Leçon 20 Exercices corrigés

(*Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.*)

Exercice 1. Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de même loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$; soit la suite de variables aléatoires X_n, $n \in \mathbb{N}$, définie par $X_n = U$ si n est pair et $X_n = V$ si n est impair.

a) Que dire de la convergence de la suite X_n, $n \in \mathbb{N}$, presque sûrement, en probabilité, dans L^1 ?

b) Que dire de la convergence des suites F_{X_n}, $n \in \mathbb{N}$ (fonctions de répartition) et φ_{X_n}, $n \in \mathbb{N}$ (fonctions caractéristiques) ?

Corrigé. a) Le long de la suite des nombres pairs, la suite de variables aléatoires X_n, $n \in \mathbb{N}$, est constante égale à U, et de même le long des impairs, elle est constante égale à V. Les seules variables aléatoires limites possibles sont donc U ou V. Or, pour $\varepsilon > 0$, si n est impair

$$\mathbb{P}\big(|X_n - U| \geq \varepsilon\big) = \mathbb{P}\big(|V - U| \geq \varepsilon\big).$$

Par indépendance de U et V, d'après les propriétés des lois normales, $V - U$ à pour loi $\mathcal{N}(0,2)$, et donc $\mathbb{P}(|V - U| \geq \varepsilon)$ est égal à un nombre strictement positif fixé (ne dépendant que de ε). Il n'est donc par possible que la suite X_n, $n \in \mathbb{N}$, converge en probabilité, et donc a fortiori presque sûrement ou dans L^1, vers U. De même, il n'y pas convergence vers V. b) Pour tout entier n pair, $F_{X_n} = F_U$ et $\varphi_{X_n} = \varphi_U$, et pour tout entier n impair, $F_{X_n} = F_V$ et $\varphi_{X_n} = \varphi_V$. Comme U et V ont la même loi, il s'ensuit que les suites F_{X_n} et φ_{X_n}, $n \in \mathbb{N}$, sont constantes (égales respectivement à $F_U = F_V$ et $\varphi_U = \varphi_V$). Il y a donc convergence en loi de la suite X_n, $n \in \mathbb{N}$, vers U (ou V) de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 2. Soit α_n, $n \in \mathbb{N}$, un suite de nombres appartenant à $[0,1]$; à cette suite est associée une suite X_n, $n \in \mathbb{N}$, de variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dont les lois vérifient

$$F_{X_n}(t) \;=\; \mathbb{P}(X_n \le t) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0, \\ \alpha_n + (1-\alpha_n)\, t^n & \text{si} \quad t \in [0,1[, \\ 1 & \text{si} \quad t \ge 0. \end{cases}$$

a) À quelles conditions sur la suite α_n, $n \in \mathbb{N}$, la suite X_n, $n \in \mathbb{N}$, converge-t-elle en loi ?

b) Si $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ ou 1, examiner la convergence en probabilité ou presque sûre.

Corrigé. a) Comme $\lim_{n\to\infty}(1-\alpha_n)t^n = 0$ pour tout $t \in [0,1[$ quelque soit la suite α_n, $n \in \mathbb{N}$ (dans $[0,1]$), deux cas sont à considérer. Si la suite α_n, $n \in \mathbb{N}$, converge vers $\alpha \in [0,1]$, pour tout $t \in [0,1[$,

$$\lim_{n\to\infty} \big[\alpha_n + (1-\alpha_n)\, t^n\big] \;=\; \alpha.$$

La suite X_n, $n \in \mathbb{N}$, converge alors en loi vers une variable aléatoire X dont la fonction de répartition F_X, limite de la suite des fonctions de répartition F_{X_n}, $n \in \mathbb{N}$, est

$$F_X(t) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0, \\ \alpha & \text{si} \quad t \in [0,1[, \\ 1 & \text{si} \quad t \ge 0. \end{cases}$$

Si $\alpha \in]0,1[$, X est de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1-\alpha)$ sur $\{0,1\}$. Si $\alpha = 0$, X est presque sûrement constante égale à 1, et si $\alpha = 1$, X est presque sûrement constante égale à 0. Dans le cas où la suite α_n, $n \in \mathbb{N}$, converge pas, il ne peut y avoir de convergence en loi de X_n, $n \in \mathbb{N}$ (puisque que la limite de $F_{X_n}(t)$, $n \in \mathbb{N}$, n'existe pas pour $t \in [0,1[$). b) Si $\alpha = 1$, pour tout $0 < \varepsilon < 1$,

$$\mathbb{P}\big(|X_n| \ge \varepsilon\big) \;=\; \mathbb{P}(X_n \ge \varepsilon) \;=\; 1 - \alpha_n - (1-\alpha_n)\, \varepsilon^n$$

qui tend vers 0 quand $n \to \infty$. Donc X_n, $n \in \mathbb{N}$, converge en probabilité vers la variable aléatoire $X = 0$. Si en outre $\sum_{n \in \mathbb{N}} (1 - \alpha_n) < \infty$, alors la convergence est presque sûre. Une étude similaire peut être menée si $\alpha = 0$.

Exercice 3. Soit X_θ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$ de paramètre $\theta > 0$; poser $Y_\theta = \frac{1}{\sqrt{\theta}}(X_\theta - \theta)$. Démontrer que Y_θ converge en loi quand $\theta \to \infty$ et déterminer sa limite. En déduire que

$$\lim_{n \to \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2} \, .$$

Corrigé. Il s'agit ici d'une limite en loi le long d'un paramètre continu, mais les définitions sont les mêmes. L'outil de la fonction caractéristique peut être mis en œuvre. Comme X_θ est de loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(e^{iuX_\theta}) = e^{\theta(e^{iu}-1)}$ de sorte que

$$\mathbb{E}\big(e^{iuY_\theta}\big) = e^{-iu\sqrt{\theta} + \theta\left(e^{\frac{iu}{\sqrt{\theta}}} - 1\right)}.$$

Un développement limité à l'ordre 2 indique que

$$\lim_{\theta \to \infty} \big[- iu\sqrt{\theta} + \theta\big(e^{\frac{iu}{\sqrt{\theta}}} - 1\big)\big] = -\frac{1}{2} u^2 \, .$$

Comme $e^{-\frac{1}{2}u^2}$, $u \in \mathbb{R}$, est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire G de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, il s'ensuit que Y_θ converge en loi quand $\theta \to \infty$ vers G. Dans la limite demandée, il est possible de reconnaître que

$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \mathbb{P}(X_n \leq n)$$

pour X_n, $n \geq 1$, une variable aléatoire de loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$ de paramètre $\theta = n$. Comme $\mathbb{P}(X_n \leq n) = \mathbb{P}(Y_n \leq 0)$, le passage aux fonctions de répartition dans la convergence en loi précédente (avec $\theta = n$) fournit en particulier que

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(Y_n \leq 0) = \mathbb{P}(G \leq 0) = \frac{1}{2}$$

ce qui conduit à la limite demandée.

Exercice 4*. Si μ et ν sont deux mesures de probabilité sur un espace mesurable $(E, \mathcal{B})$, la distance en variation totale (Exercice 15, Leçon 3) est rappelée comme étant définie par

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu) \,=\, \sup_{B \in \mathcal{B}} \big|\mu(B) - \nu(B)\big|.$$

Vérifier que si X et Y sont deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(E, \mathcal{B})$ de lois respectives μ et ν,

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu) \,\leq\, \mathbb{P}(X \neq Y).$$

Soient à présent Y et T deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que Y suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(p)$ de paramètre $p \in]0,1[$ et T une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(q)$ sur $\{0,1\}$ de paramètre de succès $q = 1 - (1-p)e^p$ (observer que $(1-p)e^p \in]0,1[$).

a) Calculer la loi de $X = 1 - \mathbb{1}_{\{Y=T=0\}}$ et montrer que

$$\mathbb{P}(X \neq Y) \,=\, p(1 - e^{-p}) \,\leq\, p^2.$$

b) Soient X_k, $k = 1, \ldots, n$, des variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p_k)$ de paramètres respectifs $p_k \in]0,1[$, $k = 1, \ldots, n$, et soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Démontrer qu'il existe une variable aléatoire Z de loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$ de paramètre $\theta = p_1 + \cdots + p_n$ telle que

$$d_{\mathrm{TV}}(\mathbb{P}_{S_n}, \mathbb{P}_Z) \,\leq\, p_1^2 + \cdots + p_n^2.$$

c) Application. Soit Z une variable aléatoire de loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$, $\theta > 0$, et soit Z_n, $n \in \mathbb{N}$, $n > \theta$, une suite de variables aléatoires de loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{\theta}{n})$. Démontrer que pour tout entier $k \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = k) = \mathbb{P}(Z = k)$. En désignant par ν la mesure de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$ et par μ_n la mesure binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{\theta}{n})$, déduire de la première partie de l'exercice que

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu_n, \nu) \le \frac{\theta^2}{n}\,.$$

Corrigé. Si X et Y sont respectivement de lois μ et ν, pour tout $B \in \mathcal{B}$,

$$\mu(B) - \nu(B) = \mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(Y \in B).$$

Comme

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in B) &= \mathbb{P}(X = Y, X \in B) + \mathbb{P}(X \neq Y, X \in B) \\ &\le \mathbb{P}(Y \in B) + \mathbb{P}(X \neq Y),\end{aligned}$$

il s'ensuit que $\mu(B) - \nu(B) \le \mathbb{P}(X \neq Y)$. En échangeant les rôles de X et Y, la majoration est la même pour $\nu(B) - \mu(B)$, ce qui démontre l'affirmation. a) Il est clair que X ne prend que les valeurs 0 et 1. Dire que $X = 0$ revient à dire que $Y = T = 0$, et donc par indépendance,

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(Y = T = 0) = \mathbb{P}(Y = 0)\,\mathbb{P}(T = 0).$$

Par définition des lois de Y et T, $\mathbb{P}(Y = 0) = e^{-p}$ et $\mathbb{P}(T = 0) = 1 - q = (1-p)e^p$. Donc $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$, autrement dit la loi de X est de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Par définition de la variable $X = 1 - \mathbb{1}_{\{Y=U=0\}}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = Y) &= \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) \\ &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(Y = 1)\end{aligned}$$

car si $X = 0$ nécessairement $Y = 0$, et si $Y = 1$ nécessairement $X = 1$. Comme $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = pe^{-p}$,

$$\mathbb{P}(X \neq Y) = p(1 - e^{-p}),$$

et l'inégalité élémentaire $1 - e^{-p} \leq p$ pour $p \in [0,1]$ fournit la conclusion. b) En s'inspirant de la question précédente, définir des variables aléatoires indépendantes Y_k, $k = 1, \ldots, n$, de lois de Poisson respectives $\mathcal{P}(p_k)$, et poser $Z = Y_1 + \cdots = Y_n$. Alors, en vertu de la propriété de stabilité des lois de Poisson, Z est de loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$ où $\theta = p_1 + \cdots + p_n$ et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n \neq Z) \;&=\; \mathbb{P}\big(X_1 + \cdots + X_n \neq Y_1 + \cdots + Y_n\big) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \neq Y_k) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} p_k^2.
\end{aligned}$$

La première inégalité découle de l'inclusion

$$\big\{X_1 + \cdots + X_n \neq Y_1 + \cdots + Y_n\big\} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \{X_k \neq Y_k\}$$

(qui se démontre par passage au complémentaire) et de la sous-additivité d'une probabilité ; la seconde résulte de l'application de la question a) aux couples de même loi (X_k, Y_k), $k = 1, \ldots, n$. c) La convergence de $\mathbb{P}(Z_n = k)$ vers $\mathbb{P}(Z = k)$ pour tout k est décrite dans la leçon, et assure que la suite Z_n, $n \in \mathbb{N}$, converge en loi vers Z. Le seconde partie de la question va fournir une conclusion plus forte en variation totale, avec en outre une vitesse de convergence. En effet, en choisissant $p_k = \frac{\theta}{n}$ pour tout $k = 1, \ldots, n$, il ressort immédiatement de la question b), puisque S_n a pour loi $\mathcal{B}(n, \frac{\theta}{n})$ et Z a pour loi $\mathcal{P}(\theta)$, et de la première partie de l'exercice, que

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu_n, \nu) \;\leq\; n \left(\frac{\theta}{n}\right)^2 \;=\; \frac{\theta^2}{n}\,.$$