Leçon 17 Exercices corrigés

(*Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.*)

Exercice 1. Soit Y_n, $n \in \mathbb{N}$, une suite de variables aléatoires de lois de Bernoulli $\mathcal{B}(p_n)$ sur $\{0,1\}$ de paramètres respectifs de succès $p_n = \frac{1}{n}$.

a) Si Z est une variable aléatoire intégrable, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\big(|nY_n - Z|\big) \,\geq\, \mathbb{E}\big(|Z|\big) - \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\{Y_n=1\}}\,|Z|\big).$$

En déduire que si la suite nY_n, $n \in \mathbb{N}$ converge vers Z dans L^1, nécessairement $Z = 0$ presque sûrement. Y-a-t-il convergence ?

b) Dans cette question, les Y_n, $n \in \mathbb{N}$, sont supposées mutuellement indépendantes. Que dire des limites presque sûre et dans L^1 de la suite Y_n, $n \in \mathbb{N}$?

c) Mêmes questions si $p_n = \frac{1}{n^2}$.

Corrigé. a) En vertu des propriétés de l'intégrale (conservation de l'ordre et relation de Chasles), pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(|nY_n - Z|\big) \,&\geq\, \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\{Y_n=0\}}\,|Z|\big)\\ &=\, \mathbb{E}\big(|Z|)\big) - \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\{Y_n=1\}}\,|Z|\big)\end{aligned}$$

ce qui exprime l'inégalité demandée. Comme $\mathbb{P}(Y_n = 1) = p_n \to 0$, d'après la continuité de l'intégrale au voisinage de la partie vide (Exercice 2, Leçon 3),

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\{Y_n=1\}}\,|Z|\big) \,=\, 0.$$

S'il est donc supposé que nY_n, $n \in \mathbb{N}$, converge dans L^1 vers Z, autrement dit $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|nY_n - Z|) = 0$, il découle de l'inégalité précédente que $\mathbb{E}(|Z|) = 0$, et ainsi $Z = 0$ presque sûrement. Mais il ne peut en fait y avoir convergence dans L^1 de la suite nY_n, $n \in \mathbb{N}$, vers $Z = 0$ car un calcul direct montre que $\mathbb{E}(|nY_n|) = \mathbb{E}(nY_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. b) Il est immédiat que $\mathbb{E}(|Y_n|) = \frac{1}{n}$

pour tout n, et donc Y_n, $n \in \mathbb{N}$, converge vers 0 dans L^1. Pour ce qui est de la convergence presque sûre, le critère issu du lemme de Borel-Cantelli indique qu'il y a convergence presque sûre vers 0 (la seule limite possible d'après le théorème de convergence dominée et la convergence de $\mathbb{E}(Y_n)$ vers 0) si et seulement si (car les variables sont indépendantes) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(|Y_n| \geq \varepsilon) < \infty$ pour tout $\varepsilon > 0$. Or, si $0 < \varepsilon \leq 1$, $\mathbb{P}(|Y_n| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(Y_n \geq \varepsilon) = \frac{1}{n}$, qui est le terme général d'une série divergente. Il n'y a donc pas convergence presque sûre. c) En reprenant les raisonnements de la question b), les deux suites nY_n et Y_n, $n \in \mathbb{N}$, convergent dans L^1 vers 0. Comme $\mathbb{P}(Y_n \geq \varepsilon) = \frac{1}{n^2}$, qui est cette fois le terme général d'une série convergente, la suite Y_n, $n \in \mathbb{N}$, converge également vers 0 presque sûrement.

Exercice 2. Soit X_k, $k \in \mathbb{N}$, une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, X_k suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha_k)$ de paramètre $\alpha_k > 0$; poser $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $n \geq 1$.

a) Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ pour $n \geq 1$. En déduire que si $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\alpha_k} < \infty$, alors la série $\sum_{k=1}^\infty X_k$ est presque sûrement convergente.

b*) Il est supposé de plus dans cette question que les variables X_k, $k \geq 1$, sont indépendantes. Calculer $\mathbb{E}(e^{-S_n})$ pour $n \geq 1$. Démontrer que si $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\alpha_k} = \infty$, alors la série $\sum_{k=1}^\infty X_k$ est presque sûrement divergente.

Corrigé. a) La moyenne d'une loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha_k)$ est $\frac{1}{\alpha_k}$, de sorte que, pour chaque n,

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k} .$$

Par convergence monotone, toutes les variables étant positives (presque sûrement),

$$\mathbb{E}\bigg(\sum_{k=1}^\infty X_k\bigg) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\alpha_k} .$$

Si donc $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k} < \infty$, alors $\mathbb{E}\big(\sum_{k=1}^{\infty} X_k\big) < \infty$, ce qui entraîne que la série $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ est presque sûrement convergente (une variable aléatoire intégrable est finie presque sûrement). b*) Par indépendance, et le calcul de la transformée de Laplace de X_k,

$$\mathbb{E}\big(e^{-S_n}\big) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(e^{-X_k}\big) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{1+\alpha_k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{1}{\alpha_k}}.$$

La divergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k}$ a pour conséquence (exercice – passer au logarithme) que le produit infini $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{\alpha_k}}$ est nul. Mais alors, par convergence monotone ou dominée,

$$\mathbb{E}\big(e^{-\sum_{k=1}^{\infty} X_k}\big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big(e^{-S_n}\big) = 0.$$

Donc $e^{-\sum_{k=1}^{\infty} X_k} = 0$ presque sûrement, ce qui exprime que la série $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ est divergente presque sûrement.

Exercice 3. Soit X_k, $k \in \mathbb{N}$, une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ de paramètre 1, et $M_n = \max_{1\le k\le n} X_k$, $n \geq 1$.

a) Démontrer que pour tout $0 < \varepsilon < 1$,

$$\mathbb{P}\big(M_n \leq (1-\varepsilon)\ln(n)\big) = \Big(1 - \frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\Big)^n = \exp\Big[n \ln\Big(1 - \frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\Big)\Big].$$

En déduire, par le lemme de Borel-Cantelli, que presque sûrement

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{M_n}{\ln(n)} \geq 1 - \varepsilon.$$

b) Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\big(M_n \geq (1+\varepsilon)\ln(n)\big) = 1 - \exp\Big[n \ln\Big(1 - \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\Big)\Big].$$

Soit n_k, $k \in \mathbb{N}$, la sous-suite d'entiers définie par $n_k = \lfloor k^\rho \rfloor$, $k \in \mathbb{N}$, $\rho > 0$, où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière. Par le lemme de Borel-Cantelli, déduire de ce qui précède que si $\varepsilon\rho > 1$, alors presque sûrement

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{M_{n_k}}{\ln(n_k)} \leq 1 + \varepsilon.$$

c) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\max_{n_k \leq n < n_{k+1}} \frac{M_n}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n_{k+1})}{\ln(n_k)} \frac{M_{n_{k+1}}}{\ln(n_{k+1})}.$$

d) Déduire des questions précédentes que $\frac{M_n}{\ln(n)} \to 1$ presque sûrement. (Cette limite est à comparer à la conclusion de l'Exercice 3, Leçon 15.)

e) Poser $Z_n = ne^{-M_n}$, $n \geq 1$. Démontrer que la suite des fonctions de répartition de Z_n converge vers une fonction de répartition F. Est-elle la fonction de répartition d'une loi classique ? Si oui, laquelle ?

Corrigé. a) Puisque les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes de même loi $\mathcal{E}(1)$, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(M_n \leq t) = \mathbb{P}\big(\max_{1\leq k\leq n} X_k \leq t\big) = \mathbb{P}(X_1 \leq t)^n = (1 - e^{-t})^n.$$

L'affirmation s'ensuit pour la valeur $t = (1 - \varepsilon)\ln(n)$ (avec les conventions habituelles si $n = 1$). Pour n grand, $\ln(1 - \frac{1}{n^{1-\varepsilon}})$ est de l'ordre de $-\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}$, plus précisément

$$n \ln\Big(1 - \frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\Big) = -n^\varepsilon(1 + \eta_n)$$

où $\eta_n \to 0$ quand $n \to \infty$. Donc $\mathbb{P}(M_n \geq (1+\varepsilon)\ln(n)) = e^{-n^\varepsilon(1+\eta_n)}$ qui définit le terme général d'une série convergente (par exemple plus petit que $\frac{1}{n^2}$ pour n assez grand). Le lemme Borel-Cantelli s'applique alors pour conclure à la question demandée. b) La valeur de la probabilité résulte du même calcul qu'en a). Les équivalents $\ln(1-\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}) \sim -\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ et $1-\exp(-\frac{1}{n^\varepsilon}) \sim \frac{1}{n^\varepsilon}$ quand $n \to \infty$ montrent que le long de la sous-suite n_k, $k \in \mathbb{N}$, le membre de droite définit le terme général d'une série converge si $\varepsilon\rho > 1$. Une nouvelle application du lemme de Borel-Cantelli fournit la conclusion. c) L'inégalité à vérifier est une conséquence immédiate de la croissance de la suite M_n, $n \in \mathbb{N}$, et de la fonction logarithme. d) Soit $\varepsilon > 0$ fixé ; choisir $\rho > 0$ tel que $\varepsilon\rho > 1$ et définir la suite n_k, $k \in \mathbb{N}$, comme en b). Comme $\lim_{k\to\infty} \frac{\ln(n_{k+1})}{\ln(n_k)} = 1$, il résulte alors des questions b) et c) que

$$\limsup_{k\to\infty} \max_{n_k \leq n < n_{k+1}} \frac{M_n}{\ln(n)} \leq 1+\varepsilon$$

presque sûrement. Mais ceci exprime aussi que $\limsup_{n\to\infty} \frac{M_n}{\ln(n)} \leq 1+\varepsilon$ presque sûrement. Avec a), si $0 < \varepsilon < 1$, il existe donc un événement Ω_ε de probabilité 1 tel que, pour tout $\omega \in \Omega_\varepsilon$,

$$1-\varepsilon \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{M_n(\omega)}{\ln(n)} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{M_n(\omega)}{\ln(n)} \leq 1+\varepsilon.$$

Il ne reste plus qu'à considérer l'événement $\bigcap_{\ell\in\mathbb{N}} \Omega_{\frac{1}{\ell}}$ de probabilité 1 sur lequel alors $\lim_{n\to\infty} \frac{M_n(\omega)}{\ln(n)} = 1$. e) Pour tout réel $t > 0$,

$$\mathbb{P}(Z_n > t) = \mathbb{P}\big(ne^{-M_n} > t\big) = \mathbb{P}\big(M_n < \ln(\tfrac{n}{t})\big).$$

Comme calculé en a), cette probabilité est égale à $\big(1-\frac{t}{n}\big)^n$. Lorsque $n \to \infty$, cette quantité converge vers e^{-t}. La fonction de répartition limite F vérifie donc $1-F(t) = e^{-t}$ pour tout $t > 0$. C'est la fonction de répartition de la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ de paramètre 1.

Exercice 4* (*Récurrence et transience*). Soient X_k, $k \in \mathbb{N}$, des variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans $\mathbb{Z}$; pour tout $n \geq 1$, soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. La suite S_n, $n \geq 1$, est dite *récurrente* si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = \infty,$$

et *transiente* sinon. Démontrer que si la suite S_n, $n \geq 1$, est transiente, l'ensemble d'entiers $\{n \geq 1\,; S_n = 0\}$ est fini presque sûrement (autrement dit, la suite S_n, $n \geq 1$, ne « visite » plus 0 à partir d'un certain rang).

Il est supposé à présent que $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$ et $\mathbb{E}(X_1) = 0$. Le projet de l'exercice est de démontrer qu'alors la suite S_n, $n \geq 1$, est récurrente.

a) Prouver que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}\big(|S_n| > \varepsilon n\big) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 n}\,\mathbb{E}(X_1^2).$$

b) Démontrer que pour tout $k \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}(S_k = x) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}\big(\{S_k = x\} \cap B_j\big)$$

où $B_1 = \{S_1 = x\}$ et

$$B_j = \{S_i \neq x, i = 1, \ldots, j-1, S_j = x\}, \quad j = 2, \ldots, k.$$

Démontrer également que pour tous $1 \leq j \leq k$ et tout $x \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}\big(\{S_k = x\} \cap B_j\big) = \mathbb{P}(S_k - S_j = 0)\,\mathbb{P}(B_j) = \mathbb{P}(S_{k-j} = 0)\,\mathbb{P}(B_j).$$

c) Déduire de la question précédente que, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_k = x) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(S_k = 0).$$

d) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $N > 0$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(S_k = 0) \geq \frac{1}{2N+1} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(|S_k| \leq N\big).$$

En conclure que pour tout $n \geq 1$ et tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(S_k = 0) \,\geq\, \frac{1}{2\varepsilon n + 1} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(|S_k| \leq \varepsilon k\big).$$

e) Déduire des questions a) et d) que la suite S_n, $n \geq 1$, est récurrente.

Corrigé. L'affirmation préliminaire découle immédiatement du lemme de Borel-Cantelli. a) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, le centrage des variables X_k et leur équidistribution,

$$\mathbb{P}\big(|S_n| > \varepsilon n\big) \,\leq\, \frac{1}{\varepsilon^2 n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k^2) \,=\, \frac{1}{\varepsilon^2 n} \, \mathbb{E}(X_1^2).$$

b) Suivant une construction déjà utilisée en d'autres occasions (voir Leçon 2), les événements B_j, $j = 1, \ldots, k$, sont disjoints de réunion $\bigcup_{j=1}^{k} \{S_j = x\}$. Alors, comme $\{S_k = x\}$ est un élément de cette réunion,

$$\mathbb{P}(S_k = x) \,=\, \mathbb{P}\bigg(\{S_k = x\} \cap \bigcup_{j=1}^{k} B_j\bigg) \,=\, \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}\big(\{S_k = x\} \cap B_j\big).$$

Sur l'ensemble B_j, $S_j = x$ de sorte que si $S_k = x$, alors $S_k - S_j = 0$. En outre $S_k - S_j$ ne dépend que des variables aléatoires $X_{j+1}, \ldots, X_k$, et est ainsi indépendante de l'événement B_j (qui lui ne dépend que de $X_1, \ldots, X_j$). Par indépendance donc,

$$\mathbb{P}\big(\{S_k = x\} \cap B_j\big) \,=\, \mathbb{P}(S_k - S_j = 0) \, \mathbb{P}(B_j).$$

Enfin $S_k - S_j$ a même loi que S_{k-j} puisque les variables X_k, $k \in \mathbb{N}$, sont indépendantes de même loi. c) Les différentes conclusions à la question précédente expriment que, pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_k = x) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}\big(\{S_k = x\} \cap B_j\big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(S_{k-j} = 0)\, \mathbb{P}(B_j).\end{aligned}$$

En échangeant les sommes,

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_k = x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} \mathbb{P}(S_{k-j} = 0)\, \mathbb{P}(B_j),$$

et, pour tout $j = 1, \ldots, n$, $\sum_{k=j}^{n} \mathbb{P}(S_{k-j} = 0) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(S_k = 0)$ (après un glissement d'indice). C'est le résultat demandé puisque, les B_j étant disjoints, $\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(B_j) \leq 1$. d) Supposer d'abord que N est un entier ≥ 1. Alors

$$\big\{|S_k| \leq N\big\} = \bigcup_{x=-N}^{+N} \{S_k = x\},$$

la réunion étant disjointe et comportant $2N + 1$ termes. La conclusion dans ce cas résulte alors de la question précédente. Si $N > 0$ n'est pas entier, le remplacer par sa partie entière $\lfloor N \rfloor \leq N$. La seconde inégalité de la question s'obtient par le choix de $N = \varepsilon n$ et le fait que $\mathbb{P}(|S_k| \leq \varepsilon n) \geq \mathbb{P}(|S_k| \leq \varepsilon k)$ pour tout $k = 1, \ldots, n$. e) La conjonction des questions a) et d) fournit que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(|S_k| \leq \varepsilon k\big) \geq \sum_{k=1}^{n} \Big(1 - \frac{1}{\varepsilon^2 k}\, \mathbb{E}(X_1^2)\Big),$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(S_k = 0) \geq \frac{1}{2\varepsilon n + 1} \sum_{k=1}^{n} \Big(1 - \frac{1}{\varepsilon^2 k}\, \mathbb{E}(X_1^2)\Big).$$

Par limite de Cesàro, lorsque $n \to \infty$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = 0) \geq \frac{1}{2\varepsilon},$$

et comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = 0) = \infty$. La suite S_n, $n \geq 1$, est donc bien récurrente.