Leçon 11 Exercices corrigés

(*Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.*)

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire positive et intégrable sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$; démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) \leq (1+\varepsilon)\,\mathbb{E}(X)$. (*Indication* : utiliser l'inégalité de Markov pour $t = (1+\varepsilon)\,\mathbb{E}(X)$ et le fait que si $\mathbb{P}(A) > 0$, alors A est non vide.)

Corrigé. Il n'y a rien à démontrer si $\mathbb{E}(X) = 0$, auquel cas $X = 0$ presque sûrement. En suivant l'indication, si $B = \{X \geq t\}$ avec $t = (1+\varepsilon)\,\mathbb{E}(X) > 0$,

$$\mathbb{P}(B) \leq \frac{1}{t}\,\mathbb{E}(X) = \frac{1}{1+\varepsilon} < 1.$$

Donc si $A = B^c$, $\mathbb{P}(A) > 0$ et A est non vide, ce qui démontre l'affirmation.

Exercice 2.

a) Soit X une variable aléatoire réelle de carré intégrable telle que $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{E}(X^2) > 0$; démontrer que $\mathbb{P}(X < 0) > 0$ et $\mathbb{P}(X > 0) > 0$. (*Indication* : procéder par contradiction.)

b*) Soit X une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{E}(X^2) \geq a > 0$ et $\mathbb{E}(X^4) \leq b < \infty$; démontrer que $\mathbb{P}(|X| > 0) \geq \frac{a^2}{b}$. (*Indication* : utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X^2 \mathbb{1}_{\{|X|>0\}})$.)

Corrigé. a) Si $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$, comme $\mathbb{E}(X) = 0$, $X = 0$ presque sûrement et il n'est alors pas possible que $\mathbb{E}(X^2) > 0$. Le raisonnement est identique si $\mathbb{P}(X \leq 0) = 1$ en travaillant avec $-X$. b) En suivant l'indication,

$$\big[\mathbb{E}(X^2)\big]^2 = \big[\mathbb{E}\big(X^2 \mathbb{1}_{\{|X|>0\}}\big)\big]^2 \leq \mathbb{E}(X^4)\,\mathbb{P}\big(|X| > 0\big).$$

La conclusion est alors immédiate. (Noter que $b > 0$ car $a > 0$.)

Exercice 3* (*Inégalité de Cantelli*). Pour X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de carré intégrable de variance $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$, démontrer que pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}\big(X - \mathbb{E}(X) \geq t\big) \;\leq\; \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}\,.$$

Comparer avec l'inégalité de Tchebychev. (*Indication* : supposer sans perte de la généralité que $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\sigma > 0$, appliquer l'inégalité de Markov avec un moment d'ordre 2 à

$$\mathbb{P}(X \geq t) \;=\; \mathbb{P}(X + a \geq t + a)$$

pour tout $a \geq 0$, et optimiser en a.)

Corrigé. En remplaçant X par $X - \mathbb{E}(X) = 0$, il peut être supposé sans perte de la généralité que $\mathbb{E}(X) = 0$. Pour tout $t > 0$ et tout $a \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq t) \;&=\; \mathbb{P}(X + a \geq t + a) \\
&=\; \mathbb{P}\big((X+a)^2 \geq (t+a)^2\big) \\
&\leq\; \frac{1}{(t+a)^2}\,\mathbb{E}\big((X+a)^2\big)
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Markov. Or $\mathbb{E}((X+a)^2) = \mathbb{E}(X^2) + a^2 = \sigma^2 + a^2$ car $\mathbb{E}(X) = 0$. Ainsi

$$\mathbb{P}(X \geq t) \;\leq\; \frac{\sigma^2 + a^2}{(t+a)^2}\,.$$

Il ne reste plus qu'à prendre le minimum en $a \geq 0$ du majorant, qui est obtenu pour $a = \frac{\sigma^2}{t}$. Pour cette valeur, l'expression est $\frac{\sigma^2}{\sigma^2+t^2}$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 4* (*Inégalité de Paley*[1]*-Zygmund*[2]). Soit X une variable aléatoire positive sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $0 < \mathbb{E}(X^2) < \infty$, et soit $t \in]0,1[$.

a) Comparer $\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X < t\,\mathbb{E}(X)\}})$ et $t\,\mathbb{E}(X)$. En déduire que

$$(1-t)\,\mathbb{E}(X) \;\leq\; \mathbb{E}\big(X \mathbb{1}_{\{X \geq t\,\mathbb{E}(X)\}}\big).$$

b) À partir de la question précédente, établir l'inégalité de Paley-Zygmund

$$\mathbb{P}\big(X \geq t\,\mathbb{E}(X)\big) \;\geq\; (1-t)^2\,\frac{[\mathbb{E}(X)]^2}{\mathbb{E}(X^2)}\,.$$

c) Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$, proposer une minoration de $\mathbb{P}(X \geq \frac{tn}{2})$ pour $t \in]0,1[$.

Corrigé. a) La variable aléatoire $X \mathbb{1}_{\{X < t\,\mathbb{E}(X)\}}$ est majorée par (la variable constante) $t\,\mathbb{E}(X)$ (car si $X < t\,\mathbb{E}(X)$, elle est égale à X et donc majorée par $t\,\mathbb{E}(X)$, et sinon elle est nulle). Comme l'espérance conserve l'ordre,

$$\mathbb{E}\big(X \mathbb{1}_{\{X < t\,\mathbb{E}(X)\}}\big) \;\leq\; t\,\mathbb{E}(X).$$

D'après la relation de Chasles,

$$\mathbb{E}(X) \;=\; \mathbb{E}\big(X \mathbb{1}_{\{X < t\,\mathbb{E}(X)\}}\big) + \mathbb{E}\big(X \mathbb{1}_{\{X \geq t\,\mathbb{E}(X)\}}\big),$$

ce qui fournit l'inégalité demandée avec l'observation précédente. b) L'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz produit

$$\big[\mathbb{E}\big(X \mathbb{1}_{\{X \geq t\,\mathbb{E}(X)\}}\big)\big]^2 \;\leq\; \mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{P}\big(X \geq t\,\mathbb{E}(X)\big).$$

D'où l'inégalité de Paley-Zygmund demandée puisque le membre de droite, d'après a), est plus grand que $(1-t)^2\,[\mathbb{E}(X)]^2$. c) Si X est de loi $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$,

1. Raymond Paley, mathématicien anglais (1907–1933).
2. Antony Zygmund, mathématicien polonais et américain (1900–1992).

$\mathbb{E}(X) = \frac{n}{2}$ et $\mathbb{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + [\mathbb{E}(X)]^2 = \frac{n(n+1)}{4}$. L'application de l'inégalité de Paley-Zygmund fournit ainsi, pour $t \in]0,1[$,

$$\mathbb{P}\Big(X \geq \frac{tn}{2}\Big) \geq (1-t)^2 \, \frac{n}{n+1} \,.$$

Exercice 5. Vérifier l'inégalité

$$\mathbb{P}\big(-X \geq -\tfrac{n}{2} + s\big) \leq e^{-\frac{2}{n}s^2}$$

pour tout $s \geq 0$ du Paragraphe 4, où donc X est une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.

Exercice 6. Une variable aléatoire réelle X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$ de paramètre $\theta > 0$.

a) Déterminer le domaine de définition de la transformée de Laplace L_X de (la loi de) X, et la calculer.

b) Soit $t \geq 0$ fixé ; démontrer que pour tout $u \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq e^{-ut} \, L_X(u).$$

c) Déduire de la question précédente que pour tout $t > \theta$,

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq e^{-t\ln(t)+t(\ln(\theta)+1)-\theta}.$$

Corrigé. a) Par définition et intégration suivant la loi de Poisson,

$$L_X(u) = \mathbb{E}(e^{uX}) = \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} e^{un} e^{-\theta} \, \frac{\theta^n}{n!} = e^{\theta(e^u - 1)}$$

qui est finie pour tout $u \in \mathbb{R}$. Le domaine de définition de L_X est donc $\mathbb{R}$ tout entier, et sur ce domaine $L_X(u) = e^{\theta(e^u-1)}$. b) La croissance de la fonction exponentielle et l'inégalité de Markov montrent que, pour tous $t, u > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq t) \,=\, \mathbb{P}\big(e^{uX} \geq e^{ut}\big) \,\leq\, \frac{1}{e^{ut}}\,\mathbb{E}\big(e^{uX}\big).$$

L'inégalité reste vraie si $t = 0$ ou $u = 0$, ce qui est le résultat demandé. c) Les deux questions précédentes concluent donc que, pour $t \geq 0$ fixé,

$$\mathbb{P}(X \geq t) \,\leq\, e^{-ut+\theta(e^u-1)}$$

pour tout $u \geq 0$. L'idée est de choisir le meilleur $u \geq 0$ possible, en minimisant le membre de droite, c'est-à-dire l'expression $-ut + \theta(e^u - 1)$. Un calcul simple indique que si $t > \theta$, le meilleur choix est $u = \ln(\frac{t}{\theta})$.