Leçon 16 Exercices corrigés

(*Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.*)

Exercice 1. Soit X_n, $n \in \mathbb{N}$, une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$ sur $\{0,1\}$; démontrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} X_n$ converge presque sûrement, et montrer qu'elle suit la loi uniforme sur $[0,1[$. (*Indication* : déterminer la mesure des ensembles dyadiques, ou décrire la fonction caractéristique de la somme partielle $S_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n} X_n$.)

Corrigé. Il est clair que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} X_n$ converge presque sûrement puisque $|X_n| \leq 1$ pour tout n ; sa somme est notée Z. Soit alors, comme dans le corps de la leçon, un intervalle dyadique I de $[0,1[$ dont le développement commence par $\sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n} \varepsilon_n$ où $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ est une suite finie de 0 et de 1. Donc $Z \in I$ signifie que $X_1 = \varepsilon_1, \ldots, X_k = \varepsilon_k$, et

$$\mathbb{P}(Z \in I) = \mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1, \ldots, X_k = \varepsilon_k) = \frac{1}{2^k}$$

par indépendance. La loi de Z coïncide ainsi avec la mesure de Lebesgue sur tout intervalle dyadique. En approchant tout réel de $[0,1[$ par une suite de nombres dyadiques, les propriétés d'une mesure permettent de se convaincre qu'elle coïncide alors avec la mesure de tout intervalle (de $[0,1[$), ce qui suffit pour l'affirmation.

Une autre démonstration peut être proposée à travers la fonction caractéristique. Poser $S_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n} X_n$, $k \geq 1$, et évaluer, pour chaque $u \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(e^{iuS_k}) = \prod_{n=1}^k \mathbb{E}(e^{i\frac{u}{2^n}X_n}) = \prod_{n=1}^k \left(\frac{e^{i\frac{u}{2^n}} + 1}{2}\right) = \frac{1}{2^k} \prod_{n=1}^k (e^{i\frac{u}{2^n}} + 1)$$

puisque les X_n sont indépendantes de même loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$. Or, par l'argument de l'angle moitié, $(e^{i\frac{u}{2^n}} + 1)(e^{i\frac{u}{2^n}} - 1) = e^{i\frac{u}{2^{n-1}}} - 1$, de sorte que, par produit

téléscopant,
$$\prod_{n=1}^{k}(e^{i\frac{u}{2^n}}+1) \;=\; \prod_{n=1}^{k}\frac{e^{i\frac{u}{2^{n-1}}}-1}{e^{i\frac{u}{2^n}}-1} \;=\; \frac{e^{iu}-1}{e^{i\frac{u}{2^k}}-1}\,.$$
Il s'ensuit que
$$\mathbb{E}(e^{iuS_k}) \;=\; \frac{e^{iu}-1}{2^k[e^{i\frac{u}{2^k}}-1]}$$
qui converge vers $\frac{e^{iu}-1}{iu}$ lorsque $k \to \infty$. Mais cette dernière expression est la fonction caractéristique de la loi uniforme sur $[0,1[$. La conclusion découle de l'unicité en loi de la fonction caractéristique.