Leçon 18 Exercices corrigés

(*Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.*)

Exercice 1. Reprendre l'Exercice 1, Leçon 17, en incluant la convergence en probabilité dans la discussion.

Exercice 2. Soit X_n, $n \in \mathbb{N}$, une suite de variables aléatoires de même loi uniforme $\mathcal{U}(0,1)$ sur $[0,1]$; démontrer que

a) $\frac{1}{nX_n} \to 0$ en probabilité ;

b) $\frac{X_n}{n} \to 0$ presque sûrement ;

c) $\frac{1}{n^2 X_n} \to 0$ presque sûrement.

On suppose en outre les variables X_n, $n \in \mathbb{N}$, mutuellement indépendantes. Établir que

d) $\frac{1}{nX_n}$ ne converge pas presque sûrement.

Indications. Les raisonnements développés pour l'Exercice 1, en particulier le critère issu du lemme de Borel-Cantelli, s'appliquent de la même façon. (Pour b), il suffit d'observer que, presque sûrement, $\frac{|X_n|}{n} \leq \frac{1}{n}$ car les X_n sont uniformes sur $[0,1]$.)

Exercice 3. Soient X_n, Y_n, $n \in \mathbb{N}$, des suites de variables aléatoires réelles, ainsi que des variables aléatoires réelles X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a) Si les suites X_n, $n \in \mathbb{N}$, et Y_n, $n \in \mathbb{N}$, convergent dans L^p, $p \geq 1$, vers des variables aléatoires X et Y respectivement, démontrer que la suite $X_n + Y_n$, $n \in \mathbb{N}$, converge dans L^p vers $X + Y$.

La suite de l'exercice a pour but de démontrer que la propriété de stabilité précédente est encore vérifiée pour la convergence en probabilité.

b) Si U et V sont des variables aléatoires et $t \in \mathbb{R}$, démontrer que

$$\mathbb{P}(U + V \geq 2t) \,\leq\, \mathbb{P}(U \geq t) + \mathbb{P}(V \geq t).$$

c) Si les suites X_n, $n \in \mathbb{N}$, et Y_n, $n \in \mathbb{N}$, convergent en probabilité vers X et Y respectivement, démontrer que la suite $X_n + Y_n$, $n \in \mathbb{N}$, converge en probabilité vers $X + Y$.

d*) Dans le cadre de la question précédente, démontrer que la suite $X_n Y_n$, $n \in \mathbb{N}$, converge en probabilité vers XY.

Corrigé. a) Par hypothèse, $\|X_n - X\|_p = (\mathbb{E}(|X_n - X|^p))^{1/p} \to 0$ quand $n \to \infty$, et de même pour Y_n, Y. D'après l'inégalité triangulaire pour la norme $\|\cdot\|_p$,

$$\begin{aligned}\big\|(X_n + Y_n) - (X + Y)\big\|_p \,&=\, \big\|(X_n - X) + (Y_n - Y)\big\|_p \\ &\leq\, \|X_n - X\|_p + \|Y_n - Y\|_p\end{aligned}$$

et la conclusion s'ensuit. (Le raisonnement peut être étendu à tout $p > 0$.) b) Si $U + V \geq 2t$, nécessairement soit $U \geq t$, soit $V \geq t$, autrement dit

$$\{U + V \geq 2t\} \,\subset\, \{U \geq t\} \cup \{V \geq t\}.$$

L'inégalité annoncée s'ensuit par sous-additivité d'une mesure. c) Soit $\varepsilon > 0$; d'après le point précédent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}0 \,&\leq\, \mathbb{P}\big(|(X_n + Y_n) - (X + Y)| \geq 2\varepsilon\big) \\ &=\, \mathbb{P}\big(|X_n - X| + |Y_n - Y| \geq 2\varepsilon\big) \\ &\leq\, \mathbb{P}\big(|X_n - X| \geq \varepsilon\big) + \mathbb{P}\big(|Y_n - Y| \geq \varepsilon\big).\end{aligned}$$

L'affirmation s'ensuit par définition de la convergence en probabilité. (Il est possible également d'utiliser la distance D de la leçon pour répondre à cette question.) d*) Il s'agit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ fixé,

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\big(|X_n Y_n - XY| \geq 2\varepsilon\big) \,=\, 0,$$

autrement dit, que pour tout $\eta > 0$, il existe n_0 $(= n_0(\eta, \varepsilon))$ tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\mathbb{P}\big(|X_nY_n - XY| \geq 2\varepsilon\big) \;\leq\; 5\eta.$$

(Les constantes 2 et 5 sont choisies pour que la présentation tombe bien.) D'après l'inégalité triangulaire, pour chaque entier n,

$$\begin{aligned} |X_nY_n - XY| \;&=\; |X_nY_n - X_nY + X_nY - XY| \\ &\leq\; |X_n|\,|Y_n - X| + |Y|\,|X_n - X|. \end{aligned}$$

Ainsi, en vertu de la question b),

$$\mathbb{P}\big(|X_nY_n - XY| \geq 2\varepsilon\big) \;\leq\; \mathbb{P}\big(|X_n|\,|Y_n - Y| \geq \varepsilon\big) + \mathbb{P}\big(|Y|\,|X_n - X| \geq \varepsilon\big).$$

Le deuxième terme dans le membre de droite de l'inégalité précédente se traite aisément : choisir $t > 0$ assez grand pour que $\mathbb{P}(|Y| > t) \leq \eta$ (car $\lim_{t\to-\infty} F_Y(t) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} F_Y(t) = 1$) ; puis, en décomposant,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\big(|Y|\,|X_n - X| \geq \varepsilon\big) \\ &\qquad= \mathbb{P}\big(|Y|\,|X_n - X| \geq \varepsilon, |Y| \leq t\big) + \mathbb{P}\big(|Y|\,|X_n - X| \geq \varepsilon, |Y| > t\big) \\ &\qquad\leq \mathbb{P}\big(t\,|X_n - X| \geq \varepsilon\big) + \mathbb{P}\big(|Y| > t\big) \\ &\qquad\leq \mathbb{P}\big(t\,|X_n - X| \geq \varepsilon\big) + \eta. \end{aligned}$$

Comme la suite X_n, $n \in \mathbb{N}$, converge en probabilité vers X, il existe n_1 $(= n_1(\eta, \varepsilon))$ tel que si $n \geq n_1$,

$$\mathbb{P}\Big(|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{t}\Big) \;\leq\; \eta.$$

Ainsi $\mathbb{P}(|Y|\,|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq 2\eta$ si $n \geq n_1$. Pour le terme $\mathbb{P}(|X_n|\,|Y_n - Y| \geq \varepsilon)$, le raisonnement est identique sous réserve d'une majoration $\mathbb{P}(|X_n| > 2t) \leq 2\eta$ uniforme en n (assez grand). Pour cela, utiliser la convergence en probabilité de X_n, $n \in \mathbb{N}$, vers X. En effet, choisir $t > 0$ tel que $\mathbb{P}(|X| > t) \leq \eta$, puis,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big(|X_n| > 2t\big) \;&=\; \mathbb{P}\big(|X_n| > 2t, |X| \leq t\big) + \mathbb{P}\big(|X_n| \geq 2t, |X| > t\big) \\ &\leq\; \mathbb{P}\big(|X_n - X| \geq t\big) + \mathbb{P}\big(|X| > t\big) \end{aligned}$$

où il a été utilisé que $|X_n - X| \geq |X_n| - |X|$. Comme $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq t) \to 0$, il s'ensuit que $\mathbb{P}(|X_n| > 2t) \leq 2\eta$ pour $n \geq n_2$ ($n_2 = n_2(\eta)$). En rassemblant toutes les estimées, la conclusion s'ensuit pour $n \geq \max(n_1, n_2)$.

Exercice 4. Soit une suite X_n, $n \in \mathbb{N}$, de variables aléatoires convergeant en probabilité vers une variable aléatoire X.

a) Construire par récurrence une suite strictement croissante d'entiers n_k, $k \in \mathbb{N}$, telle que, pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}\big(|X_{n_k} - X| \geq \tfrac{1}{k}\big) \leq \tfrac{1}{2^k}\,.$$

b) Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(|X_{n_k} - X| \geq \varepsilon) < \infty$. En conclure que la suite X_{n_k}, $k \in \mathbb{N}$, converge vers X presque sûrement.

Corrigé. a) L'entier n_k étant construit, définir par récurrence

$$n_{k+1} = \inf\Big\{n \geq n_k + 1\,;\, \mathbb{P}\big(|X_n - X| \geq \tfrac{1}{k+1}\big) \leq \tfrac{1}{2^{k+1}}\Big\}.$$

Ce choix est rendu possible par le fait que $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \to 0$ pour tout $\varepsilon > 0$. b) Soit $\varepsilon > 0$ fixé ; il existe un entier $k_0 \geq 1$ tel que $\frac{1}{k_0} \leq \varepsilon$. Alors, pour tout $k \geq k_0$,

$$\mathbb{P}\big(|X_{n_k} - X| \geq \varepsilon\big) \leq \mathbb{P}\big(|X_{n_k} - X| \geq \tfrac{1}{k}\big) \leq \tfrac{1}{2^k}$$

par définition de n_k. La série $\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(|X_{n_k} - X| \geq \varepsilon)$ est donc convergente. L'application du premier critère de Borel-Cantelli conclut l'exercice.

Exercice 5. Pour toute variable aléatoire $Z \geq 0$, démontrer que pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}(Z \geq t) \leq \frac{1}{t}\,\mathbb{E}\big(Z\,\mathbb{1}_{\{Z \geq t\}}\big).$$

Soit à présent X une variable aléatoire réelle de carré intégrable.

a) Démontrer que

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\big(X^2 \mathbb{1}_{\{|X|\geq t\}}\big) \;=\; 0.$$

Déduire de la question préliminaire que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathbb{P}\big(|X| \geq \varepsilon\sqrt{n}\,\big) \;=\; 0.$$

b) Soient X_n, $n \geq 1$, de même loi que X. En utilisant le question précédente, que peut-on dire de la convergence de la suite de variables aléatoires $Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \max(X_1, \dots, X_n)$, $n \geq 1$, lorsque $n \to \infty$?

Corrigé. Si $Y = Z\,\mathbb{1}_{\{Z\geq t\}}$, $\mathbb{P}(Z \geq t) = \mathbb{P}(Y \geq t)$, de sorte que la première affirmation découle de l'application de l'inégalité de Markov à la variable aléatoire Y. a) Il suffit d'appliquer le théorème de convergence monotone ou le théorème de convergence dominée. La question préliminaire appliquée à $Z = X^2$ et $t = \varepsilon^2 n$ pour tout $n \geq 1$ montre que

$$n\,\mathbb{P}\big(|X| \geq \varepsilon\sqrt{n}\,\big) \;=\; n\,\mathbb{P}\big(X^2 \geq \varepsilon^2 n\big) \;\leq\; \mathbb{E}\big(X^2 \mathbb{1}_{\{X^2\geq\varepsilon^2 n\}}\big).$$

L'affirmation découle alors du point précédent. b) D'après l'inégalité sur les réunions (sous-additivité), pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}\big(|Y_n| \geq \varepsilon\big) \;\leq\; \mathbb{P}\big(\max(|X_1|, \dots, |X_n|) \geq \varepsilon\sqrt{n}\big) \;\leq\; n\,\mathbb{P}\big(|X| \geq \varepsilon\sqrt{n}\,\big)$$

(puisque les variables $X_1, \dots, X_n$ ont même loi que X). D'après a), il s'ensuit que la suite Y_n, $n \in \mathbb{N}$, converge en probabilité vers 0.

Exercice 6 (*Polynômes de Bernstein.*) Soit une $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit X_n une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,x)$ de taille $n \geq 1$ et de paramètre $x \in [0,1]$. On note $T_n = \frac{X_n}{n}$.

a) Montrer que $Q_n(x) = \mathbb{E}(f(T_n))$ est un polynôme (en x), appelé polynôme de Bernstein (de degré n).

b) Calculer $\mathbb{E}(T_n)$ et $\mathrm{Var}(T_n)$.

c) Établir que $|f(x) - Q_n(x)| \leq \mathbb{E}(|f(T_n) - f(x)|)$.

d) Pour $\eta > 0$, poser $A = \{|T_n - x| \leq \eta\}$ et montrer que $\mathbb{P}(A^c) \leq \frac{1}{\eta^2 n}$.

e) Invoquer un théorème pour affirmer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ tel que si $u, v \in [0,1]$ et $|u - v| \leq \eta$, alors $|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$.

f) Pour $\varepsilon > 0$ et $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ comme dans la question précédente, décomposer, pour tout $x \in [0,1]$, $\mathbb{E}(|f(T_n) - f(x)|)$ suivant A et A^c pour obtenir que

$$\big|f(x) - Q_n(x)\big| \leq \varepsilon + \frac{2M(f)}{\eta^2 n}$$

où $M(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

g) Déduire de la question précédente que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n = n(\varepsilon)$ tel que

$$\sup_{x\in[0,1]} \big|f(x) - Q_n(x)\big| \leq 2\varepsilon.$$

h) Quel théorème vient-il d'être démontré ?

Corrigé. a) La variable aléatoire T_n est (presque sûrement) à valeurs dans $[0,1]$. D'après le théorème de transport, et la définition de la loi binomiale $\mathcal{B}(n,x)$,

$$Q_n(x) = \mathbb{E}\big(f(T_n)\big) = \mathbb{E}\Big(f\Big(\frac{X_n}{n}\Big)\Big) = \sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

qui est bien un polynôme de degré n en la variable x. b) Le calcul classique de l'espérance et de la variance de la loi binomiale indique que $\mathbb{E}(X_n) = nx$ et $\mathrm{Var}(X_n) = nx(1-x)$. Ainsi, par homogénéité, $\mathbb{E}(T_n) = x$ et $\mathrm{Var}(T_n) = \frac{x(1-x)}{n}$. c) Comme $Q_n(x) = \mathbb{E}(f(T_n))$,

$$f(x) - Q_n(x) = f(x) - \mathbb{E}\big(f(T_n)\big) = \mathbb{E}\big(f(x) - f(T_n)\big)$$

Donc, après la prise des valeurs absolues,

$$\big|f(x) - Q_n(x)\big| = \big|\mathbb{E}\big(f(x) - f(T_n)\big)\big| \leq \mathbb{E}\big(|f(x) - f(T_n)|\big)$$

d'après les propriétés de l'intégrale. d) D'après l'inégalité de Tchebitchev,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A^c) &= \mathbb{P}\big(|T_n - x| > \eta\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\big|T_n - \mathbb{E}(T_n)\big| > \eta\big) \\
&\leq \frac{1}{\eta^2}\,\mathrm{Var}(T_n) \\
&= \frac{x(1-x)}{\eta^2 n} \leq \frac{1}{\eta^2 n}\,.
\end{aligned}$$

(Le maximum de $x(1-x)$ sur $[0,1]$ étant $\frac{1}{4}$, il est possible d'améliorer la majoration en $\frac{1}{4\eta^2 n}$, sans grand profit néanmoins pour la suite.) e) Une fonction continue définie sur un ensemble compact est uniformément continue (théorème de Heine sur $\mathbb{R}$). f) D'après la question précédente, sur l'ensemble A, $|f(T_n) - f(x)| \leq \varepsilon$. Par ailleurs, uniformément en les variables,

$$\big|f(T_n) - f(x)\big| \leq 2M(f)$$

où $M(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| < \infty$ (rappeler qu'une fonction continue sur un compact est bornée). Ainsi, en suivant l'indication,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(|f(T_n) - f(x)|\big) &= \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_A |f(T_n) - f(x)|\big) + \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{A^c} |f(T_n) - f(x)|\big) \\
&\leq \varepsilon\,\mathbb{P}(A) + 2M(f)\,\mathbb{P}(A^c) \\
&\leq \varepsilon + 2M(f)\,\mathbb{P}(A^c).
\end{aligned}$$

Avec la question d), le résultat s'ensuit. g) $\varepsilon > 0$ étant fixé, et par là même $\eta = \eta(\varepsilon)$, choisir $n = n(\varepsilon)$ suffisamment grand tel que

$$\frac{2M(f)}{\eta^2 n} \leq \varepsilon.$$

Cette majoration est à insérer dans la conclusion de la question précédente, qui a lieu uniformément pour tout $x \in [0,1]$ puisque $\eta = \eta(\varepsilon)$ et $n = n(\varepsilon)$ ne dépendent que de $\varepsilon > 0$. h) *La langue est au chat.*