

Leçon 2 Exercices corrigés

(Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.)

Exercice 1. Soit μ une mesure sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$.

- a) Soit $B \in \mathcal{A}$; démontrer que l'application $A \in \mathcal{A} \mapsto \mu(B \cap A)$ est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.
- b) Soient $A, B \in \mathcal{A}$ tels que $A \subset B$ et $\mu(A) = \mu(B) < \infty$. Démontrer que $\mu(A \cap C) = \mu(B \cap C)$ pour tout $C \in \mathcal{A}$.

Indications. b) L'inégalité $\mu(A \cap C) \leq \mu(B \cap C)$ découle du fait que $A \subset B$. Pour l'inégalité inverse, observer que

$$\mu(A) = \mu(A \cap C) + \mu(A \cap C^c)$$

et

$$\mu(B) = \mu(B \cap C) + \mu(B \cap C^c) \geq \mu(B \cap C) + \mu(A \cap C^c)$$

(toujours parce que $A \subset B$).

Exercice 2. Soit $\mu_n, n \in \mathbb{N}$, une suite de mesures sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$.

- a) Pour tout $A \in \mathcal{A}$, poser $\mu(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(A)$. Démontrer que μ est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.
- b) Il est à présent supposé que $\mu_n(X) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $p_n, n \in \mathbb{N}$, une suite de réels positifs telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n = 1$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, poser $\mu(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n \mu_n(A)$. Vérifier que μ est une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{A})$.
- c) Considérer les mesures $\mu_1 = \sum_{n \geq 1} \delta_n$ et $\mu_2 = \sum_{n \geq 1} n \delta_n$. Pour chacune de ces mesures, calculer la mesure des ensembles : $A_k = [k, k + 1 + \frac{1}{k^2}]$, $k \geq 1$; $\bigcup_{k=1}^N A_k$; $\bigcup_{k \geq 1} A_k$; $\bigcap_{k=1}^N A_k$; $\bigcap_{k \geq 1} A_k$ ($N \geq 1$).

Indication. a) Découle de la propriété détaillée dans le Paragraphe 3 sur les opérations sur les mesures.

Exercice 3. Si A_n , $n \in \mathbb{N}$, est une famille de parties mesurables d'un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty$, montrer que $\mu(A) = 0$ où $A = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} A_n$ (c'est une partie du *lemme de Borel-Cantelli*¹ qui sera développé dans la Leçon 15).

En déduire que si f_n , $n \in \mathbb{N}$, est une suite de fonctions mesurables sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$ telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(|f_n| \geq \varepsilon) < \infty$ pour tout $\varepsilon > 0$, alors $f_n \rightarrow 0$ μ -presque partout.

Corrigé. Il est clair que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, par sous-additivité,

$$0 \leq \mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{n \geq m} A_n\right) \leq \sum_{n \geq m} \mu(A_n).$$

Le reste de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ convergeant vers 0, la première affirmation s'ensuit. En conséquence, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mu\left(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} \{|f_n| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

Si ε est de la forme $\frac{1}{\ell}$, $\ell \geq 1$, par sous-additivité,

$$\mu\left(\bigcup_{\ell \geq 1} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} \{|f_n| \geq \frac{1}{\ell}\}\right) = 0.$$

Mais, un élément $x \in X$ appartenant à l'ensemble ainsi mesuré exprime que $f_n(x)$ ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. C'est donc que $f_n \rightarrow 0$ μ -presque partout.

1. Francesco Paolo Cantelli, mathématicien italien (1875–1966).

Exercice 4 (*Théorème d'Egorov*²). Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $B \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(B) < \infty$. Soient $f_n, n \in \mathbb{N}$, et f des fonctions mesurables sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$ telles que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pour tout $x \in B$.

a) Pour $\varepsilon > 0$, poser

$$G_n(\varepsilon) = \{x \in B; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$H_m = \bigcup_{n \geq m} G_n(\varepsilon)$, $H = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} H_m$. Identifier H et démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(H_n) = 0.$$

En déduire que pour tout $\eta > 0$, il existe $G(\eta, \varepsilon) \in \mathcal{A}$ et $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(G(\eta, \varepsilon)) \leq \eta$ et $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in B \setminus G(\eta, \varepsilon)$ et $n \geq m_0$.

b*) Démontrer que pour tout $\eta > 0$, il existe $G(\eta) \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(G(\eta)) \leq \eta$ et $f_n, n \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers f sur $B \setminus G(\eta)$.

Remarque. Il est essentiel dans la démonstration que $\mu(B) < \infty$.

Corrigé. a) Si $x \in H$, pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq m$ tel que $|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon$. Or $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ par hypothèse, de sorte que $H = \emptyset$. Les ensembles $H_m, m \in \mathbb{N}$, forment donc une suite décroissante d'ensembles mesurables d'intersection vide. Ils sont en outre contenus dans B qui est de mesure finie. D'après la propriété de convergence monotone décroissante (car $\mu(B) < \infty$), il s'ensuit que $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(H_m) = 0$. Ainsi, pour tout $\eta > 0$, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(H_{m_0}) \leq \eta$. Poser alors $G(\eta, \varepsilon) = H_{m_0}$ qui répond à la question. b*) La question précédente appliquée à $\varepsilon = \frac{1}{\ell}$ et $\frac{\eta}{\ell}$ pour tout $\ell \geq 1$ fournit

$$G(\eta) = \bigcup_{\ell \geq 1} G\left(\frac{\eta}{\ell}, \frac{1}{\ell}\right)$$

tel que $\mu(G(\eta)) \leq \sum_{\ell \geq 1} \frac{\eta}{2^\ell} = \eta$. La convergence de $f_n, n \in \mathbb{N}$, vers f est uniforme sur $B \setminus G(\eta)$ car sur cet ensemble, pour tout $\ell \geq 1$, il existe $m_0(\ell)$ tel que $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\ell}$ pour tout $n \geq m_0(\ell)$.

2. Dmitri Fiodorovitch Egorov, mathématicien russe et soviétique (1869–1931).

Exercice 5 (*Support d'une mesure*). Soit μ une mesure sur un espace métrique (X, d) muni de la tribu des boréliens $\mathcal{B}(X)$; on appelle support de μ , noté $\text{Supp}(\mu)$, l'ensemble des $x \in X$ pour lesquels $\mu(B(x, \varepsilon)) > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$, où $B(x, \varepsilon)$ est la boule (ouverte) de centre x et de rayon ε . Vérifier que $\text{Supp}(\mu)$ est un fermé de (X, d) .

Corrigé. Soit $x_n, n \in \mathbb{N}$, une suite d'éléments de $\text{Supp}(\mu)$ convergeant vers $x \in X$, et soit $\varepsilon > 0$; pour n assez grand, $x_n \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$, de sorte que $B(x, \varepsilon) \supset B(x_n, \frac{\varepsilon}{2})$. Ainsi $\mu(B(x, \varepsilon)) \geq \mu(B(x_n, \frac{\varepsilon}{2})) > 0$ et $x \in \text{Supp}(\mu)$. Donc $\text{Supp}(\mu)$ est fermé dans (X, d) d'après la caractérisation séquentielle.

Exercice 6. Soit $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (E, \mathcal{B})$ une fonction mesurable, et soit μ une mesure sur $(X, \mathcal{A})$. Démontrer que l'image μ_f de μ par f est une mesure sur $(E, \mathcal{B})$.

Si $X = \mathbb{R}$ muni de la tribu des boréliens, et f est la fonction partie entière, $f(x) = \lfloor x \rfloor, x \in \mathbb{R}$, décrire la mesure image de la mesure de Lebesgue λ par f .

Corrigé. La première partie s'obtient par vérification des axiomes d'une mesure. Par définition f est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et $f(x) = k$ si $k \leq x < k + 1$. Donc, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\lambda_f(\{k\}) = \lambda(x \in \mathbb{R}; f(x) = k) = \lambda([k, k + 1]) = 1.$$

Ainsi λ_f est la mesure de comptage sur $\mathbb{Z}$, $\lambda_f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f = 0$ presque partout (pour la mesure de Lebesgue λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$); démontrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Indication. Si $f(x) \neq 0$, par exemple $f(x) = a > 0$, il existe par continuité un intervalle ouvert I contenant x sur lequel $f(y) \geq \frac{a}{2}$.

Exercice 8 (*Unicité de la mesure de Lebesgue*). Cet exercice a pour but de vérifier l'assertion suivante : toute mesure μ sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ invariante par translation et telle que $0 < \mu([0, 1]^d) < \infty$ est un multiple de la mesure de Lebesgue $\lambda = \lambda^d$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

a) Soit $I =]a_1, b_1] \times \cdots \times]a_d, b_d]$ où les a_ℓ, b_ℓ , $\ell = 1, \dots, d$, sont rationnels ; montrer qu'il existe $M, k \in \mathbb{N}$ et des points $x^{(j)} \in \mathbb{R}^d$ tels que

$$I = \bigcup_{j=1}^k (x^{(j)} +]0, \frac{1}{M}]^d)$$

où la réunion est disjointe.

b) Par l'invariance par translation de λ et μ , en déduire que $\mu(I) = \mu([0, 1]^d)\lambda(I)$. Conclure.

Corrigé. a) Si a_1 et b_1 sont rationnels, il existe $M \in \mathbb{N}$ tels que $a_1 = \frac{p}{M}$ et $b_1 = \frac{q}{M}$ pour des entiers relatifs p et q , $p < q$. Alors

$$]a_1, b_1] = \bigcup_{j=p}^{q-1} (\frac{j}{M} +]0, \frac{1}{M}])$$

En choisissant un entier M comme dénominateur commun de tous les a_ℓ, b_ℓ , $\ell = 1, \dots, d$, la même description fournit le résultat annoncé en dimension d .

b) Par hypothèse d'invariance par translation de μ et de λ ,

$$\mu(I) = k \mu([0, \frac{1}{M}]^d), \quad \lambda(I) = k \lambda([0, \frac{1}{M}]^d)$$

de sorte que

$$\frac{\mu(I)}{\lambda(I)} = \frac{\mu([0, \frac{1}{M}]^d)}{\lambda([0, \frac{1}{M}]^d)}.$$

Maintenant la même identité vaut pour $I =]0, 1]^d$, pour lequel $\lambda([0, 1]^d) = 1$ par construction de la mesure de Lebesgue λ . L'égalité $\mu(I) = \mu([0, 1]^d)\lambda(I)$

annoncée s'ensuit. En particulier μ est aussi σ -finie. Au facteur $\mu([0, 1]^d)$ près, les mesures σ -finies μ et λ coïncident sur tous les rectangles (à côtés rationnels), donc sur la tribu engendrée, la tribu borélienne, d'après l'unicité dans le théorème de Carathéodory.

Exercice 9 (*Ensemble de Cantor*³). Poser $E_0 = [0, 1]$. Enlever le tiers central (ouvert) de E_0 pour obtenir $E_1 = I_1^1 \cup I_1^2$. Répéter la même opération pour I_1^1 et I_1^2 pour obtenir $E_2 = I_2^1 \cup I_2^2 \cup I_2^3 \cup I_2^4$, et ainsi de suite.

a) Démontrer que chaque E_n , $n \in \mathbb{N}$, est compact. En déduire que $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$ est non vide et compact (l'ensemble C est appelé *l'ensemble de Cantor*).

b) Montrer que $\lambda(C) = 0$ (où λ est la mesure de Lebesgue restreinte à $[0, 1]$).

c) Démontrer que C ne contient aucun intervalle ouvert (et donc que l'intérieur de C est vide).

d) Montrer que $C \setminus \{1\}$ comprend les sommes de toutes les séries $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$ où $x_n \in \{0, 2\}$. En déduire que C n'est pas dénombrable, en fait a la même cardinalité que $[0, 1]$ (pourtant $\lambda(C) = 0 \neq 1 = \lambda([0, 1])$).

Corrigé. a) Chaque E_n est une réunion finie d'intervalles fermés bornés, donc forme un ensemble compact. Les E_n , $n \in \mathbb{N}$, sont par ailleurs décroissants. Une intersection décroissante de compacts non vides est un ensemble compact non vide. b) D'après les propriétés d'une mesure (finie), $\lambda(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(E_n)$. Or, par construction, E_n est la réunion de 2^n intervalles disjoints de longueur $\frac{1}{3^n}$, soit $\lambda(E_n) = \frac{2^n}{3^n}$. D'où l'affirmation $\lambda(C) = 0$. c) Si I est un intervalle ouvert (de $[0, 1]$) contenu dans C , $0 < \lambda(I) \leq \lambda(C) = 0$ ce qui est impossible. d) Par analogie avec la décomposition dyadique d'un nombre réel x de $[0, 1[$, la représentation triadique est de la forme $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$ avec $x_n \in \{0, 1, 2\}$, suivant qu'au niveau n , x est dans le premier, deuxième ou troisième intervalle de la cellule au rang $n - 1$. La décomposition des éléments de C découle alors

3. Georg Cantor, mathématicien allemand (1845–1918).

de la définition de ce dernier (et démontre, par bijection avec la décomposition dyadique, que C a la même cardinalité que $[0, 1]$).