Leçon 19 Exercices corrigés

(*Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.*)

Exercice 1. Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe, démontrer que pour tous réels $x_1, \dots, x_n$,

$$\varphi\Big(\frac{1}{n}\,(x_1 + \cdots + x_n)\Big) \;\leq\; \frac{1}{n}\,\big[\varphi(x_1) + \cdots + \varphi(x_n)\big].$$

Soit à présent X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que X et $\varphi(X)$ soient intégrables ; considérer une suite X_n, $n \in \mathbb{N}$, de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. Que peut-on déduire de la loi des grands nombres ?

Indication. La première partie découle de la définition de la convexité avec un argument de récurrence. Appliquer ensuite cette inégalité (déterministe) à $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, et faire usage de la loi des grands nombres sur les deux membres de l'inégalité (et de la continuité de φ).

Exercice 2. Soit Y_k, $k \in \mathbb{N}$, une suite de variables aléatoires deux à deux non corrélées telles que, pour chaque $k \geq 1$, $\mathbb{P}(Y_k = \sqrt{k}\,) = \mathbb{P}(Y_k = -\sqrt{k}\,) = \frac{1}{2}$; poser $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, $n \geq 1$.

a) Démontrer que $\frac{S_n}{n^{\frac{3}{2}}} \to 0$ en probabilité.

b) Démontrer que $\frac{S_{n^2}}{n^3} \to 0$ presque sûrement.

Corrigé. a) C'est une application de la loi faible des grands nombres. Il est tout aussi simple d'en refaire le raisonnement. Les variables Y_k, $k \in \mathbb{N}$, étant intégrables et centrées, $\mathbb{E}(S_n) = 0$ par linéarite. En vertu alors de l'inégalité de Bienaymé-Tchebitchev, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\bigg(\bigg|\frac{S_n}{n^{\frac{3}{2}}}\bigg| \geq \varepsilon\bigg) \;\leq\; \frac{1}{\varepsilon^2 n^3} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(Y_k).$$

Comme $\mathrm{Var}(Y_k) = \mathbb{E}(Y_k^2) = k$, $\sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(Y_k) = \frac{n(n+1)}{2}$. Il découle alors de l'inégalité précédente que $\mathbb{P}\big(\big|\frac{S_n}{n^{\frac{3}{2}}}\big| \geq \varepsilon\big) \to 0$ quand $n \to \infty$, et donc $\frac{S_n}{n^{\frac{3}{2}}} \to 0$ en probabilité. b) Le long de la sous-suite n^2, $n \in \mathbb{N}$, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\bigg(\bigg|\frac{S_{n^2}}{n^3}\bigg| \geq \varepsilon\bigg) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 n^6} \sum_{k=1}^{n^2} \mathrm{Var}(Y_k) = \frac{n^2(n^2+1)}{2\varepsilon^2 n^6}.$$

La majoration définissant le terme général d'une série convergente (d'ordre $\frac{1}{n^2}$), d'après le critère de convergence presque sûre issu du lemme de Borel-Cantelli, $\frac{S_{n^2}}{n^3} \to 0$ presque sûrement.

Exercice 3. Si Y est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$, calculer $\mathbb{E}(Y^4)$. Soit à présent X_k, $k \in \mathbb{N}$, une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ de moyenne m et de variance σ^2 ; démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^4 = m^4 + 6m^2\sigma^2 + 3\sigma^4 \qquad \text{presque sûrement.}$$

Corrigé. La valeur $\mathbb{E}(Y^4) = 3$ peut être déduite de l'expression de la transformée de Laplace comme dans la Leçon 14. Le calcul peut aussi être repris directement : par le théorème de transport et la densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$,

$$\mathbb{E}(Y^4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^4 e^{-\frac{1}{2}x^2} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

Après une intégration par parties (avec $-e^{-\frac{1}{2}x^2}$ comme primitive de $xe^{-\frac{1}{2}x^2}$), il vient

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 3$$

puisque la variance de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ est 1 (qui découle aussi d'une intégration par parties). Si alors X_1 est de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, elle a même loi que $m + \sigma Y$ et donc

$$\mathbb{E}(X_1^4) \;=\; \mathbb{E}\big((m+\sigma Y)^4\big) \;=\; m^4 + 6m^2\sigma^2\,\mathbb{E}(Y^2) + \sigma^4\,\mathbb{E}(Y^4)$$

où il est utilisé que $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Y^3) = 0$ (par parité). Ainsi, d'après ce qui précède, $\mathbb{E}(X_1^4) = m^4 + 6m^2\sigma^2 + 3\sigma^4$. Il ne reste plus qu'à appliquer la loi des grands nombres à la suite X_k^4, $k \in \mathbb{N}$, pour conclure.

Exercice 4. Soit X_n, $n \in \mathbb{N}$, une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$, et soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \geq 1$; expliquer pourquoi $\frac{S_n}{n} \to 0$ presque sûrement.

a) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ est de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

b) Rappeler (Exercice 1, Leçon 14) pourquoi $\mathbb{P}(X_1 \geq t) \leq \frac{1}{2}\,e^{-\frac{1}{2}t^2}$ pour tout $t \geq 0$, puis $\mathbb{P}(|X_1| \geq t) \leq e^{-\frac{1}{2}t^2}$.

c) Utiliser la question précédent pour démontrer que pour tout $\alpha > \frac{1}{2}$, $\frac{S_n}{n^\alpha} \to 0$ presque sûrement.

d*) Proposer une suite strictement croissante a_n, $n \in \mathbb{N}$, de réels positifs telle que $\frac{a_n}{\sqrt{n}} \to \infty$, $\frac{a_n}{n^\alpha} \to 0$ pour tout $\alpha > \frac{1}{2}$ et $\frac{S_n}{a_n} \to 0$ presque sûrement

Corrigé. Comme la loi commune des X_n est intégrable et centrée, la loi des grands nombres s'applique pour assurer que $\frac{S_n}{n} \to 0$ presque sûrement. a) Les propriétés de stabilité des lois normales indiquent que si X et Y sont indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ et $\mathcal{N}(0,\tau^2)$, alors $X+Y$ est de loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2+\tau^2)$. Par itération, $X_1+\cdots+X_n$ est de loi $\mathcal{N}(0,1+\cdots+1) = \mathcal{N}(0,n)$, et donc par homogénéité $\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1+\cdots+X_n)$ est de loi $\mathcal{N}(0,1)$. b) Comme la loi $\mathcal{N}(0,1)$ est symétrique (voir Exercice 5, Leçon 9), pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}\big(|X_1| \geq t\big) \;=\; \mathbb{P}(X_1 \geq t) + \mathbb{P}(-X_1 \geq t) \;=\; 2\,\mathbb{P}(X_1 \geq t).$$

L'inégalité demandée découle donc de l'Exercice 1, Leçon 14. c) D'après la question précédente, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n^\alpha}\right| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right| \geq \varepsilon\, n^{\alpha-\frac{1}{2}}\right) \leq e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2 n^{2\alpha-1}}$$

puisque $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ a pour loi $\mathcal{N}(0,1)$. Comme $2\alpha - 1 > 0$, $e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2 n^{2\alpha-1}}$, $n \geq 1$, est le terme général d'une série convergente (par exemple $\leq \frac{1}{n^2}$ pour tout n assez grand), et le critère de convergence presque sûre issu du lemme de Borel-Cantelli (Leçon 16) peut être appliqué. d*) En jouant sur le raisonnement précédent, en particulier en examinant des séries convergentes potentielles, le choix de $a_n = \sqrt{n(\ln(n))^\rho}$, $n \geq 2$, $\rho > 1$, fournit un exemple. En effet, de la même façon,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{a_n}\right| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right| \geq \varepsilon(\ln(n))^{\frac{\rho}{2}}\right) \leq e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2(\ln(n))^\rho}$$

qui définit le terme général d'une série convergente (par exemple $\leq \frac{1}{n^2}$ pour tout n assez grand ce qui se vérifie avec prise du logarithme).

Il est une question naturelle de se demander quelle est la plus petite suite a_n, $n \in \mathbb{N}$, de réels positifs assurant la stabilité presque sûre de la suite $\frac{S_n}{a_n}$, $n \in \mathbb{N}$? La réponse est fournit par la suite $a_n = \sqrt{2n\ln(\ln(n))}$, $n \geq 3$, qui donne lieu à la fameuse loi du logarithme itéré exprimant que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{a_n} = 1$$

presque sûrement (en fait pour toute suite X_n, $n \in \mathbb{N}$, de variables aléatoires indépendantes de même loi de moyenne nulle et de variance 1).

Exercice 5. Démontrer que si X_n, $n \in \mathbb{N}$, est une suite de variables aléatoires de carré intégrable sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, deux à deux non correlées, telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathrm{Var}(X_n)}{n^2} < \infty$, alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big[X_k - \mathbb{E}(X_k)\big] \to 0 \quad \text{dans } \mathrm{L}^2.$$

(*Indication* : utiliser le lemme de Kronecker[1] indiquant que si u_n, $n \in \mathbb{N}$, une suite de nombres réels ou à valeurs dans un espace normé, telle que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_n}{n}$ est convergente, alors $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \to 0$.)

Indication. Appliquer le lemme de Kronecker à la suite $X_n - \mathbb{E}(X_n)$, $n \in \mathbb{N}$, dans l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2 = \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Exercice 6 (*Khinchine's*[2] *inequality.*) Let X_n, $n \in \mathbb{N}$, be a sequence of real-valued random variables on some probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, independent with the same Bernoulli distribution $\mathbb{P}(X_1 = +1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$.

a) Show that for every $u \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(e^{uX_1}) \leq e^{\frac{1}{2}u^2}$.

b) Let $a_1, \ldots, a_n$ be real numbers such that $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1$; set $S = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$. Prove that for every $u \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(e^{uS}) \leq e^{\frac{1}{2}u^2}$. Deduce that for any $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}\big(|S| \geq t\big) \leq 2\, e^{-\frac{1}{2}t^2}.$$

c*) Use the preceding question to show that, for any real numbers $a_1, \ldots, a_n$, and any $p > 0$,

$$\left[\mathbb{E}\left(\left|\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right|^p\right)\right]^{1/p} \leq C_p \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2}$$

for some constant $C_p > 0$ only depending on p.

d) Set, for $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Show that for every $\rho > 1$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n (\ln n)^\rho}} = 0 \qquad \text{almost surely.}$$

1. Leopold Kronecker, mathématicien et logicien allemand (1823–1891).
2. Alexandre Khintchine, mathématicien russe et soviétique (1894–1959).

Correction. a) By definition of the law of X_1, for every $u \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(e^{uX_1}) = \frac{1}{2}\,e^u + \frac{1}{2}\,e^{-u} = \cosh(u).$$

A series expansion indicates that

$$\cosh(u) = \sum_{n\geq 0} \frac{u^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n\geq 0} \frac{u^{2n}}{2^n n!} = e^{\frac{1}{2}u^2}$$

since for every $n \geq 0$, $2^n n! \leq (2n)!$ (easy verification). b) By independence and identical distribution, for any $u \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(e^{uS}) = \mathbb{E}\big(e^{u\sum_{k=1}^n a_k X_k}\big) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(e^{ua_k X_k}) \leq \prod_{k=1}^n e^{\frac{1}{2}u^2 a_k^2}$$

where the last inequality results from a). It follows as claimed that $\mathbb{E}(e^{uS}) \leq e^{\frac{1}{2}u^2}$ for every $u \in \mathbb{R}$ since $\sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$. By Markov's inequality, for $t, u > 0$,

$$\mathbb{P}(S \geq t) = \mathbb{P}\big(e^{uS} \geq e^{ut}\big) \leq e^{-ut}\,\mathbb{E}(e^{uS}) \leq e^{-ut+\frac{1}{2}u^2}.$$

For the optimal choice $u = t$, it follows that $\mathbb{P}(S \geq t) \leq e^{-\frac{1}{2}t^2}$ (which also holds at $t = 0$). Together with the same inequality for $-S$ (that has the same distribution as S), the conclusion follows by sub-additivity. c*) By homogeneity, it may be assumed that $\sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$ so that, in the preceding notation, it has to be shown that $\mathbb{E}(|S|^p) \leq C_p^p$. Now (Exercise 1, Lesson 9),

$$\mathbb{E}\big(|S|^p\big) = \int_0^\infty \mathbb{P}\big(|S|^p \geq t\big)dt$$

and by b),

$$\mathbb{E}\big(|S|^p\big) \leq 2\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}t^{\frac{2}{p}}}\,dt.$$

For any $p > 0$, this integral is convergent (and is a function of p), since for example $e^{-\frac{1}{2}t^{\frac{2}{p}}} \leq \frac{1}{t^2}$ for every t large enough, which ensures convergence as

$t \to \infty$. The result is established. (There is also a reverse inequality, with another constant $c_p > 0$, giving rise to the Khintchine inequalities.) d) Fix $\rho > 1$. For any $\varepsilon > 0$, by b) with $a_k = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $k = 1, \dots, n$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{|S_n|}{\sqrt{n(\ln n)^\rho}} \geq \varepsilon\right) \leq 2\,e^{-\frac{1}{2}\,\varepsilon^2 (\ln n)^\rho}.$$

Since $\rho > 1$, the right-hand side is, for example, less than $\frac{1}{n^2}$ for every integer n large enough (take the logarithm), so that it defines the general term of a convergent series. It remains to apply the criterion for almost sure convergence based on the Borel-Cantelli lemma.