(y) \;=\; \inf\big\{x \in \mathbb{R};\; F(x) \geq y\big\}.$$

Montrer que pour $y \in]0,1[$, $F^{(-1)}(y)$ est bien définie (i.e. la borne inférieure existe dans $\mathbb{R}$).

b) Montrer que pour $y \in]0,1[$, $F^{(-1)}(y) \leq t$ si et seulement si $y \leq F(t)$.

c) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$. Montrer que la variable aléatoire $F^{(-1)}(U)$ a pour fonction de répartition F.

Corrigé. a) Comme $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$, il existe, pour chaque $y \in]0,1[$, $t_0 > 0$ tel que $F(-t_0) < y$ et $F(t_0) \geq y$. Ainsi, $\{x \in \mathbb{R}\,; F(x) \geq y\}$ est une partie non vide (contenant par exemple t_0) et minorée (par exemple par $-t_0$) de $\mathbb{R}$. Elle admet donc une borne inférieure. b) Si $y \leq F(t)$, alors $t \in \{x \in \mathbb{R}\,; F(x) \geq y\}$, et donc

$$t \;\geq\; \inf\big\{x \in \mathbb{R}\,; F(x) \geq y\big\} \;=\; F^{(-1)}(y).$$

Réciproquement, par définition de l'infimum, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $F(x) \geq y$ tel que

$$x \;\leq\; F^{(-1)}(y) + \varepsilon.$$

Ainsi, si $F^{(-1)}(y) \leq t$, alors $x \leq t + \varepsilon$ et par croissance de F,

$$y \;\leq\; F(x) \;\leq\; F(t+\varepsilon).$$

Comme F est continue à droite, lorsque $\varepsilon \to 0$, il s'ensuit que $y \leq F(t)$. c) Par définition, $\mathbb{P}(U \leq s) = s$ pour tout $s \in [0,1]$. Poser $X = F^{(-1)}(U)$

pour soulager les notations. D'après le point précédent, $X = F^{(-1)}(U) \le t$ si et seulement si $U \le F(t)$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \le t) = \mathbb{P}\big(U \le F(t)\big) = F(t).$$

ce qui est le résultat.

Cette observation est utilisée pour simuler des variables aléatoires de loi quelconque à partir de la simulation d'une loi uniforme. À noter que les arguments précédents montrent de la même façon que si X est une variable aléatoire dont la loi admet une fonction de répartition F_X continue, alors la variable aléatoire $F_X(X)$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ de paramètre 1 ; déterminer les lois de la partie entière $N = \lfloor X \rfloor$ et de la partie décimale $D = X - \lfloor X \rfloor$ de X, et du couple (N, D).

Corrigé. Le calcul de la loi du couple permettra de répondre à toutes les questions. Pour $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions boréliennes, positives ou bornées, le théorème de transport pour la loi de X et la fonction $x \mapsto \phi(\lfloor x \rfloor)\psi(x - \lfloor x \rfloor)$ fournit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big(\phi(N)\psi(D)\big) &= \mathbb{E}\big(\phi\big(\lfloor X \rfloor\big)\psi\big(X - \lfloor X \rfloor\big)\big) \\ &= \int_{[0,\infty[} \phi\big(\lfloor x \rfloor\big)\psi\big(x - \lfloor x \rfloor\big)e^{-x}d\lambda. \end{aligned}$$

En décomposant l'intégrale suivant les intervalles $[n, n+1[$, $n \ge 0$,

$$\mathbb{E}\big(\phi(N)\psi(D)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi(n) \int_{[n,n+1[} \psi(x-n)e^{-x}d\lambda,$$

et après le changement de variable $y = x - n$ sur chaque intervalle $[n, n+1[$,

$$\mathbb{E}\big(\phi(N)\psi(D)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi(n)e^{-n} \int_{[0,1[} \psi(y)e^{-y}d\lambda.$$

Si la fonction ψ est constante égale à 1, il en résulte que

$$\mathbb{E}\big(\phi(N)\big) \;=\; \frac{e-1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\phi(n)e^{-n}$$

de sorte que la loi de N est la probabilité discrète $P = \frac{e-1}{e}\sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} e^{-n}\delta_n$ (vérifier qu'elle est bien de masse totale 1, c'est une forme de la mesure géométrique de paramètre $\frac{1}{e}$ ou $1-\frac{1}{e}$ suivant la convention). De la même façon, si la fonction ϕ est constante égale à 1,

$$\mathbb{E}\big(\psi(D)\big) \;=\; \frac{e}{e-1}\int_{[0,1[}\psi(y)e^{-y}d\lambda$$

de sorte que la loi de D est la mesure de probabilité Q de densité $f(y) = \frac{e}{e-1}\,e^{-y}$, $y \in [0,1[$, par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $[0,1[$ (vérifier qu'elle est bien de masse totale 1). La loi du couple (N,D) est le produit des probabilités P et Q puisque

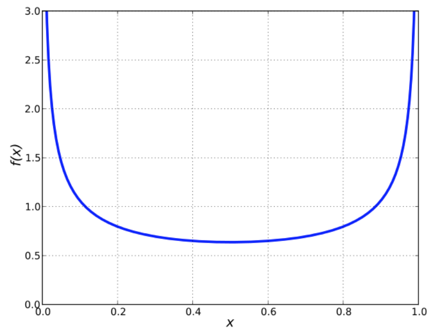
$$\mathbb{E}\big(\phi(N)\psi(D)\big) \;=\; \int_{(\mathbb{N}\cup\{0\})\times[0,1[}\phi\,\psi\,dP\otimes Q.$$

Exercice 4 (*Loi de l'arcsinus*). Soit $\mathcal{C}$ (respectivement $\mathcal{D}$) le cercle (respectivement disque) de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$ et $\Psi : \mathcal{D}\setminus\{0\} \to \mathcal{C}$ la fonction définie par

$$\Psi(x,y) \;=\; \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

On munit $\mathcal{C}$ de la tribu de ses boréliens et de la mesure de probabilité P, image de la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathcal{D}\setminus\{0\}$ par la fonction Ψ (autrement dit P est la mesure uniforme σ^1, ici normalisée, sur la sphère $\mathbb{S}^1 = \mathcal{C}$ – voir Théorème 3, Leçon 4). Soit $X : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ l'application première coordonnée, i.e. $X(x,y) = x$. Démontrer que la loi de X sous P a pour densité $\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathbb{1}_{]-1,+1[}(x)$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ (appelée loi de l'arcsinus, car sa fonction de répartition est donnée par $\frac{1}{\pi}\arcsin(t)+\frac{1}{2}$, $t\in[-1,+1]$).



Corrigé. La loi de X sous P est décrite par les intégrales $\int_{\mathcal{C}}\phi(x)\,dP(x,y)$ pour $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ borélienne, positive ou bornée. Comme P est la mesure image par Ψ de la mesure de Lebesgue λ sur $\mathcal{D}\setminus\{0\}$ (normalisée), d'après la formule d'intégration par rapport à une mesure image (Proposition 9, Leçon 3),

$$\int_{\mathcal{C}}\phi(x)\,dP(x,y) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{\mathcal{D}\setminus\{0\}}\phi\Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big)d\lambda(x,y).$$

Par une intégration en coordonnées polaires,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}}\phi(x)\,dP(x,y) &= \frac{1}{\pi}\int_{]0,2\pi]}\int_{]0,1]}\phi\big(\cos(\theta)\big)\rho\,d\lambda(\theta)d\lambda(\rho)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{]0,2\pi]}\phi\big(\cos(\theta)\big)d\lambda(\theta).\end{aligned}$$

Le changement de variable $u=\cos(\theta)$ (sur $]0,\pi]$) fournit finalement

$$\int_{\mathcal{C}}\phi(x)\,dP(x,y) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{]-1,+1[}\phi(u)\,\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,d\lambda(u)$$

ce qui exprime le résultat.

Exercice 5. Le couple aléatoire (X, Y) est uniformément réparti sur le disque unité $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$.

a) Déterminer les lois marginales.

b) Déterminer la loi du couple (R, Θ) des coordonnées polaires de (X, Y). (*Indication* : évaluer $\mathbb{E}(\phi(R)\psi(\Theta))$ pour des fonctions boréliennes, positives ou bornées, $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.)

c) Mêmes questions si (X, Y) suit la loi de densité $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

Corrigé. a) La question a été traitée dans l'Exercice 9, Leçon 8 : la loi du couple (X, Y) a pour densité $\frac{1}{\pi}\mathbb{1}_{\mathcal{D}}$ par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda^2 = \lambda \otimes \lambda$ sur $\mathbb{R}^2$, et la loi marginale commune de X et Y est la loi du demi-cercle de densité $\frac{2}{\pi}\sqrt{1 - x^2}\,\mathbb{1}_{[-1,+1]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$. b) En suivant l'indication, et par transport pour la loi du couple

$$\mathbb{E}\big(\phi(R)\psi(\Theta)\big) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathcal{D}} \phi\big(R(x,y)\big)\psi\big(\Theta(x,y)\big)d\lambda^2(x,y).$$

Le changement de variables en coordonnées polaires $x = \rho\cos(\theta)$, $y = \rho\sin(\theta)$, $\rho \in]0,1[$, $\theta \in]0, 2\pi[$, fournit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(\phi(R)\psi(\Theta)\big) &= \frac{1}{\pi}\int_{]0,1[}\int_{]0,2\pi[} \phi(\rho)\psi(\theta)\rho\, d\lambda^2(\rho,\theta) \\
&= \int_{]0,1[\times]0,2\pi[} \phi(\rho)\psi(\theta)\, 2\rho\, \frac{1}{2\pi}\, d\lambda(\rho)d\lambda(\theta) \\
&= \bigg(\int_{]0,1[} \phi(\rho)\, 2\rho\, d\lambda(\rho)\bigg)\bigg(\int_{]0,2\pi[} \psi(\theta)\, \frac{1}{2\pi}\, d\lambda(\theta)\bigg).
\end{aligned}$$

Le couple (R, Θ) a ainsi pour loi le produit $P \otimes Q$ des mesures (de probabilité) P de densité $2\rho\mathbb{1}_{]0,1[}(\rho)$ et Q de densité $\frac{1}{2\pi}\mathbb{1}_{]0,2\pi[}(\theta)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. La loi de R est P, la loi de Θ est Q (l'angle Θ est donc uniforme sur $]0, 2\pi[$). c) Dans ce cas, le couple (R, Θ) a pour loi le produit

$P \otimes Q$ des mesures (de probabilité) P de densité $\rho\, e^{-\frac{1}{2}\rho^2}\mathbb{1}_{]0,\infty[}(\rho)$ et Q de densité $\frac{1}{2\pi}\mathbb{1}_{]0,2\pi[}(\theta)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi admet la densité $f_{(X,Y)}(x, y) = c(x^2 + y^2)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Que vaut la constante c ? Montrer que les lois marginales de X et Y admettent des densités f_X et f_Y que l'on déterminera. Les variables X et Y sont-elles corrélées ? Comparer $f_{(X,Y)}$ avec le produit $f_X f_Y$.

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha)$ de paramètre $\alpha > 0$. Déterminer la transformée de Laplace L_X de la loi de X, en précisant son domaine de définition. En déduire $\mathbb{E}(X^k)$ pour tout $k \geq 1$, et $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 8 (*Loi Gamma*). Déterminer la transformée de Fourier φ de la mesure de probabilité de densité $\frac{1}{\Gamma(p)}\,\alpha^p x^{p-1}e^{-\alpha x}$, $p, \alpha > 0$, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0, \infty[$, appelée loi Gamma $\gamma(p, \alpha)$ de paramètres (p, α) (si $p = 1$, il s'agit de la loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha)$). En déduire les premier et second moments. Les retrouver par un calcul direct.

Corrigé. Par définition de la transformation de Fourier d'une mesure, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(u) = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_{]0,\infty[} e^{itx}\alpha^p x^{p-1}e^{-\alpha x}d\lambda = \left(\frac{\alpha}{\alpha - iu}\right)^p$$

(par un changement de variable formel avec un facteur complexe qui peut se justifier rigoureusement, par exemple par prolongement analytique de la transformée de Laplace réelle). Par ailleurs, la loi Gamma admet des moments de tous ordres. En conséquence $\int_{]0,\infty[} x d\gamma(p, \alpha) = -i\varphi'(0) = \frac{p}{\alpha}$ et $\int_{]0,\infty[} x^2 d\gamma(p, \alpha) = -\varphi''(0) = \frac{p(p+1)}{\alpha^2}$.

Exercice 9 (*Loi log-normale*). Une variable aléatoire X à valeurs réelles strictement positives est dite de loi log-normale si $Y = \ln(X)$ suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Calculer l'espérance et la variance de X si $m = 0$ et $\sigma^2 = 1$.

Indications. Par définition, $X = e^Y$. Donc, par transport,

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(e^Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^x \, e^{-\frac{1}{2}x^2} d\lambda.$$

Écrire $x - \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}$, puis effectuer le changement de variable $y = x - 1$. Idem pour $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(e^{2Y})$.

Exercice 10. Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

a) Pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, bornée ainsi que sa dérivée, démontrer que

$$\mathbb{E}\big(Xg(X)\big) = \mathbb{E}\big(g'(X)\big).$$

b) Soit φ_X la fonction caractéristique de (la loi de) X. Établir une équation différentielle entre φ'_X et φ_X. En déduire la valeur de $\varphi_X(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

c) Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, et soit $Z = m + \sigma X$. Calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathrm{Var}(Z)$.

d) Déterminer la densité de la loi de Z. Quelle est la loi de Z ?

e) Quelle est la fonction caractéristique φ_Z de (la loi de) Z ?

Corrigé. a) Comme g est bornée, la variable aléatoire $Xg(X)$ est intégrable car X l'est. Par le théorème de transport,

$$\mathbb{E}\big(Xg(X)\big) = \int_{\mathbb{R}} xg(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

puisque les intégrales de Lebesgue et de Riemann coïncident ici. Par intégration par parties,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \big[-g(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}\big]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} g'(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

Comme g est bornée, le premier terme du membre de droite est nul, et par transport le second est précisément $\mathbb{E}(g'(X))$, ce qu'il fallait démontrer. b) Comme la fonction sinus est impaire, par le théorème de transport,

$$\begin{aligned} \varphi_X(u) &= \mathbb{E}\big(\cos(uX) + i\sin(uX)\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \big[\cos(ux) + i\sin(ux)\big] e^{-\frac{1}{2}x^2} d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \cos(ux)\, e^{-\frac{1}{2}x^2} d\lambda(x) \;=\; \mathbb{E}\big(\cos(uX)\big) \end{aligned}$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$. En particulier, la fonction caractéristique φ_X est à valeurs réelles. D'après le théorème de dérivabilité de Lebesgue, $\varphi'_X(u) = -\mathbb{E}(X\sin(uX))$, $u \in \mathbb{R}$. La question précédente appliquée à $x \mapsto \sin(ux)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ fournit $\mathbb{E}(X\sin(uX)) = u\,\mathbb{E}(\cos(uX))$, de sorte que

$$\varphi'_X(u) \;=\; -u\,\varphi_X(u), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Comme $\varphi_X(0) = 1$, la résolution de cette équation différentielle produit $\varphi_X(u) = e^{-\frac{1}{2}u^2}$, $u \in \mathbb{R}$. c) Comme X est de loi $\mathcal{N}(0,1)$, $\mathbb{E}(X) = 0$ et $E(X^2) = 1$. En particulier, X est de carré intégrable, donc également $Z = m + \sigma X$. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Z) = m + \sigma\,\mathbb{E}(X) = m$. Toujours par linéarité,

$$\mathrm{Var}(Z) \;=\; \mathbb{E}\big(\big[Z - \mathbb{E}(Z)\big]^2\big) \;=\; \mathbb{E}(\sigma^2 X^2) \;=\; \sigma^2.$$

d) Par le théorème de transport, pour toute $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne, positive ou bornée,

$$\mathbb{E}\big(\phi(Z)\big) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \phi(m + \sigma x) e^{-\frac{1}{2}x^2} d\lambda,$$

et après le changement de variable $y = m + \sigma x$,

$$\mathbb{E}\big(\phi(Z)\big) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} \phi(y) e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-m)^2} d\lambda.$$

Il ressort de cette description que $Z = m + \sigma X$ suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, de moyenne m et de variance σ^2. e) D'après les propriétés de l'exponentielle et la question b), pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_Z(u) \,=\, \mathbb{E}\big(e^{iu(m+\sigma X)}\big) \,=\, e^{ium-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2},$$

expression décrivant ainsi la transformation de Fourier de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Exercice 11. Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$, dont la loi a pour fonction caractéristique φ_X ; vérifier que

$$\mathbb{P}(X=0) \,=\, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_X(\theta)d\theta.$$

Exercice 12*. Soit P une mesure de probabilité sur les boréliens de $\mathbb{R}$ de transformée de Fourier φ. Rappeler que si P a un moment (absolu) d'ordre 1, i.e. $\int_{\mathbb{R}} |x|dP < \infty$, alors φ est dérivable et $\varphi'(0) = i\int_{\mathbb{R}} xdP$.

Soit à présent la mesure $P = \sum_{n\geq 2} \frac{c}{n^2\ln(n)}(\delta_{+n} + \delta_{-n})$; préciser la valeur de $c > 0$.

a) Cette mesure admet-elle un moment (absolu) d'ordre 1 ?

b) Pour tout entier $N \geq 2$ et tout $u > 0$, définir

$$f_N(u) \,=\, \sum_{n=2}^{N} \frac{\sin^2(\frac{nu}{2})}{un^2\ln(n)} \quad \text{et} \quad g_N(u) \,=\, \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin^2(\frac{nu}{2})}{un^2\ln(n)}\,.$$

Démontrer que $f_N(u) \leq \frac{uN}{4\ln(2)}$ et que $g_N(u) \leq \frac{1}{uN\ln(N)}$.

c) Trouver une fonction $u \to N(u)$ définie sur $]0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\lim_{u\to 0} f_{N(u)}(u) = \lim_{u\to 0} g_{N(u)}(u) = 0$.

d) En utilisant la symétrie de P, établir que

$$\varphi(u) - 1 \,=\, -2\int_{\mathbb{N}} \sin^2\left(\tfrac{ux}{2}\right)dP(x), \quad u \in \mathbb{R}.$$

e) Conclure des questions précédentes que φ est dérivable en 0.

Corrigé. Comme P est de probabilité, $\sum_{n\geq 2} \frac{2c}{n^2 \ln n} = 1$ ce qui détermine la constante $c > 0$. a) Le moment absolu de P est donné par

$$\int_{\mathbb{R}} |x| dP = \sum_{n\geq 2} 2n \frac{c}{n^2 \ln(n)}$$

qui est une série divergente. b) Pour majorer $f_N(u)$, utiliser que $|\sin(x)| \leq |x|$ pour tout x réel pour en déduire que

$$f_N(u) \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{u}{4\ln(n)} \leq \frac{uN}{4\ln(2)}.$$

Pour majorer $g_N(u)$, utiliser simplement que $|\sin(x)| \leq 1$ pour tout x réel pour en déduire que

$$g_N(u) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{un^2\ln(n)} \leq \frac{1}{u\ln(N)} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{uN\ln(N)}$$

après une comparaison entre série et intégrale dans la dernière étape. c) Un peu de réflexion conduit à choisir une fonction de la forme (pour u assez petit)

$$N(u) = \left\lfloor \frac{1}{u(\ln(\frac{1}{u}))^{\alpha}} \right\rfloor$$

où $0 < \rho < 1$ pour laquelle

$$\lim_{u\to 0} \frac{uN(u)}{4\ln(2)} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{uN(u)\ln(N(u))} = 0$$

puisque $uN(u) \sim \frac{1}{(\ln(\frac{1}{u}))^{\rho}}$ et $\ln(N(u)) \sim \ln(\frac{1}{u})$ quand $u \to 0$. d) Par définition

$$\varphi(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} dP = \int_{\mathbb{R}} \cos(ux) dP, \quad u \in \mathbb{R},$$

puisque $\int_{\mathbb{R}} \sin(ux) dP = 0$ par symétrie de P. Donc

$$\varphi(u) - 1 = \int_{\mathbb{R}} \big[\cos(ux) - 1\big] dP = -2 \int_{\mathbb{R}} \sin^2\left(\tfrac{ux}{2}\right) dP.$$

e) Comme $\varphi(0) = 1$, pour établir la dérivabilité de φ en 0, il convient d'examiner la limite quand $u \to 0$ de $\frac{1}{u}[\varphi(u) - 1]$. D'après la question d), pour tout $u > 0$ et tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{u}\left[\varphi(u) - 1\right] \,=\, -2c\left[f_N(u) + g_N(u)\right].$$

En choisissant $N = N(u)$ pour chaque $u > 0$, $\lim_{u\to 0, u>0} \frac{1}{u}[\varphi(u) - 1] = 0$ en vertu de c). De la même façon, $\lim_{u\to 0, u<0} \frac{1}{u}[\varphi(u) - 1] = 0$, et donc φ est dérivable en 0 (de dérivée 0).

Exercice 13*. Soit X une variable aléatoire de loi Gamma de paramètre $(\frac{1}{2}, 1)$, donc de densité $f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\sqrt{x}}\, e^{-x}$ sur $]0, \infty[$ (Exercice 8).

a) Établir une équation différentielle pour la fonction caractéristique φ_X de la loi de X. En conclure que

$$\varphi_X(u) \,=\, \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{u+i}\, du\right), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Calculer $\varphi_X(u)$, $u \in \mathbb{R}$.

b) Quel est le sens de $I = \int_0^\infty \cos(x^2)dx$? Calculer I en étudiant $\varphi_X(u)$ lorsque $u \to \infty$.