Leçon 13 Exercices corrigés

(*Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.*)

Exercice 1. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ sur $\{0,1\}$ de paramètre $p \in]0,1[$, et soit N une variable aléatoire, indépendante des X_k, $k \geq 1$, de loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$ de paramètre $\theta > 0$.

a) Calculer les fonctions génératrices des moments de X_1 et N.

b) Déterminer la loi de la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{N} X_k$ (avec la convention $\sum_{k=1}^{0} = 0$).

Corrigé. a) Pour tout $s > 0$,

$$G_{X_1}(s) = \mathbb{E}(s^{X_1}) = ps^1 + (1-p)s^0 = 1 + p(s-1)$$

et

$$G_N(s) = \mathbb{E}(s^N) = e^{-\theta} \sum_{n=0}^{\infty} s^n \frac{\theta^n}{n!} = e^{\theta(s-1)}.$$

b) Avec l'outil de la fonction génératrice, pour $s > 0$, par indépendance entre N et les X_k, $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(s^{\sum_{k=1}^{N} X_k}\big) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\{N=n\}}\, s^{\sum_{k=1}^{n} X_k}\big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=n)\, \mathbb{E}\big(s^{\sum_{k=1}^{n} X_k}\big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=n) \big[1 + p(s-1)\big]^n \\
&= e^{-\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} \big[1 + p(s-1)\big]^n \\
&= e^{p\theta(s-1)}.
\end{aligned}$$

En conséquence, la fonction génératrice caractérisant la loi dans ce cas, $\sum_{k=1}^{N} X_k$ est de loi de Poisson $\mathcal{P}(p\theta)$ de paramètre $p\theta$.

Exercice 2 (*Identité de Wald*[1]). Soit X_n, $n \in \mathbb{N}$, une suite de variables aléatoires de même loi intégrable, et soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ intégrable, et indépendante de la suite X_n, $n \in \mathbb{N}$. Établir l'identité

$$\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_N) \;=\; \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(X_1).$$

Indication. La variable aléatoire X_N doit être entendue comme une composition $X_N(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$. Comme dans l'exercice précédent, utiliser le système complet d'événements $\{N = n\}$, $n \in \mathbb{N}$, et l'indépendance de N et des X_n, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ à valeurs dans $\{0,1\}$ de paramètre de succès $p \in]0,1[$; soit la fréquence $F_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$, $n \geq 1$ (qui comptabilise la proportion de succès sur n tirages).

a) Calculer l'espérance et la variance de F_n.

b) On suppose que $p = \frac{1}{4}$. Démontrer que $\mathbb{P}\big(F_{100\,000} \in \big[\frac{24}{100}, \frac{26}{100}\big]\big) \geq \frac{95}{100}$.

Corrigé. a) La loi de $X_1 + \cdots + X_n$ est binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, donc de moyenne np et de variance $np(1-p)$. Par homogénéité, il s'ensuit que $\mathbb{E}(F_n) = p$ et $\mathrm{Var}(F_n) = \frac{p(1-p)}{n}$. b) D'après l'inégalité de Tchebychev, et les expressions pour l'espérance et la variance de F_n, pour tout $n \geq 1$ et tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}\big(|F_n - p| \geq t\big) \;\leq\; \frac{p(1-p)}{t^2\, n}\,.$$

Par passage au complémentaire,

$$\mathbb{P}\big(F_n \in \,]\, p - t, p + t\,[\,\big) \;\geq\; 1 - \frac{p(1-p)}{t^2\, n}\,.$$

1. Abraham Wald, mathématicien américain d'origine hongroise (1902–1950).

Pour $n = 100\,000$, $p = \frac{1}{4}$ et $t = \frac{1}{100}$, $\frac{p(1-p)}{t^2\, n} \leq \frac{5}{100}$, ce qui fournit la conclusion.

Exercice 4 (*Loi triangulaire*). Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit X une variable aléatoire de loi (dite triangulaire sur $[0,2]$) de densité

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty, 0[, \\ x & \text{si} \quad x \in [0,1], \\ 2-x & \text{si} \quad x \in]1,2], \\ 0 & \text{si} \quad x \in]2, +\infty[, \end{cases}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur les boréliens de $\mathbb{R}$.

a) Décrire et tracer la fonction de répartition F_X de la loi de X.

b) Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\big(X^n\big) \;=\; \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left[2^{n+2} - 2\right].$$

Soient à présent U et V deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme $\mathcal{U}(0,1)$ sur $[0,1]$. Calculer $\mathbb{E}(U^n)$ pour tout entier n.

c) Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\big((U+V)^n\big) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!(n-k+1)!}\,.$$

d) Vérifier que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!(n-k+1)!} \;=\; \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+2}{\ell}$$

et en déduire une expression de $\mathbb{E}((U+V)^n)$.

e) Invoquer un théorème pour affirmer que $U+V$ a même loi que X.

Corrigé. a) La fonction de répartition F_X est donnée par

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \in]-\infty, 0[, \\ \frac{t^2}{2} & \text{si} \quad t \in [0,1], \\ 2t - \frac{t^2}{2} - 1 & \text{si} \quad t \in]1,2], \\ 1 & \text{si} \quad x \in]2, +\infty[. \end{cases}$$

b) D'après le théorème de transport,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^n) &= \int_{[0,2]} x^n f(x) d\lambda(x) \\ &= \int_0^1 x^{n+1} dx + \int_1^2 x^n (2-x) dx \\ &= \frac{1}{n+2} + \frac{2}{n+1} \left(2^{n+1} - 1\right) - \frac{1}{n+2} \left(2^{n+2} - 1\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left[2^{n+2} - 2\right]. \end{aligned}$$

c) La variable aléatoire $U + V$ est presque sûrement à valeurs dans $[0,2]$, et donc intégrable à tous les ordres. D'après la formule du binôme et la linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}\big((U+V)^n\big) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbb{E}\big(U^k V^{n-k}\big).$$

Par indépendance de U et V, pour tout $k = 0, 1, \ldots, n$,

$$\mathbb{E}\big(U^k V^{n-k}\big) = \mathbb{E}(U^k)\,\mathbb{E}(V^{n-k}) = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{n-k+1}$$

puisque $\mathbb{E}(U^\ell) = \int_{[0,1]} x^\ell d\lambda = \frac{1}{\ell+1}$ pour tout entier ℓ. La formule demandée s'ensuit par définition du coefficient binomial $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. d) Par le glissement d'indice $\ell = k+1$, il vient

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!(n-k+1)!} = \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{n!}{\ell!(n+2-\ell)!}$$
$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{(n+2)!}{\ell!(n+2-\ell)!}$$

ce qui fournit la première conclusion. Toujours par la formule du binôme,

$$\sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+2}{\ell} = \sum_{\ell=0}^{n+2} \binom{n+2}{\ell} - 2 = 2^{n+2} - 2.$$

Ainsi $\mathbb{E}((U+V)^n) = \frac{1}{(n+1)(n+2)}[2^{n+2}-2]$. e) Les questions précédentes indiquent que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}((U+V)^n) = \mathbb{E}(X^n)$. Les variables aléatoires $U+V$ et X étant à support dans $[0,2]$ (intervalle fermé borné), le *théorème des moments (de Hausdorff)*, Théorème 7, Leçon 10, permet d'affirmer que $U+V$ et X ont la même loi. Donc $U+V$ suit la loi triangulaire sur $[0,2]$.

Exercice 5*. Sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme $\mathcal{U}(-1,+1)$ sur $[-1,+1]$.

a) Démontrer que $X+Y$ a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue que l'on calculera.

b) Calculer la transformée de Fourier de la loi X. En déduire celle de $X+Y$.

c) En utilisant le théorème d'inversion de Fourier, démontrer que

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}.$$

Corrigé. a) Cette question peut se déduire de l'Exercice 4. Voici une démonstration directe. La loi de $X+Y$ est décrite, pour toute fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

borélienne, positive ou bornée, par

$$\mathbb{E}\big(\phi(X+Y)\big) \;=\; \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x+y)d\,\mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y(x,y).$$

Or $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ ont pour densité $\frac{1}{2}\,\mathbb{1}_{[-1,+1]}$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$ de sorte que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(\phi(X+Y)\big) \;&=\; \frac{1}{4}\int_{[-1,+1]^2} \phi(x+y)d\lambda^2(x,y)\\ &=\; \frac{1}{4}\int_{[-1,+1]} \bigg(\int_{[-1,+1]} \phi(x+y)d\lambda(y)\bigg)d\lambda(x),\end{aligned}$$

la dernière égalité résultant du théorème de Fubini-Tonelli. À x fixé, le changement de variable $x+y=v$ fournit

$$\int_{[-1,+1]} \phi(x+y)d\lambda(y) \;=\; \int_{[-1+x,+1+x]} \phi(v)d\lambda(v).$$

Par une nouvelle application du théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(\phi(X+Y)\big) \;&=\; \frac{1}{4}\int_{[-2,+2]} \phi(v)\bigg(\int_{[-1,+1]} \mathbb{1}_{[-1+x,+1+x]}(v)d\lambda(x)\bigg)d\lambda(v)\\ &=\; \frac{1}{4}\int_{[-2,+2]} \phi(v)\bigg(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[\max(v-1,-1),\min(v+1,1)]}(x)d\lambda(x)\bigg)d\lambda(v).\end{aligned}$$

Une étude de cas indique que, pour tout $v \in [-2,+2]$,

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[\max(v-1,-1),\min(v+1,1)]}(x)d\lambda(x) \;=\; 2-|v|.$$

En conclusion, la loi de $X+Y$ a pour densité $\frac{1}{4}(2-|v|)\mathbb{1}_{[-2,+2]}(v)$, $v \in \mathbb{R}$, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ (il s'agit donc de la loi triangulaire sur l'intervalle $[-2,+2]$). b) La fonction caractéristique de la loi de X s'obtient par transport, puis calcul de primitive, comme

$$\varphi_X(u) \;=\; \mathbb{E}(e^{iuX}) \;=\; \frac{1}{2}\int_{[-1,+1]} e^{iux}d\lambda \;=\; \frac{1}{2iu}\,(e^{iu}-e^{-iu}) \;=\; \frac{\sin(u)}{u}$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$. Par indépendance et équidistribution,

$$\varphi_{X+Y}(u) \;=\; \big(\varphi_X(u)\big)^2 \;=\; \left(\frac{\sin(u)}{u}\right)^2, \quad u \in \mathbb{R}.$$

c) Le théorème d'inversion de Fourier exprime que si la fonction caractéristique $\varphi_{X+Y}(u)$, $u \in \mathbb{R}$, est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue (en la variable $u \in \mathbb{R}$), la loi de $X+Y$ admet une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue donnée par

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-iux}\varphi_{X+Y}(u)d\lambda(u), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dans l'exemple en question, l'intégrabilité de φ_{X+Y} se justifie aisément quand $u \to \pm\infty$ et utilise l'équivalent $\sin(u) \sim u$ quand $u \to 0$. Or la loi de $X+Y$ a une densité connue, calculée plus haut. Il ne reste plus qu'à comparer les deux expressions, et en la valeur $x = v = 0$, il vient

$$f(0) \;=\; \frac{1}{2} \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(u)}{u}\right)^2 d\lambda.$$

Par parité, et le passage à une intégrale (impropre) de Riemann, le résultat annoncé s'ensuit.

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$, dont la loi a pour fonction caractéristique φ_X ; rappeler que $\mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi_X(\theta)d\theta$ (Exercice 11, Leçon 10).

Soit à présent une suite X_k, $k \geq 1$, de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathbb{P}(X_k = +1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}$, et, pour tout $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

a) Démontrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos^{2n}(\theta)d\theta.$$

b) Déduire de la question précédente la divergence de la série de terme général $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$.

c) Montrer de façon probabiliste que

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \;=\; \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}, \quad n \geq 1,$$

et démontrer que $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ avec la formule de Stirling. (*Indication* : faire une transformation pour se ramener à une loi binomiale.)

Corrigé. a) La fonction caractéristique de X_1 est

$$\mathbb{E}(e^{iuX_1}) \;=\; \frac{1}{2}\,(e^{iu} + e^{-iu}) \;=\; \cos(u), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Ainsi la fonction caractéristique de S_{2n} est donnée par $\varphi_{S_{2n}}(u) = \cos^{2n}(u)$, $u \in \mathbb{R}$. Il ne reste plus qu'à appliquer la conclusion de l'Exercice 11, Leçon 10. b) En vertu de l'identité établie en a),

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(S_{2n} = 0) \;=\; \lim_{N \to \infty} \int_{-\pi}^{+\pi} f_N(\theta) d\theta$$

où $f_N(\theta) = \sum_{n=1}^{N} \cos^{2n}(\theta)$. Par le théorème de convergence monotone, et le fait que $\sum_{n=1}^{\infty} \cos^{2n}(\theta) = \frac{\cos^2(\theta)}{1-\cos^2(\theta)}$ pour tout θ,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(S_{2n} = 0) \;=\; \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos^2(\theta)}{1 - \cos^2(\theta)}\, d\theta,$$

intégrale divergente puisque l'intégrand est d'ordre $\frac{1}{\theta^2}$ quand $\theta \to 0$. c) Les variables aléatoires $Y_k = \frac{1}{2}(X_k + 1)$, $k = 1, \ldots, 2n$, sont indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$ sur $\{0, 1\}$. Donc $\sum_{k=1}^{2n} Y_k = \frac{1}{2}\, S_{2n} + n$ est de loi binomiale $\mathcal{B}(2n, \frac{1}{2})$. Ainsi

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \;=\; \mathbb{P}\bigg(\sum_{k=1}^{2n} Y_k = n \bigg)$$

et la formule souhaitée découle de la définition des probabilités binomiales. En vertu de la formule de Stirling (voir e.g. Exercice 13, Leçon 3),

$$\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}\,n!^2} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}\,e^{-2n}(2n)^{2n}}{2^{2n}(2\pi n)e^{-2n}n^{2n}}$$

qui conduit aisément à l'équivalent demandé.

Exercice 7* (*Loi indéfiniment divisible*). Soit X une variable aléatoire réelle de loi μ ; on dit que μ est indéfiniment divisible si pour tout entier $n \geq 1$ il existe des variables aléatoires réelles $X_{1,n}, \ldots, X_{n,n}$ indépendantes de même loi ν_n telles que la loi de la somme $X_{1,n} + \cdots + X_{n,n}$ soit μ.

a) Démontrer qu'une loi μ est indéfiniment divisible si et seulement si sa fonction caractéristique φ est, pour tout entier n, la puissance n-ième d'une fonction caractéristique.

b) μ est-elle indéfiniment divisible dans les cas suivants : i) $\mu = \delta_a$, $a \in \mathbb{R}$; ii) μ est la loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ de moyenne m et de variance σ^2 ; iii) μ est la loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$ de paramètre $\theta > 0$; iv) μ est la loi de Cauchy (la fonction caractéristique d'une loi de Cauchy est donnée par $\mathrm{e}^{-|u|}$, $u \in \mathbb{R}$) ?

c) Soit X de loi μ de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ sur $\{0, 1\}$ de paramètre $p \in]0, 1[$; l'objet de la question est de démontrer que μ n'est pas indéfiniment divisible. À cet effet, considérer au contraire l'existence de variables aléatoires indépendantes Y et Z de loi commune ν telles que la somme $Y + Z$ soit de loi μ. Si B est un intervalle ne contenant pas 0 et $\frac{1}{2}$, démontrer que

$$\mathbb{P}(Y + Z \in B + B) = 0$$

où $B + B = \{x + y\,; x \in B, y \in B\}$, et en déduire que $\mathbb{P}(Y \in B)\,\mathbb{P}(Z \in B) = 0$. En tirer que Y ne peut prendre que les valeurs 0 et $\frac{1}{2}$, puis conclure à une impossibilité.

Corrigé. a) S'il existe $X_{1,n},\dots,X_{n,n}$ indépendantes de même loi ν_n telles que la somme $X_{1,n}+\cdots+X_{n,n}$ ait même loi que X, alors, pour tout $u\in\mathbb{R}$,

$$\varphi(u) \,=\, \mathbb{E}(e^{iuX}) \,=\, \mathbb{E}(e^{iu(X_{1,n}+\cdots+X_{n,n})}).$$

Comme les $X_{k,n}$, $k=1,\dots,n$, sont indépendantes de même loi ν_n, en désignant par φ_{ν_n} la fonction caractéristique de ν_n,

$$\varphi(u) \,=\, \big(\mathbb{E}(e^{iuX_{1,n}})\big)^n \,=\, \big(\varphi_{\nu_n}(u)\big)^n$$

ce qui est demandé. Réciproquement, si $\varphi(u)=(\varphi_{\nu_n}(u))^n$, $u\in\mathbb{R}$, en choisissant $X_{1,n},\dots,X_{n,n}$ indépendantes de même loi ν_n, les égalités précédentes montrent que φ est égale à la fonction caractéristique de $X_{1,n}+\cdots+X_{n,n}$. La fonction caractéristique déterminant la loi, la conclusion s'ensuit. a) i) Prendre $X_{1,n}=\cdots=X_{n,n}=\frac{a}{n}$ presque sûrement, de sorte que $X_{1,n}+\cdots+X_{n,n}=a$ qui, en tant que variable presque sûrement constante égale à a, a pour loi $\mu=\delta_a$ ($\nu_n=\delta_{\frac{a}{n}}$). Sinon, utiliser les fonctions caractéristiques et la question 1) ($\varphi_{\nu_n}(u)=e^{iu\frac{a}{n}}$, $u\in\mathbb{R}$). ii) Prendre ν_n loi normale de moyenne $\frac{m}{n}$ et de variance $\frac{\sigma^2}{n}$. Alors, par indépendance et équidistribution, $X_{1,n}+\cdots+X_{n,n}$ est une variable gaussienne de moyenne la somme des moyennes, donc m, et de variance la somme des variances, donc σ^2. Sinon, utiliser les fonctions caractéristiques et la question 1) ($\varphi_{\nu_n}(u)=e^{iu\frac{m}{n}-\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}u^2}$, $u\in\mathbb{R}$). iii) Prendre ν_n de loi de Poisson $\mathcal{P}(\frac{\theta}{n})$ de paramètre $\frac{\theta}{n}$. Alors, par indépendance et équidistribution, $X_{1,n}+\cdots+X_{n,n}$ est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre la somme des paramètres, à savoir θ. Sinon, utiliser les fonctions caractéristiques et la question 1) ($\varphi_{\nu_n}(u)=e^{\frac{\theta}{n}(e^{iu}-1)}$, $u\in\mathbb{R}$). iv) Prendre simplement pour ν_n la loi de $\frac{X}{n}$. En effet, la fonction caractéristique est alors $\varphi_{\nu_n}(u)=\mathbb{E}(e^{iu\frac{X}{n}})=e^{-\frac{|u|}{n}}$, $u\in\mathbb{R}$, ce qui fournit la conclusion par 1). c) Par définition de $B+B$, si B est un intervalle ne contenant ni 0 ni $\frac{1}{2}$,

soit $B\subset\,]-\infty,0[$, et alors $B+B\subset\,]-\infty,0[\,$;

soit $B\subset\,]0,\frac{1}{2}[$, et alors $B+B\subset\,]0,1[\,$;

soit $B \subset]\frac{1}{2}, \infty[$, et alors $B + B \subset]1, \infty[$.

Comme X ne prend (presque sûrement) que les valeurs 0 et 1, et que $Y + Z$ a même loi que X, dans tous les cas $\mathbb{P}(Y + Z \in B + B) = 0$. Comme Y et Z sont indépendantes,

$$0 \le \mathbb{P}(Y \in B)\,\mathbb{P}(Z \in B) = \mathbb{P}(Y \in B, Z \in B) \le \mathbb{P}(Y + Z \in B + B) = 0$$

pour B un intervalle ne contenant pas 0 et $\frac{1}{2}$. En particulier $\mathbb{P}(Y \in B) = \nu(B) = 0$. Ainsi

$$\nu\big(\{0, \tfrac{1}{2}\}^c\big) = \nu\big(]-\infty, 0[\big) + \nu\big(]0, \tfrac{1}{2}[\big) + \nu\big(]\tfrac{1}{2}, \infty[\big) = 0.$$

Donc la mesure de probabilité ν ne charge que les points 0 et $\frac{1}{2}$. Elle est donc de la forme $\nu = a\delta_0 + (1-a)\delta_{\frac{1}{2}}$ pour un $a \in [0, 1]$. Il reste à montrer que la loi de $Y + Z$ ne peut être la loi μ de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Or $Y + Z$ est à valeurs dans $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ avec les probabilités

$$\mathbb{P}(Y + Z = 0) = \mathbb{P}(Y = 0, Z = 0) = \mathbb{P}(Y = 0)\,\mathbb{P}(Z = 0) = a^2,$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y + Z = \tfrac{1}{2}) &= \mathbb{P}(Y = \tfrac{1}{2}, Z = 0) + \mathbb{P}(Y = 0, Z = \tfrac{1}{2}) \\ &= \mathbb{P}(Y = \tfrac{1}{2})\,\mathbb{P}(Z = 0) + \mathbb{P}(Y = 0)\,\mathbb{P}(Z = \tfrac{1}{2}) \\ &= 2a(1-a),\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(Y + Z = 1) = \mathbb{P}(Y = \tfrac{1}{2}, Z = \tfrac{1}{2}) = \mathbb{P}(Y = \tfrac{1}{2})\,\mathbb{P}(Z = \tfrac{1}{2}) = (1-a)^2.$$

Si ceci décrivait la loi de Bernoulli de paramètre p sur $\{0, 1\}$, il faudrait que $2a(1-a) = 0$, soit $a = 0$ ou $a = 1$. Comme par hypothèse $0 < p < 1$, c'est impossible.

Exercice 8 (*Processus de Galton*[2]*-Watson*[3]). Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{0\}$; une population est modélisée par une famille $X_{k,n}$, $k, n \in \mathbb{N}$, de variables aléatoires indépendantes de même loi que X, la variable aléatoire $X_{k,n}$ représentant le nombre de descendants d'un individu k à la n-ième génération. En partant d'un individu $Z_0 = 1$, soit Z_n, $n \in \mathbb{N}$, la suite de variables aléatoires représentant le nombre d'individus de la population à la génération n définie à travers la relation de récurrence

$$Z_n = \sum_{k=1}^{Z_{n-1}} X_{k,n}\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Par convention $\sum_{k=1}^{0} = 0$, de sorte que $\{Z_{n-1} = 0\} \subset \{Z_n = 0\}$, $n \in \mathbb{N}$. L'objectif de l'exercice est d'étudier la probabilité d'extinction

$$\mathbb{P}\bigg(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{Z_n = 0\} \bigg) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(Z_n = 0)$$

(comme réunion croissante d'événements). Il peut être supposé dans la suite que $\mathbb{P}(X = 0) \in]0, 1[$ car si $\mathbb{P}(X = 0) = 1$, alors $Z_n = 0$ presque sûrement et la probabilité d'extinction est égale à 1, et si $\mathbb{P}(X = 0) = 0$, alors $Z_n \geq 1$ presque sûrement et la probabilité d'extinction est nulle.

a) Si $G = G_X$ désigne la fonction génératrice de la loi de X, et $G_n = G_{Z_n}$ celle de Z_n, $n \in \mathbb{N}$, démontrer que $G_n = G_{n-1} \circ G$.

b) Si $u_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$, $n \in \mathbb{N}$, déduire de la question précédente que $u_n = G(u_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$.

c) Démontrer que la suite u_n, $n \in \mathbb{N}$, est convergente, et que $u_n \leq G(s)$, $n \in \mathbb{N}$, pour tout point fixe s de G ($G(s) = s$).

d*) Il est supposé ici que X ne prend que trois valeurs, $0, 1, 2$, avec une probabilité strictement positive de prendre la valeur 2. Analyser la fonction généra-

2. Francis Galton, anthropologue, explorateur, géographe, inventeur, météorologue, écrivain, proto-généticien, psychométricien et statisticien britannique (1822–1911).

3. Henry William Watson, mathématicien anglais (1827–1903).

trice G dans ce cas pour en déduire que si $\mathbb{E}(X) \leq 1$, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$, alors que si $\mathbb{E}(X) > 1$, la limite $\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$ est l'unique point fixe de G sur $]0,1[$.

Corrigé. a) Par définition, si $s \geq 0$,

$$G(s) = \mathbb{E}\big(s^X\big), \quad G_n(s) = \mathbb{E}\big(s^{Z_n}\big)$$

(éventuellement infinis). Par construction, Z_{n-1} ($n \geq 1$) est indépendante des variables aléatoires $X_{k,n}$, $k \in \mathbb{N}$, de sorte que

$$\begin{aligned} G_n(s) = \mathbb{E}\big(s^{Z_n}\big) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{\{Z_{n-1}=j\}}\, s^{\sum_{k=1}^{j} X_{k,n}}\Big) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_{n-1}=j)\, \mathbb{E}\big(s^{\sum_{k=1}^{j} X_{k,n}}\big) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_{n-1}=j)\, \big[\mathbb{E}\big(s^X\big)\big]^j \end{aligned}$$

puisque les variables $X_{k,n}$, $k,n \in \mathbb{N}$, sont indépendantes et équidistribuées (comme X). Autrement dit

$$G_n(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \big[G(s)\big]^j\, \mathbb{P}(Z_{n-1}=j).$$

Comme $G_{n-1}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j\, \mathbb{P}(Z_{n-1} = j)$ ($t \geq 0$), c'est bien l'affirmation demandée. b) La définition de la fonction génératrice exprime que $G_n(0) = \mathbb{P}(Z_n = 0) = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, d'après la question précédente,

$$G_n = G_{n-1} \circ G = G \circ \cdots \circ G = G \circ G_{n-1},$$

d'où il ressort bien que $u_n = G(u_{n-1})$. c) La suite u_n, $n \in \mathbb{N}$, est croissante et majorée, donc convergente vers une limite $\ell \in [0,1]$. Il peut être observé, par récurrence, que si s est un point fixe de G, $u_n \leq s$ pour tout n en vertu de la croissance de G puisque $u_n = G(u_{n-1}) \leq G(s) = s$. d*) En désignant les probabilités

$$p_0 \;=\; \mathbb{P}(X=0), \quad p_1 \;=\; \mathbb{P}(X=1), \quad p_2 \;=\; \mathbb{P}(X=2) \;>\; 0,$$

par définition

$$G(s) \;=\; p_0 + p_1 s + p_2 s^2 \;=\; 1 - p_1 - p_2 + p_1 s + p_2 s^2, \quad s \geq 0.$$

Par ailleurs $\mathbb{E}(X) = p_1 + 2p_2$. Par continuité, la limite $\ell \in [0,1]$ de la suite u_n, $n \in \mathbb{N}$, est un point fixe de G. La résolution de l'équation $G(\ell) = \ell$ conduit à une discussion suivant la valeur du discriminant du polynôme

$$G(s) - s \;=\; p_2 s^2 + (p_1 - 1)s + 1 - p_1 - p_2,$$

à savoir

$$\begin{aligned}(p_1 - 1)^2 - 4p_2(1 - p_1 - p_2) \;&=\; (p_1 + 2p_2)^2 - 2(p_1 + 2p_2) + 1 \\ &=\; \big[(p_1 + 2p_2) - 1\big]^2.\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $G(s) - s = 0$ sont ainsi données par

$$s_\pm \;=\; \frac{1}{2p_2}\big[1 - p_1 \pm (p_1 + 2p_2 - 1)\big].$$

Si $\mathbb{E}(X) = p_1 + 2p_2 \leq 1$, la seule solution dans $[0,1]$ est $\ell = 1$, alors que si $\mathbb{E}(X) = p_1 + 2p_2 > 1$, la plus petite (puisque $u_n \leq \ell$) solution est $\ell = \frac{1-p_1-p_2}{p_2} = \frac{p_0}{p_2} \in]0,1[$.

Exercice 9 (*Inégalité de Kolmogorov*[4]). Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, centrées, de carré intégrable ; poser $S_k = X_1 + \cdots + X_k$, $k = 1, \ldots, n$. L'objectif de l'exercice est de renforcer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour des variables aléatoires indépendantes, sous la forme : pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}\big(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq t \big) \;\leq\; \frac{1}{t^2} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k).$$

a) Soit $t > 0$ et soit $A_k = \{|S_k| \geq t\}$, $k = 1, \ldots, n$, de sorte que

$$\big\{ \max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq t \big\} \;=\; \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

Rappeler (de la Leçon 2) que les événements

$$B_k \;=\; A_k \cap \Big(\bigcup_{j<k} A_j \Big)^c, \quad k = 1, \ldots, n,$$

sont disjoints et que leur réunion est égale à $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$.

b) Démontrer que

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{B_k} S_k (S_n - S_k) \big) \;=\; 0$$

pour tout $k = 1, \ldots, n$.

c) Établir (à l'aide de la question précédente) que

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{B_k} \big[S_n^2 - 2 S_k (S_n - S_k) \big] \Big) \;\leq\; \mathbb{E}(S_n^2),$$

puis que

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{B_k} \big[S_n^2 - 2 S_k (S_n - S_k) \big] \Big) \;\geq\; \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{B_k} S_k^2 \big).$$

4. Andreï Kolmogorov, mathématicien russe et soviétique (1903–1987).

d) Prouver que, pour tout $t > 0$ et tout $k = 1, \dots, n$,

$$\mathbb{P}(B_k) \;=\; \mathbb{P}\big(\mathbb{1}_{B_k}|S_k| \geq t\big) \;\leq\; \frac{1}{t^2}\,\mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{B_k}S_k^2\big).$$

e) De ce qui précède, conclure à l'inégalité annoncée.

Corrigé. b) L'événement B_k ne dépend que des variables $X_1, \dots, X_k$. Ainsi B_k et S_k sont indépendants de $S_n - S_k$. Par ailleurs, $\mathbb{1}_{B_k}S_k(S_n - S_k)$ est intégrable d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'hypothèse de variables de carré intégrable. La propriété d'indépendance implique alors que

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{B_k}S_k(S_n - S_k)\big) \;=\; \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_k}S_k)\,\mathbb{E}(S_n - S_k)$$

qui est égal à 0 car $\mathbb{E}(S_n - S_k) = 0$ par centrage des variables $X_1, \dots, X_n$. c) En conséquence de la question précédente, par linéarité de l'espérance,

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{B_k}\big[S_n^2 - 2S_k(S_n - S_k)\big]\Big) \;=\; \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{B_k}S_n^2\big).$$

Par la relation de Chasles, ce terme est égal à

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^{n}B_k}S_n^2\big) \;\leq\; \mathbb{E}(S_n^2)$$

ce qui démontre la première inégalité. Pour la seconde,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{B_k}\big[S_n^2 - 2S_k(S_n - S_k)\big]\Big) \;&=\; \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{B_k}\big[(S_n - S_k)^2 + S_k^2\big]\Big)\\ &\geq\; \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{B_k}S_k^2\big)\end{aligned}$$

(malin Monsieur Kolmogorov !), ce qui démontre la seconde inégalité. d) Soit donc k, $1 \leq k \leq n$, fixé ; il est clair que $B_k \subset \{\mathbb{1}_{B_k}|S_k| \geq t\}$ car

$B_k \subset A_k = \{|S_k| \geq t\}$. L'inégalité de Tchebychev fournit alors la conclusion annoncée. e) Il ne reste plus qu'à rassembler les différentes étapes :

$$\mathbb{E}(S_n^2) \,\geq\, \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{B_k} S_k^2\big) \,\geq\, t^2 \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B_k) \,=\, t^2\, \mathbb{P}\big(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq t\big).$$

La première inégalité résulte de la question c), la seconde de la question d), la dernière égalité de la question a). Enfin d'après l'identité de Bienaymé,

$$\mathbb{E}(S_n^2) \,=\, \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k^2) \,=\, \sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(X_k)$$

(rappeler que $\mathbb{E}(X_k) = 0$, $k = 1, \ldots, n$).