# Leçon 15 Exercices corrigés

(*Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.*)

**Exercice 1.** Soit $a_n$, $n \in \mathbb{N}$, une suite de nombres réels définissant le terme général d'une série convergente, et soit $X_n$, $n \in \mathbb{N}$, une suite de variables aléatoires réelles. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X_n \neq a_n) < \infty$. Démontrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est presque sûrement convergente.

*Corrigé.* D'après le lemme de Borel-Cantelli (partie directe), l'événement

$$A^c = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq m} \{X_n = a_n\}$$

est de probabilité 1. Mais $\omega \in A^c$ signifie qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ (dépendant de $\omega$) tel que $X_n(\omega) = a_n$ pour tout $n \geq m$. Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge, il en va alors de même de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n(\omega)$ (puisque cette dernière ne diffère de la précédente que pour un nombre fini de termes). Ainsi, pour tout $\omega \in A^c$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n(\omega)$ est convergente, ce qui exprime le résultat comme $\mathbb{P}(A^c) = 1$.

**Exercice 2*.** Si $x_n$, $n \in \mathbb{N}$, est une suite de nombres entiers, un entier $j$ est valeur d'adhérence de la suite $x_n$, $n \in \mathbb{N}$, si et seulement si il existe une sous-suite strictement croissante d'entiers $n_k$, $k \in \mathbb{N}$, telle que $x_{n_k} = j$ pour tout $k$.

a) Soit à présent $X_n$, $n \in \mathbb{N}$, une suite de variables aléatoires indépendantes, telle que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $X_n$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{n^{1+\rho}})$ où $\rho > 0$. Pour $j \in \mathbb{N}$, démontrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X_n = j)$ diverge si et seulement si $\rho j \leq 1$.

b) Si $\rho = \frac{1}{3}$, conclure que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $X_n$, $n \in \mathbb{N}$, est presque sûrement égal à $\{1, 2, 3\}$.

*Corrigé.* S'il existe une sous-suite $x_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, telle que $x_{n_k} = j$ pour tout $k$, il est clair que $j \in \mathbb{N}$ est valeur d'adhérence $x_n$, $n \in \mathbb{N}$. Réciproquement, si $j \in \mathbb{N}$ est valeur d'adhérence, il existe une sous-suite $x_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, convergeant vers $j$. S'agissant de nombres entiers, nécessairement à partir d'un certain rang, $x_{n_k} = j$. a) Par définition de la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{n^{1+\rho}})$, si $n \geq j$,

$$\mathbb{P}(X_n = j) \;=\; \binom{n}{j}\Big(\frac{1}{n^{1+\rho}}\Big)^j\Big(1 - \frac{1}{n^{1+\rho}}\Big)^{n-j}.$$

L'entier $j$ étant fixé, le coefficient binomial $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ est de l'ordre de $n^j$ quand $n \to \infty$. Par ailleurs, après prise du logarithme, il apparaît que le terme $\big(1 - \frac{1}{n^{1+\rho}}\big)^{n-j}$ est d'ordre 1. Ainsi $\mathbb{P}(X_n = j)$ est d'ordre $\frac{1}{n^{\rho j}}$ ce qui fournit la conclusion annoncée. b) Par application du lemme de Borel-Cantelli dans sa partie indépendante, si $\rho j \leq 1$,

$$\mathbb{P}\bigg(\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\geq m}\{X_n = j\}\bigg) \;=\; 1.$$

Autrement dit, d'après la description préliminaire, $j \in \mathbb{N}$ est presque sûrement valeur d'adhérence de la suite $X_n$, $n \in \mathbb{N}$. Si $\rho = \frac{1}{3}$, les seuls entiers $j$ tels que $\rho j \leq 1$ sont $1, 2, 3$, d'où la conclusion.

**Exercice 3.** Soit $X_n$, $n \in \mathbb{N}$, une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ de paramètre 1 sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a*) Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X_n > (1+\varepsilon)\ln(n)) < \infty$. En déduire que, presque sûrement,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln(n)} \;\leq\; 1.$$

b) Suivant le même schéma, démontrer que, presque sûrement,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln(n)} \;\geq\; 1.$$

c*) Soit $X_n$, $n \in \mathbb{N}$, une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ ; déterminer la limite presque sûre

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\sqrt{2\ln(n)}}\,.$$

*Corrigé.* a*) Si $X_n$ est de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{P}(X_n > t) = e^{-t}$. Ainsi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\big(X_n > (1+\varepsilon)\ln(n)\big) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \;<\; \infty$$

conduisant à la première affirmation. D'après la première partie du lemme de Borel-Cantelli, $\mathbb{P}(\Omega_\varepsilon) = 1$ où

$$\Omega_\varepsilon \;=\; \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq m} \big\{X_n \leq (1+\varepsilon)\ln(n)\big\}.$$

Donc, pour tout $\omega \in \Omega_\varepsilon$, il existe $m \in \mathbb{N}$ (dépendant de $\omega$) tel que pour tout $n \geq m$, $X_n(\omega) \leq (1+\varepsilon)\ln(n)$. Autrement dit,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n(\omega)}{\ln(n)} \;\leq\; 1+\varepsilon.$$

Si $\omega \in \Omega_0 = \bigcap_{\ell\in\mathbb{N}} \Omega_{\frac{1}{\ell}}$, $\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n(\omega)}{\ln(n)} \;\leq\; 1 + \frac{1}{\ell}$ pour tout $\ell \geq 1$, et donc cette limite supérieure est inférieure ou égale à 1. Comme $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ (comme intersection dénombrable d'événements de probabilité 1), la conclusion demandée s'ensuit. b) Le schéma reproduit la question précédente avec la deuxième partie du lemme de Borel-Cantelli, les variables $X_n$, $n \in \mathbb{N}$, étant mutuellement indépendantes. Il y suffit de considérer l'argument pour $\varepsilon = 0$ puisque $\mathbb{P}(X_n > \ln(n)) = \frac{1}{n}$ est le terme général d'une série divergente. Ainsi $\mathbb{P}(\widetilde{\Omega}_0) = 1$ où

$$\widetilde{\Omega}_0 \;=\; \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} \big\{X_n > \ln(n)\big\}.$$

Si donc $\omega \in \widetilde{\Omega}_0$, $\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n(\omega)}{\ln(n)} \geq 1$ par la définition d'une limite supérieure. c*) Les arguments sont similaires, mais en l'absence d'une expression exponentielle exacte pour les probabilités $\mathbb{P}(X_n > t)$, $t > 0$, il convient de faire usage des équivalents décrits dans l'Exercice 1, Leçon 14. L'équivalent produit dans cet exercice est $\mathbb{P}(X_n > t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, t} e^{-\frac{1}{2}t^2}$ quand $t \to \infty$, pour laquelle il appert que la valeur critique pour la convergence des séries $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n > t)$ est $t = \sqrt{2\ln(n)}$. Par le schéma des questions précédentes, la limite supérieure considérée est presque sûrement égale à 1.

**Exercice 4*.** Soit $X_n$, $n \in \mathbb{N}$, une suite croissante de variables aléatoires positives sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = \infty$ et

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Var}(X_n)}{[\mathbb{E}(X_n)]^2} = 0.$$

a) Pour tout $\eta > 0$, extraire une sous-suite $X_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, telle que, pour tout $s \in ]0,1[$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\big(X_{n_k} \geq s\,\mathbb{E}(X_{n_k})\big) \geq \frac{(1-s)^2}{1+\eta}.$$

(*Indication* : faire usage de l'inégalité de Paley-Zygmund, Exercice 4, Leçon 11.)

b) Déduire de la question précédente que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t > 0$, il existe une sous-suite d'entiers $n_k$, $k \in \mathbb{N}$, et un entier $k_0$ tel que, pour tout $k \geq k_0$, $\mathbb{P}(X_{n_k} \geq t) \geq 1 - \varepsilon$.

c) Démontrer que la suite $X_n$, $n \in \mathbb{N}$, tend presque sûrement vers $+\infty$.

d) Déduire de la question précédente que toute suite $A_n$, $n \in \mathbb{N}$, d'événements de $\mathcal{A}$ vérifiant les deux conditions $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ et

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{k,\ell=1}^{n} \mathbb{P}(A_k \cap A_\ell)}{\big(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\big)^2} = 1$$

est telle que $\mathbb{P}\big(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} A_n\big) = 1$.

e) Conclure à une autre démonstration du lemme de Borel-Cantelli dans sa partie indépendante.

*Corrigé.* a) Par définition d'une limite inférieure, pour tout $\eta > 0$, il existe une sous-suite strictement croissante d'entiers $n_k$, $k \in \mathbb{N}$, telle que $\mathrm{Var}(X_{n_k}) \leq \eta\, [\mathbb{E}(X_{n_k})]^2$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc, pour tout $k$,

$$\frac{[\mathbb{E}(X_{n_k})]^2}{\mathbb{E}(X_{n_k}^2)} \geq \frac{1}{1+\eta}\,.$$

(Comme $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = +\infty$, il peut être supposé que $\mathbb{E}(X_n^2) \geq [\mathbb{E}(X_n)]^2 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.) D'après l'inégalité de Paley-Zygmund indiquée, pour tout $s \in ]0,1[$,

$$\mathbb{P}\big(X_{n_k} \geq s\,\mathbb{E}(X_{n_k})\big) \geq (1-s)^2\, \frac{[\mathbb{E}(X_{n_k})]^2}{\mathbb{E}(X_{n_k}^2)} \geq \frac{(1-s)^2}{1+\eta}\,.$$

b) Soient à présent $\varepsilon > 0$ et $t > 0$ fixés ; choisir $\eta > 0$ et $s \in ]0,1[$ tels que $\frac{(1-s)^2}{1+\eta} \geq 1-\varepsilon$. Pour ce $\eta > 0$, considérer la suite $X_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, obtenue dans la question a), puis comme $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = +\infty$, choisir un entier $k_0$ tel que $s\,\mathbb{E}(X_{n_k}) \geq t$ pour tout $k \geq k_0$. Ainsi, si $k \geq k_0$,

$$\mathbb{P}(X_{n_k} \geq t) \geq \mathbb{P}\big(X_{n_k} \geq s\,\mathbb{E}(X_{n_k})\big) \geq \frac{(1-s)^2}{1+\eta} \geq 1-\varepsilon,$$

ce qu'il fallait démontrer. c) La question précédente entraîne directement que pour tous $\varepsilon, t > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n \geq t\Big) \geq 1-\varepsilon.$$

Lorsque $\varepsilon$ décroît vers 0 et $t$ croît vers l'infini, par monotonie

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n = \infty\Big) = 1.$$

La suite $X_n$, $n \in \mathbb{N}$, étant croissante, l'affirmation demandée s'ensuit. d) Appliquer ce qui précède à la suite $X_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k}$, $n \in \mathbb{N}$, positive et croissante.

Les deux conditions sur la suite des événements $A_n$, $n \in \mathbb{N}$, coïncident avec les hypothèses décrites en début d'énoncé sur la suite de variables aléatoires $X_n$, $n \in \mathbb{N}$. Ainsi cette suite $X_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}$, $n \in \mathbb{N}$, converge presque sûrement vers l'infini, c'est-à-dire la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n}$ est divergente, exprimant qu'une infinité d'événements $A_n$ sont réalisés. Autrement dit $\mathbb{P}\big(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} A_n\big) = 1$.
e) Si les événements $A_n$, $n \in \mathbb{N}$, sont indépendants, *ou seulement indépendants deux à deux*, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k,\ell=1}^{n} \mathbb{P}(A_k \cap A_\ell) = \sum_{k,\ell=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\,\mathbb{P}(A_\ell) = \bigg(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\bigg)^2.$$

La seconde condition de la question d) est donc automatiquement satisfaite. En conséquence, si $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty$, alors $\mathbb{P}\big(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} A_n\big) = 1$, ce qui exprime le lemme de Borel-Cantelli dans sa partie indépendante.