

Leçon 12 Exercices corrigés

(Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.)

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ de paramètre $p \in]0, 1[$; si Q et R désignent respectivement le quotient et le reste de la division de X par un entier $k \geq 2$ fixé, démontrer que les variables aléatoires Q et R sont indépendantes et déterminer leurs lois. (*Indication* : étudier $\mathbb{P}(Q = \ell, R = r)$, $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $r \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, et rappeler l'unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne.)

Exercice 2 (*Fonction d'Euler*). Soit n un entier (≥ 2) et $p_1, \dots, p_k$ ses diviseurs premiers; poser, pour $\ell = 1, \dots, k$,

$$A_\ell = \{x \in \{1, \dots, n\}; x \text{ est multiple de } p_\ell\}.$$

L'ensemble $\{1, \dots, n\}$ étant muni de la probabilité uniforme P , montrer que les ensembles $A_1, \dots, A_k$ sont indépendants (pour P).

Soit $\varphi(n)$ le nombre d'entiers de $\{1, \dots, n\}$ premiers à n (fonction d'Euler); montrer que

$$\varphi(n) = n \prod_{\ell=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_\ell}\right).$$

Corrigé. Le nombre d'éléments de A_ℓ est $\frac{n}{p_\ell}$, de sorte que $P(A_\ell) = \frac{1}{p_\ell}$, $\ell = 1, \dots, k$. Si $1 \leq \ell_1, \dots, \ell_m \leq k$, $A_{\ell_1} \cap \dots \cap A_{\ell_m}$ est constitué des multiples de $p_{\ell_1}, \dots, p_{\ell_m}$, donc son cardinal est $\frac{n}{p_{\ell_1} \dots p_{\ell_m}}$. Ainsi

$$P(A_{\ell_1} \cap \dots \cap A_{\ell_m}) = P(A_{\ell_1}) \dots P(A_{\ell_m})$$

ce qui démontre l'indépendance annoncée. Les entiers de $\{1, \dots, n\}$ premiers à n sont décrits par l'ensemble $\bigcap_{\ell=1}^k A_\ell^c$. La formule d'Euler s'ensuit car les événements A_ℓ^c , $\ell = 1, \dots, k$, sont aussi indépendants.

Exercice 3 (*Loi zeta*). La loi zeta (aussi appelée loi de Zipf¹) μ_s de paramètre $s > 1$ est la mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$ définie par

$$\mu_s(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{n^s}, \quad n \in \mathbb{N},$$

où $\zeta(s) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^s}$.

a) Soit X une variable aléatoire de loi μ_s . Discuter de l'existence des moments $\mathbb{E}(X^r)$, $r > 0$, suivant les valeurs de s et r , et donner leur expression. Si elle existe, expliciter $\text{Var}(X)$.

b) Établir que

$$\zeta(s) \Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt$$

où $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$ est la fonction Gamma. (*Indication* : développer $\frac{a}{1-a}$ en série, $0 < a < 1$.)

c) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, démontrer que $\mu_s(p\mathbb{N}) = \frac{1}{p^s}$.

d) Soit p_k , $k \geq 1$, la suite des nombres premiers, et $A_k = p_k \mathbb{N}$. Démontrer que $\bigcap_{k \geq 1} A_k^c = \{1\}$, puis que

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_s \left(\bigcap_{k=1}^n A_k^c \right).$$

e) Démontrer que les ensembles A_k , $k \geq 1$, sont indépendants sous μ_s . En déduire une preuve probabiliste de l'*identité d'Euler*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{k \geq 1} \left(1 - \frac{1}{p_k^s} \right).$$

1. George Kingsley Zipf, linguiste, philologue et statisticien américain (1902–1950).

Corrigé. a) Comme μ_s est une mesure discrète,

$$\mathbb{E}(X^r) = \int_{\mathbb{N}} x^r d\mu_s = \sum_{n \in \mathbb{N}} n^r \mu_s(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^r}{n^s}.$$

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^{s-r}}$ est convergente si et seulement si $s - r > 1$, et dans ce cas vaut $\zeta(s - r)$. En conséquence, si $0 < r < s - 1$, $\mathbb{E}(X^r) = \frac{\zeta(s-r)}{\zeta(s)}$.

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \frac{\zeta(s-2)}{\zeta(s)} - \left[\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} \right]^2$$

si $s > 3$. b) En suivant l'indication, pour tout $t > 0$,

$$\frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{n \geq 1} e^{-nt}.$$

Donc, par le théorème de Fubini-Tonelli (en notation de Riemann),

$$\int_0^\infty t^{s-1} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt = \sum_{n \geq 1} \int_0^\infty t^{s-1} e^{-nt} dt.$$

Après le changement de variable de nt en t , il vient

$$\int_0^\infty t^{s-1} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$$

ce qui correspond au résultat demandé. c) Pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\mu_s(p\mathbb{N}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_s(\{pn\}) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{p^s n^s} = \frac{1}{p^s}.$$

d) Tout entier $n \geq 2$ est multiple d'un nombre premier; ainsi seul 1 peut appartenir à l'intersection des A_k^c , $k \geq 1$. Comme $\mu_s(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(s)}$, l'identité demandée découle de la monotonie d'une mesure (finie). e) Si $k_1, \dots, k_n \geq 1$

sont des entiers, dire qu'un entier appartient à $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ signifie qu'il est multiple de $p_{k_1} \cdots p_{k_n}$. En raisonnant comme dans la question c),

$$\mu_s(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \frac{1}{p_{k_1} \cdots p_{k_n}},$$

qui est donc égal à $\mu_s(A_1) \cdots \mu_s(A_n)$. Les ensembles A_k , $k \geq 1$, sont donc indépendants sous μ_s , et donc il en va de même des complémentaires A_k^c , $k \geq 1$. Il ne reste plus alors qu'à appliquer la question précédente puisque

$$\mu_s\left(\bigcap_{k=1}^n A_k^c\right) = \prod_{k=1}^n \mu_s(A_k^c) = \prod_{k=1}^n [1 - \mu_s(A_k)].$$

Exercice 4. Soit $\alpha > 0$, et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X suivant la loi uniforme $\mathcal{U}(0, \frac{1}{\alpha})$ sur l'intervalle $[0, \frac{1}{\alpha}]$ et Y la loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha)$ de paramètre $\alpha > 0$. Décrire la loi du couple (X, Y) , et calculer $\mathbb{P}(X \geq Y)$.

Corrigé. Comme X et Y sont indépendantes, la loi du couple (X, Y) est le produit des lois de X et Y , à savoir la mesure μ sur les boréliens de $\mathbb{R}^2$ de densité

$$\alpha \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{\alpha}]}(x) \alpha e^{-\alpha y} \mathbb{1}_{]0, \infty[}(y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi $\mathbb{P}(X \geq Y) = \mu(D)$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq y\}$ (en fait uniquement pour $x \in [0, \frac{1}{\alpha}]$ et $y \in]0, \infty[$ – faire un dessin). Par Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned} \mu(D) &= \alpha \int_{[0, \frac{1}{\alpha}]} \left(\int_{]0, x]} \alpha e^{-\alpha y} d\lambda(y) \right) d\lambda(x) \\ &= \alpha \int_{[0, \frac{1}{\alpha}]} (1 - e^{-\alpha x}) d\lambda(x) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Une façon plus intuitive de trouver ce résultat consiste à exprimer l'indépendance de X et Y sous la forme

$$\mathbb{P}(X \geq Y) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(x \geq Y) d\mathbb{P}_X(x).$$

Puisque $\mathbb{P}(x \geq Y) = 1 - e^{-\alpha x}$ pour $x \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq Y) = \alpha \int_{[0, \frac{1}{\alpha}]} (1 - e^{-\alpha x}) d\lambda(x)$$

comme précédemment.

Exercice 5. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soient X et Y des variables aléatoires indépendantes, X de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ de paramètre 1, et Y de loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ ($n \geq 1$). Démontrer que la loi de $Z = \frac{X}{1+Y}$ a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$ qui sera précisée. (*Indication* : décrire par exemple $\mathbb{E}(\phi(Z))$ pour $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne, positive ou bornée.) Calculer, si elle existe, l'espérance $\mathbb{E}(Z)$.

Corrigé. En décomposant suivant les valeurs discrètes de Y ,

$$\begin{aligned} E(\phi(Z)) &= \mathbb{E}\left(\phi\left(\frac{X}{1+Y}\right)\right) = \sum_{k=0}^n \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{Y=k\}} \left(\frac{X}{1+Y}\right)\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{Y=k\}} \left(\frac{X}{1+k}\right)\right). \end{aligned}$$

Puis, par indépendance de X et Y ,

$$\begin{aligned} E(\phi(Z)) &= \mathbb{E}\left(\phi\left(\frac{X}{1+Y}\right)\right) = \sum_{k=0}^n \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{Y=k\}}) \mathbb{E}\left(\left(\frac{X}{1+k}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathbb{E}\left(\phi\left(\frac{X}{1+k}\right)\right) \end{aligned}$$

comme $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{Y=k\}}) = \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}$. Puisque X est de loi $\mathcal{E}(1)$, pour tout $k = 0, 1, \dots, n$,

$$\mathbb{E}\left(\phi\left(\frac{X}{1+k}\right)\right) = \int_{]0,\infty[} \phi\left(\frac{x}{1+k}\right) e^{-x} d\lambda = (k+1) \int_{]0,\infty[} \phi(y) e^{-(k+1)y} d\lambda.$$

En résumé, et par échange de la somme et de l'intégrale,

$$E(\phi(Z)) = \int_{]0,\infty[} \phi(y) \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k+1) e^{-(k+1)y} d\lambda.$$

Cette identité, pour toute fonction borélienne ϕ , positive ou bornée, exprime que la loi de Z admet la fonction de densité

$$f(y) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k+1) e^{-(k+1)y}, \quad y \in]0, \infty[,$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0, \infty[$. L'espérance $\mathbb{E}(Z)$ peut se calculer avec la densité précédente et le théorème de transport. Il peut aussi être observé que, par indépendance, $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) \mathbb{E}\left(\frac{1}{1+Y}\right)$. Or $\mathbb{E}(X) = 1$ et, puisque Y est de loi $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$,

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+Y}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{1+k} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{(n+1)} \frac{1}{2^n} \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+1}{\ell}$$

après le glissement d'indice $\ell = k+1$. Il s'ensuit que

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{1+Y}\right) = \frac{1}{n+1} \left(2 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Exercice 6. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

a) En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, démontrer que pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}(X > tY) = \int_{]0, \infty[} e^{-ty} d\mathbb{P}_Y(y) = \mathbb{E}(e^{-tY}).$$

En déduire la fonction de répartition de la loi de la variable aléatoire $\frac{X}{Y}$, puis montrer que celle-ci admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

b) Retrouver le résultat de la question précédente en évaluant, pour toute fonction borélienne $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, positive ou bornée, l'espérance $\mathbb{E}(\phi(\frac{X}{Y}))$.

c) Déterminer la loi de $\frac{X}{X+Y}$.

d) Démontrer que $\frac{X}{X+Y}$ et $X+Y$ sont indépendantes.

Corrigé. Par indépendance, la loi du couple (X, Y) a pour densité $e^{-(x+y)}$, $(x, y) \in]0, \infty[^2$, par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda^2 = \lambda \otimes \lambda$ (sur $]0, \infty[^2$). Donc $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$ et $\mathbb{P}(X + Y = 0) = 0$, et les deux variables aléatoires $\frac{X}{Y}$ et $\frac{X}{X+Y}$ sont bien définies presque sûrement. a) Par le théorème de transport pour le couple (X, Y) et l'indépendance,

$$\mathbb{P}(X > tY) = \int_{]0, \infty[^2} \mathbb{1}_{\Delta_t} d\mathbb{P}_{(X,Y)} = \int_{]0, \infty[^2} \mathbb{1}_{\Delta_t} d\mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y$$

où $\Delta_t = \{(x, y) \in]0, \infty[^2; x > ty\}$. Puis, en vertu du théorème de Fubini-Tonelli,

$$\mathbb{P}(X > tY) = \int_{]0, \infty[} \left(\int_{]0, \infty[} \mathbb{1}_{]ty, \infty[} d\mathbb{P}_X \right) d\mathbb{P}_Y(y).$$

Mais $\int_{]0, \infty[} \mathbb{1}_{]ty, \infty[} d\mathbb{P}_X = \mathbb{P}(X > ty) = e^{-ty}$ puisque X est de loi $\mathcal{E}(1)$, de sorte que

$$\mathbb{P}(X > tY) = \int_{]0, \infty[} e^{-ty} d\mathbb{P}_Y(y) = \mathbb{E}(e^{-tY})$$

(la seconde égalité résultant du théorème de transport, pour la loi de Y cette fois). C'est le résultat annoncé. Le calcul précédent permet de déterminer la fonction de répartition de la loi de variable aléatoire (positive) $\frac{X}{Y}$: pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{X}{Y} \leq t\right) &= 1 - \mathbb{P}(X > tY) = 1 - \int_{]0, \infty[} e^{-ty} d\mathbb{P}_Y(y) \\ &= 1 - \int_{]0, \infty[} e^{-(1+t)y} d\lambda \\ &= 1 - \frac{1}{1+t}.\end{aligned}$$

La fonction de répartition est dérivable sur $]0, \infty[$, de dérivée $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$, qui représente donc la densité de la loi de $\frac{X}{Y}$ (par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0, \infty[$). b) L'objectif est ici de décrire la loi $\mathbb{P}_{\frac{X}{Y}}$ de $\frac{X}{Y}$ à travers l'espérance

$$\mathbb{E}\left(\phi\left(\frac{X}{Y}\right)\right) = \int_{\mathbb{R}} \phi d\mathbb{P}_{\frac{X}{Y}}$$

le long de toute fonction $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne, positive ou bornée. D'après le théorème de transport pour la loi du couple (X, Y) ,

$$\mathbb{E}\left(\phi\left(\frac{X}{Y}\right)\right) = \int_{]0, \infty[^2} \phi\left(\frac{x}{y}\right) e^{-(x+y)} d\lambda^2(x, y).$$

Il est possible (comme dans la question d) ci-dessous) d'utiliser un changement de variables bi-dimensionnel, mais ce premier exemple peut être analysé simplement avec le théorème de Fubini-Tonelli. En effet, pour tout $y \in]0, \infty[$ fixé, poser $u = \frac{x}{y}$ de sorte que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\phi\left(\frac{X}{Y}\right)\right) &= \int_{]0, \infty[} e^{-y} \left(\int_{]0, \infty[} \phi(u) y e^{-uy} d\lambda(u) \right) d\lambda(y) \\ &= \int_{]0, \infty[} \phi(u) \left(\int_{]0, \infty[} y e^{-(1+u)y} d\lambda(y) \right) d\lambda(u)\end{aligned}$$

par une nouvelle application du théorème de Fubini-Tonelli. Comme $\int_{]0,\infty[} y e^{-(1+u)y} d\lambda(y) = \frac{1}{(1+u)^2}$, il s'ensuit que

$$\mathbb{E}\left(\phi\left(\frac{X}{Y}\right)\right) = \int_{]0,\infty[} \phi(u) \frac{1}{(1+u)^2} d\lambda,$$

exprimant directement que la loi de $\frac{X}{Y}$ a pour densité $u \mapsto \frac{1}{(1+u)^2}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0, \infty[$. c) Il est clair que $\frac{X}{X+Y}$ est à valeurs presque sûres dans $]0, 1[$ et

$$\frac{X}{X+Y} = \frac{1}{1 + \frac{Y}{X}}.$$

Donc, si $t \in]0, 1[$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{X}{X+Y} \leq t\right) = \mathbb{P}\left(\frac{Y}{X} \geq \frac{1}{t} - 1\right).$$

En vertu de la question précédente (X et Y sont équidistribuées), par un calcul de primitive,

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y}{X} \geq \frac{1}{t} - 1\right) = \int_{[\frac{1}{t}-1, \infty[} \frac{1}{(1+u)^2} d\lambda(u) = \frac{1}{1 + (\frac{1}{t} - 1)} = t.$$

D'après la forme de la fonction de répartition, la loi de $\frac{X}{X+Y}$ est uniforme sur $]0, 1[$ (*un très beau résultat!*). d) Si $\phi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont boréliennes, positives ou bornées,

$$\mathbb{E}\left(\phi\left(\frac{X}{X+Y}\right)\psi(X+Y)\right) = \int_{]0,\infty[^2} \phi\left(\frac{x}{x+y}\right)\psi(x+y) e^{-(x+y)} d\lambda^2(x, y)$$

puisque la loi du couple (X, Y) a pour densité $e^{-(x+y)}$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ^2 sur $]0, \infty[^2$. Il est possible d'effectuer, avec le théorème de Fubini-Tonelli, des changements de variables uni-dimensionnels; toutefois, il est une bonne illustration de travailler en dimension 2. En effet, le changement de variables

$$h(x, y) = (u, v) = \left(\frac{x}{x+y}, x+y\right)$$

de $]0, \infty[^2$ dans $]0, 1[\times]0, \infty[$, de bijection réciproque $h^{-1}(u, v) = (x, y) = (uv, (1-u)v)$ et de jacobien $\det(J_h(x, y)) = -\frac{1}{x+y}$, fournit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\phi\left(\frac{X}{X+Y}\right)\psi(X+Y)\right) &= \int_{]0, \infty[^2} \phi\left(\frac{x}{x+y}\right)\psi(x+y) e^{-(x+y)}(x+y) \frac{1}{(x+y)} d\lambda^2(x, y) \\ &= \int_{]0, 1[\times]0, \infty[} \phi(u)\psi(v) e^{-v}v d\lambda^2(u, v) \\ &= \left(\int_{]0, 1[} \phi(u) d\lambda(u)\right) \left(\int_{]0, \infty[} \psi(v)ve^{-v}d\lambda(v)\right) \end{aligned}$$

après utilisation du théorème de Fubini-Tonelli. Choisir pour ψ la fonction constante égale à 1 permet de retrouver que la loi de $\frac{X}{X+Y}$ est uniforme sur $]0, 1[$. En choisissant pour ϕ la fonction constante égale à 1, il apparaît que la loi de $X+Y$ est une loi Gamma $\gamma(2, 1)$ (voir Exercice 8, Leçon 10 et Leçon 13). La loi du couple $(\frac{X}{X+Y}, X+Y)$ est le produit de la loi uniforme sur $]0, 1[$ et de cette loi Gamma. Les variables aléatoires $\frac{X}{X+Y}$ et $X+Y$ sont donc bien indépendantes.

Exercice 7 (*Développement de l'Exercice 4, Leçon 9*). Soit X_n une variable aléatoire de loi uniforme $\mathcal{U}(0, n)$ sur l'intervalle $[0, n]$, où n est un entier ≥ 1 .

a) Démontrer que $\mathbb{E}(X_n) = n \mathbb{E}(X_1)$ et $\text{Var}(X_n) = n^2 \text{Var}(X_1)$, et calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\text{Var}(X_1)$.

b) Quelle est la loi du couple $(\lfloor X_n \rfloor + 1, \lfloor X_n \rfloor + 1 - X_n)$?

c) Soit Y_n une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. Justifier que $\text{Var}(Y_n) = \text{Var}(X_n) - \text{Var}(X_1)$. En déduire la formule pour $\sum_{k=1}^n k^2$.

Indications. b) Pour calculer la loi du couple $(\lfloor X_n \rfloor + 1, \lfloor X_n \rfloor + 1 - X_n)$,

prendre $\phi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ boréliennes, positives ou bornées, et écrire

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(\phi(\lfloor X_n \rfloor + 1)\psi(\lfloor X_n \rfloor + 1 - X_n)\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \int_{\{X_n \in [k-1, k]\}} \phi(\lfloor X_n \rfloor + 1)\psi(\lfloor X_n \rfloor + 1 - X_n) d\mathbb{P} \\
&= \sum_{k=1}^n \int_{\{X_n \in [k-1, k]\}} \phi(k)\psi(k - X_n) d\mathbb{P} \\
&= \sum_{k=1}^n \phi(k) \frac{1}{n} \int_{[k-1, k[} \psi(k - x) d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \phi(k) \int_{[0, 1[} \psi(x) d\lambda(x)
\end{aligned}$$

où l'avant-dernière ligne résulte du fait, par transport, que la loi de X_n est uniforme sur $[0, n]$ et la dernière du changement de variable $x \rightarrow k - x$. En déduire que $\lfloor X_n \rfloor + 1$ et $\lfloor X_n \rfloor + 1 - X_n$ sont indépendantes, $\lfloor X_n \rfloor + 1$ de loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$ et $\lfloor X_n \rfloor + 1 - X_n$ de loi uniforme sur $[0, 1[$. c) Noter que $X_n = \lfloor X_n \rfloor + 1 - (\lfloor X_n \rfloor + 1 - X_n)$ et utiliser l'identité de Bienaymé pour les variables indépendantes, et donc non corrélées, $\lfloor X_n \rfloor + 1$ et $-(\lfloor X_n \rfloor + 1 - X_n)$.

Exercice 8. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes de loi zeta de paramètres respectifs $s > 1$ et $t > 1$, et soit $Z = \text{pgcd}(X, Y)$; démontrer que pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Z \in p\mathbb{N}) = \frac{1}{p^{s+t}}$. *En déduire que Z suit une loi zeta de paramètre $s + t$.

Exercice 9. Montrer par un calcul direct sur les probabilités que si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètre $p_1 \in]0, 1[$ et $p_2 \in]0, 1[$ respectivement, alors $\min(X_1, X_2)$ suit encore une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ dont on précisera le paramètre p . Qu'en est-il si X_1 et X_2 sont exponentielles de paramètre $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$? Le démontrer sans calcul grâce à l'Exercice 5, Leçon 8.

Corrigé. Si X_1 est géométrique $\mathcal{G}(p_1)$, pour tout entier $k (\geq 1)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 \geq k) &= \sum_{n \geq k} (1 - p_1)^{n-1} p_1 \\ &= (1 - p_1)^{k-1} \sum_{n \geq 0} (1 - p_1)^n p_1 = (1 - p_1)^{k-1}\end{aligned}$$

et de même pour X_2 de loi $\mathcal{G}(p_2)$. Cette description caractérise en fait les lois géométriques (puisque $\mathbb{P}(X_1 = k) = \mathbb{P}(X_1 \geq k) - \mathbb{P}(X_1 \geq k + 1)$). Mais alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, par indépendance,

$$\mathbb{P}(\min(X_1, X_2) \geq k) = \mathbb{P}(X_1 \geq k) \mathbb{P}(X_2 \geq k) = (1 - p_1)^{k-1} (1 - p_2)^{k-1}.$$

Il s'ensuit que $\min(X_1, X_2)$ est de loi géométrique de paramètre p tel que $1 - p = (1 - p_1)(1 - p_2)$. Le même raisonnement permet d'établir que si X_1 et X_2 sont de loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha_1)$ et $\mathcal{E}(\alpha_2)$, alors

$$\mathbb{P}(\min(X_1, X_2) > t) = e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t}$$

pour tout $t > 0$, résultat qui s'obtient donc aussi à travers le schéma de l'Exercice 5, Leçon 8 quand $p_1 = \frac{\alpha_1}{n}$, $p_2 = \frac{\alpha_2}{n}$, $k = \lfloor nt \rfloor$, et $n \rightarrow \infty$.

Exercice 10. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètres respectifs $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$.

a) Démontrer que $\mathbb{P}(X_1 = X_2) = 0$.

b) Poser $Z = \min(X_1, X_2)$ et $M = \operatorname{argmin}(X_1, X_2)$ (par définition $M = i$ signifie que $Z = X_i$). Démontrer que Z suit une loi exponentielle, et que

$$\mathbb{P}(M = 1) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad \mathbb{P}(M = 2) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

c) Calculer, pour $i = 1, 2$ et $t \geq 0$, $\mathbb{P}(M = i, Z > t)$.

d) Que peut-on dire des variables aléatoires M et Z ?

Corrigé. a) Par indépendance, la loi du couple (X_1, X_2) est le produit des lois marginales, donc a pour densité $f(x_1, x_2) = \alpha_1 \alpha_2 e^{-\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2} \mathbb{1}_{]0, \infty[^2}(x_1, x_2)$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}^2$. En notant D la diagonale de $\mathbb{R}^2$ (passant par $(0, 0)$),

$$\mathbb{P}(X_1 = X_2) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_D(X_1, X_2)) = \int_D f d\lambda = 0$$

car $\lambda(D) = 0$. b) Pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}(Z > t) = \mathbb{P}(\min(X_1, X_2) > t) = \mathbb{P}(X_1 > t) \mathbb{P}(X_2 > t)$$

par indépendance de X_1 et X_2 . Ainsi $\mathbb{P}(Z > t) = e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t}$, $t > 0$, et donc Z suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha_1 + \alpha_2)$ de paramètre $\alpha_1 + \alpha_2$ (voir aussi Exercice 9). De façon ensembliste, $\{M = 1\} = \{X_2 \geq X_1\}$. Comme dans l'Exercice 6,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_2 \geq X_1) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(X_2 \geq x_1) d\mathbb{P}_{X_1}(x_1) \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha_2 x_1} \alpha_1 e^{-\alpha_1 x_1} dx_1 \\ &= \alpha_1 \int_0^\infty e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)x_1} dx_1 \\ &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}. \end{aligned}$$

Le calcul est identique pour $\mathbb{P}(M = 2)$ en échangeant le rôle des indices. c) Soit $i = 1$. Comme $\{M = 1\} = \{X_2 \geq X_1\}$, $Z = X_1$ sur $\{M = 1\}$ ce qui est presque

sûrement sans ambiguïté d'après a). Ainsi $\mathbb{P}(M = 1, Z > t) = \mathbb{P}(X_2 > X_1 > t)$. Si $\Delta = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 > x_1 > t\}$, d'après le théorème de transport, puis le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_2 > X_1 > t) &= \mathbb{P}((X_1, X_2) \in \Delta) \\
&= \int_{\Delta} f \, d\lambda \\
&= \int_{]t, \infty[} \left(\int_{]x_1, \infty[} \alpha_1 \alpha_2 e^{-\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2} d\lambda(x_2) \right) d\lambda(x_1) \\
&= \int_{]t, \infty[} \alpha_1 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)x_1} d\lambda(x_1) \\
&= \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t}.
\end{aligned}$$

Avec le même raisonnement pour $i = 2$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M = 1, Z > t) &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t}, \\
\mathbb{P}(M = 2, Z > t) &= \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t}.
\end{aligned}$$

Ce résultat permet de retrouver les conclusions de la question b), les lois de M et Z se lisant directement sur ce qui précède : en effet, M est une variable aléatoire à valeurs (presque sûrement) dans $\{1, 2\}$ et les probabilités $\mathbb{P}(M = 1)$ et $\mathbb{P}(M = 2)$ s'obtiennent par le choix de $t = 0$; la variable aléatoire Z est à valeurs (presque sûrement) dans $]0, \infty[$ et, pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}(Z > t) = \mathbb{P}(M = 1, Z > t) + \mathbb{P}(M = 2, Z > t) = e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t}$$

de sorte que Z suit bien une loi exponentielle de paramètre $\alpha_1 + \alpha_2$. d) Les variables M et Z sont indépendantes puisque

$$\mathbb{P}(M = i, Z > t) = \mathbb{P}(M = i) \mathbb{P}(Z > t)$$

pour $i = 1, 2$ et tout $t > 0$.

Exercice 11. Si X est une variable aléatoire de carré intégrable, démontrer que

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{2} \mathbb{E}([X - Y]^2)$$

où Y est une variable aléatoire indépendante de X et de même loi.

Exercice 12* (*Variance de la loi de Gumbel*).

a) Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $]0, \infty[$, et si Y est indépendante de même loi que X , démontrer que la loi de $\ln(Z)$ où $Z = \frac{X}{Y}$ est symétrique (voir Exercice 5, Leçon 9).

b) En utilisant les conclusions de l'Exercice 5, Leçon 9, ainsi que l'Exercice 11, démontrer alors que si $\ln(X)$ est de carré intégrable,

$$\text{Var}(\ln(X)) = 2 \int_0^\infty t \mathbb{P}(\ln(Z) \geq t) dt.$$

Dans ce qui suit, X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

c) Rappeler pourquoi, d'après l'Exercice 6, $\mathbb{P}(Z \geq t) = \frac{1}{1+t}$ pour tout $t \geq 0$.

d) Dédurre des deux questions précédentes que

$$\text{Var}(\ln(X)) = \int_0^\infty \frac{2t}{1+e^t} dt = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{valeur admise}).$$

e) Démontrer que $-\ln(X)$ suit la loi de Gumbel, et donner la variance de cette loi.

Corrigé. a) Comme $\ln(Z) = \ln(X) - \ln(Y)$ et $\ln(X)$ et $\ln(Y)$ sont indépendantes de même loi, il est aisé de constater (par exemple sur la fonction caractéristique) que la loi de $-\ln(Z) = \ln(Y) - \ln(X)$ est la même que celle de $\ln(Z)$. b) Il suffit d'appliquer les conclusions de l'Exercice 5, Leçon 9, à la variable aléatoire $\ln(Z)$ de loi symétrique, et de faire usage de l'identité de l'Exercice 11. c) Il a été vu en Exercice 6 que la loi de $Z = \frac{X}{Y}$ a pour

densité $\frac{1}{(1+x)^2}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0, \infty[$. En particulier $\mathbb{P}(Z \geq t) = \int_t^\infty \frac{1}{(1+x)^2} dx = \frac{1}{1+t}$ pour $t \geq 0$. d) Cette question découle immédiatement des précédentes. e) Comme X est de loi $\mathcal{E}(1)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(-\ln(X) \leq t) = \mathbb{P}(X \geq e^{-t}) = e^{-e^{-t}}$$

qui est bien la fonction de répartition de la loi de Gumbel (Exercice 5, Leçon 7). La variance de $-\ln(X)$ est bien sûr la même que celle de $\ln(X)$, donc égale à $\frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 13. Vérifier l'identité $\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$ pour tous réels a, b .

Soient à présent deux variables aléatoires X et Y indépendantes de même loi intégrable ; poser $Z = \max(X, Y)$. Démontrer que

$$\mathbb{E}(Z) - \mathbb{E}(X) \geq \frac{1}{2} \mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|).$$

Indications. En utilisant l'identité sur les nombres réels et la linéarité de l'intégrale,

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) + \frac{1}{2} \mathbb{E}(|X - Y|)$$

(puisque X et Y ont même loi). Par le théorème de transport et l'indépendance de X et Y ,

$$\mathbb{E}(|X - Y|) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |x - y| d\mathbb{P}_X(x) d\mathbb{P}_Y(y).$$

Le théorème de Fubini-Tonelli et l'inégalité triangulaire permettent alors de minorer cette expression en faisant entrer l'intégrale en $d\mathbb{P}_Y(y)$ sous les valeurs absolues.

Exercice 14. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soient X et N deux variables aléatoires indépendantes, X suivant la loi uniforme $\mathcal{U}(-1, +1)$ sur $[-1, +1]$ et N la loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$ de paramètre $\theta > 0$. Calculer $\mathbb{E}(X^N)$, et essayer d'en donner une valeur exacte quand $\theta = 1$.

Corrigé. La variable X suivant la loi uniforme $\mathcal{U}(-1, +1)$, il s'ensuit que $|X| \leq 1$ presque sûrement, et donc $|X^N| \leq 1$ également. Ainsi X^N est intégrable. Ensuite, décomposer l'espace Ω suivant le système complet d'événements $\{N = k\}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pour obtenir

$$\mathbb{E}(X^N) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(X^k \mathbb{1}_{\{N=k\}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(X^k) \mathbb{P}(N = k)$$

où la dernière égalité résulte de l'indépendance entre X et N . D'après le théorème de transport,

$$\mathbb{E}(X^k) = \frac{1}{2} \int_{[-1, +1]} x^k d\lambda,$$

et cette expression est égale à 0 si $k = 2j + 1$ est impair et, par intégration, à $\frac{1}{2j+1}$ si $k = 2j$ est pair. Ainsi

$$\mathbb{E}(X^N) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j+1} e^{-\theta} \frac{\theta^{2j+1}}{(2j)!}.$$

Si $\theta = 1$, il est possible d'aller un peu plus loin et de déterminer la valeur de $\mathbb{E}(X^N) = \frac{1}{e} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, poser $\varphi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$ et observer que $\varphi'' = \varphi$. Par résolution des équations différentielles linéaires du second ordre, la solution est de la forme $\varphi(x) = ae^x + be^{-x}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Les conditions initiales expriment que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 1$. Ainsi $a = -b = \frac{1}{2}$ et

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!} = \varphi(1) = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right).$$

En conclusion, $\mathbb{E}(X^N) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e^2} \right)$ si $\theta = 1$.

Exercice 15 (*Temps d'atteinte.*) Soit X_n , $n \in \mathbb{N}$, une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ de paramètre $p \in]0, 1[$ à valeurs dans $\{0, 1\}$; poser $T = \inf\{n \geq 1; X_n = 1\}$ avec $\inf \emptyset = \infty$.

- a) Montrer que $T < \infty$ presque sûrement et calculer $\mathbb{P}(T = n)$ pour tout $n \geq 1$.
- b) Calculer $\mathbb{E}(T)$ et $\text{Var}(T)$.
- c) Définir la variable aléatoire X_T et donner sa loi.
- d) Démontrer que les variables aléatoires $Y_k = X_{T+k}$, $k \geq 1$, sont indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p .

Corrigé. a) $\mathbb{P}(T = \infty) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} \{X_n = 0\}\right)$. Or, pour tout $N \geq 1$, par indépendance,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^N \{X_n = 0\}\right) = \prod_{n=1}^N (1-p) = (1-p)^N$$

qui tend vers 0 quand $N \rightarrow \infty$. Ainsi $\mathbb{P}(T = \infty) = 0$. L'événement $\{T = n\}$ signifie que $X_n = 1$ et $X_k = 0$ pour tout $k \leq n-1$. Ainsi, par indépendance des variables X_k ,

$$\mathbb{P}(T = n) = p(1-p)^{n-1}.$$

Donc T suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ sur $\mathbb{N}$ (cette illustration fondamentale en justifie la forme). b) $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{p}$, $\text{Var}(T) = \frac{1-p}{p^2}$. c) La variable aléatoire X_T est à entendre comme une composition $X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$, $\omega \in \Omega$. (Exemple : au casino, il peut être prudent de décider au préalable de partir à $T = 23$ h; la variable aléatoire (gain ou perte) est alors simplement X_{23} . Mais si le joueur préfère partir au moment (aléatoire) T où il aura gagné – ou perdu ! – 100 €, alors il s'agit de X_T .) La variable X_T est à valeurs dans $\{0, 1\}$; une décomposition suivant les atomes $\{T = n\}$, $n \geq 1$, indique que

$$\mathbb{P}(X_T = 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = 1, T = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T = n) = 1$$

(car $\{T = n\} \subset \{X_n = 1\}$). Ainsi X_T est constante égale à 1 (presque sûrement). d) Soient $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_\ell$ des entiers fixés, et soit $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell\}$ une famille de 0 et de 1, également fixée. Par définition et décomposition en le système complet d'événements $\{T = n\}$, $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_{k_1} = \varepsilon_1, \dots, Y_{k_\ell} = \varepsilon_\ell) &= \mathbb{P}(X_{T+k_1} = \varepsilon_1, \dots, X_{T+k_\ell} = \varepsilon_\ell) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_{n+k_1} = \varepsilon_1, \dots, X_{n+k_\ell} = \varepsilon_\ell, T = n). \end{aligned}$$

L'événement $\{T = n\}$ est mesurable par rapport aux variables $X_1, \dots, X_n$, et donc indépendant des $X_{n+k_1}, \dots, X_{n+k_\ell}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+k_1} = \varepsilon_1, \dots, X_{n+k_\ell} = \varepsilon_\ell, T = n) \\ = \mathbb{P}(X_{n+k_1} = \varepsilon_1, \dots, X_{n+k_\ell} = \varepsilon_\ell) \mathbb{P}(T = n). \end{aligned}$$

Pour chaque $n \geq 1$, les variables $X_{n+k_1}, \dots, X_{n+k_\ell}$ sont indépendantes de même loi que les X_j , $j \geq 1$, ainsi

$$\mathbb{P}(X_{n+k_1} = \varepsilon_1, \dots, X_{n+k_\ell} = \varepsilon_\ell) = \mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1) \cdots \mathbb{P}(X_\ell = \varepsilon_\ell)$$

En sommant sur $n \geq 1$, et en rassemblant toutes les égalités,

$$\mathbb{P}(Y_{k_1} = \varepsilon_1, \dots, Y_{k_\ell} = \varepsilon_\ell) = \mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1) \cdots \mathbb{P}(X_\ell = \varepsilon_\ell)$$

ce qui démontre l'assertion demandée.