

Leçon 3 Exercices corrigés

(Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.)

Exercice 1. Démontrer que si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré et $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable positive, l'application

$$\nu(A) = \int_A f d\mu = \int_X (\mathbb{1}_A f) d\mu, \quad A \in \mathcal{A},$$

est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$. Elle vérifie en outre que $\nu(A) = 0$ si $\mu(A) = 0$.

Corrigé. Soit une famille A_n , $n \in \mathbb{N}$, d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints ; pour tout $N \geq 1$, par disjonction et linéarité (relation de Chasles),

$$\int_X (\mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^N A_n} f) d\mu = \int_X \left(\sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{A_n} \right) f d\mu = \sum_{n=1}^N \int_X (\mathbb{1}_{A_n} f) d\mu.$$

Lorsque $N \rightarrow \infty$, le théorème de convergence monotone permet d'affirmer que $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_X (\mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^N A_n} f) d\mu = \int_X (\mathbb{1}_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} f) d\mu$ de sorte que

$$\nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n),$$

ce qu'il fallait démontrer. (Le dernier argument ne fait que développer ceux conduisant au Corollaire 4 sur le théorème de convergence monotone pour les séries.) Si $\mu(A) = 0$, la fonction $\mathbb{1}_A f$ est nulle μ -presque partout (l'ensemble où f n'est pas nulle est contenue dans A). Donc $\nu(A) = \int_X (\mathbb{1}_A f) d\mu = 0$.

Exercice 2 (*Continuité de l'intégrale au voisinage de la partie vide.*) Soit f une fonction intégrable sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $A \in \mathcal{A}$ vérifie $\mu(A) \leq \eta$, alors $\int_A |f| d\mu \leq \varepsilon$.

Corrigé. Par convergence monotone ou dominée, il existe $t > 0$ tel que $\int_{\{|f|>t\}} |f|d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, par la relation de Chasles et la conservation de l'ordre,

$$\begin{aligned} \int_A |f|d\mu &= \int_{A \cap \{|f| \leq t\}} |f|d\mu + \int_{A \cap \{|f| > t\}} |f|d\mu \\ &\leq t\mu(A \cap \{|f| \leq t\}) + \int_{\{|f| > t\}} |f|d\mu \\ &\leq t\mu(A) + \int_{\{|f| > t\}} |f|d\mu \\ &\leq t\mu(A) + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Si $\eta = \frac{\varepsilon}{2t}$, l'affirmation s'ensuit.

Exercice 3. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré fini, et soit $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable ; démontrer que les quatre assertions suivantes sont équivalentes : (i) f est intégrable par rapport à μ ; (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{|f| \geq n\}} |f|d\mu = 0$; (iii) $\sum_{n \in \mathbb{N}} n\mu(n \leq |f| < n+1) < \infty$; (iv)* $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(|f| \geq n) < \infty$.

Corrigé. Si f est intégrable, d'après les théorèmes de convergence monotone ou dominée, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{|f| \geq n\}} |f|d\mu = 0$. Réciproquement, si cette limite est nulle, il existe n tel que $\int_{\{|f| \geq n\}} |f|d\mu \leq 1$ (par exemple). Mais alors, par la relation de Chasles,

$$\int_X |f|d\mu = \int_{\{|f| < n\}} |f|d\mu + \int_{\{|f| \geq n\}} |f|d\mu \leq n\mu(|f| < n) + 1$$

qui est fini car μ est finie. L'équivalence entre (i) et (iii) est une comparaison

entre intégrale et série, à nouveau à travers l'identité de Chasles :

$$\begin{aligned}
\int_X |f| d\mu &= \sum_{n \geq 0} \int_{\{n \leq |f| < n+1\}} |f| d\mu \\
&\leq \sum_{n \geq 0} (n+1) \mu(n \leq |f| < n+1) \\
&\leq \mu(\{|f| < 1\}) + 2 \sum_{n \geq 1} n \mu(n \leq |f| < n+1)
\end{aligned}$$

Donc si la série converge, f est intégrable, et la réciproque est identique par comparaison inférieure. Pour l'équivalence avec (iv), pour tout $N \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N \mu(|f| \geq n) &= \sum_{n=1}^N \sum_{k \geq n} \mu(k \leq |f| < k+1) \\
&= \sum_{k \geq 1} \sum_{n=1}^{\min(N,k)} \mu(k \leq |f| < k+1) \\
&= \sum_{k \geq 1} \min(N, k) \mu(k \leq |f| < k+1).
\end{aligned}$$

Quand $N \rightarrow \infty$, l'équivalence (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) en découle.

Exercice 4 (*Lemme de Scheffé*¹). Soient f_n , $n \in N$, f des fonctions positives intégrables sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$ telles que $f_n \rightarrow f$ μ -presque partout et $\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0.$$

(Il pourra être établi pour commencer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (f - f_n)^+ d\mu = 0$.)

1. Henry Scheffé, statisticien américain (1907–1977).

Corrigé. Comme, par continuité, $(f - f_n)^+ \rightarrow 0$ μ -presque partout, et $(f - f_n)^+ \leq f$, $n \in \mathbb{N}$, le théorème de convergence dominée indique que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (f - f_n)^+ d\mu = 0$. Pour tout nombre réel a , $|a| = 2a^+ - a$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_X |f - f_n| d\mu = 2 \int_X (f - f_n)^+ d\mu - \int_X (f - f_n) d\mu.$$

La conclusion s'ensuit d'après ce qui précède et les hypothèses.

Exercice 5. Démontrer à l'aide du théorème de convergence dominée que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

Indications : utiliser la mesure de comptage sur $\mathbb{N} \cup \{0\}$; développer $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ par la formule du binôme, et identifier une suite de fonctions f_n (sur $\mathbb{N} \cup \{0\}$) et sa limite f .)

Corrigé. Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé dans la suite; en suivant les indications,

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!n^k} \frac{z^k}{k!}.$$

Soit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n la fonction sur $\mathbb{N} \cup \{0\}$ définie par

$$f_n(k) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!n^k} \frac{z^k}{k!} & \text{si } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{si } k > n, \end{cases}$$

de sorte que, si μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \int_{\mathbb{N} \cup \{0\}} f_n d\mu.$$

Pour chaque k fixé, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(k) = \frac{z^k}{k!} = f(k)$. Par ailleurs, $|f_n(k)| \leq \frac{|z|^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, en module, de sorte que la suite f_n , $n \in \mathbb{N}$, est uniformément

dominée par la fonction $\frac{|z|^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, intégrable par rapport à la mesure de comptage sur $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Par application du théorème de convergence dominée pour des fonctions à valeurs complexes (c'est-à-dire simplement ce théorème sur les parties réelle et imaginaire),

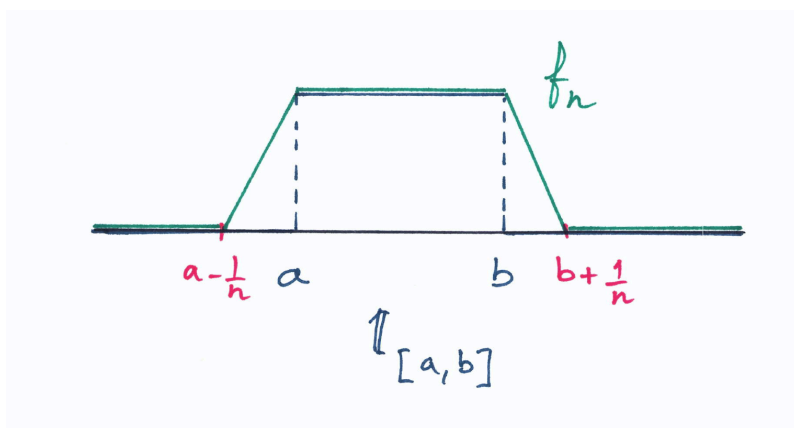
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{N} \cup \{0\}} f_n d\mu = \int_{\mathbb{N} \cup \{0\}} f d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

C'est la conclusion annoncée.

Exercice 6. Soient μ et ν deux mesures finies sur la σ -algèbre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boréliens de $\mathbb{R}$; démontrer que si $\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \int_{\mathbb{R}} f d\nu$ pour toute fonction continue bornée $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors $\mu = \nu$. (*Indication* : approcher l'indicatrice $\mathbb{1}_{[a,b]}$ par une fonction continue bornée.)

Corrigé. Si $a < b$, poser pour tout $n \geq 1$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a - \frac{1}{n}, \\ n(x - a) + 1 & \text{si } a - \frac{1}{n} < x < a, \\ 1 & \text{si } a \leq x \leq b, \\ -n(x - b) + 1 & \text{si } b < x < b + \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{si } x \geq b + \frac{1}{n}. \end{cases}$$



La fonction f_n est continue et bornée (par 1). Par construction,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = \mu([a, b]) + \int_{]a-\frac{1}{n}, a[} [n(x-a)+1] d\mu + \int_{]b, b+\frac{1}{n}[} [-n(x-b)+1] d\mu.$$

Or

$$\left| \int_{]a-\frac{1}{n}, a[} [n(x-a)+1] d\mu \right| \leq \int_{]a-\frac{1}{n}, a[} |n(x-a)+1| d\mu \leq \mu(]a-\frac{1}{n}, a[)$$

qui tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$ (car la famille d'intervalles $]a-\frac{1}{n}, a[$, $n \geq 1$, décroît vers la partie vide et μ est finie). Par le même raisonnement sur les intervalles $]b, b+\frac{1}{n}[$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = \mu([a, b]).$$

Avec la propriété correspondante le long de la mesure ν , il s'ensuit que $\mu([a, b]) = \nu([a, b])$ pour tout intervalle $[a, b]$, $a < b$. La tribu borélienne étant engendrée par les intervalles, la propriété d'unicité dans le théorème de Carathéodory (Théorème 5, Leçon 2) assure que $\mu = \nu$.

Exercice 7. Soient les fonctions $u(x) = \mathbb{1}_{\{\frac{1}{n}; n \geq 1\}}(x)$ et $v(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$; discuter de la véracité des assertions suivantes :

(i) La fonction u est continue partout sauf sur un ensemble dénombrable de points. Comme ce dernier est de mesure de Lebesgue nulle, u est presque partout continue, et donc intégrable au sens de Riemann.

(ii) La fonction v est continue partout sauf sur l'ensemble $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Comme ce dernier est de mesure de Lebesgue nulle, v est presque partout continue, et donc intégrable au sens de Riemann.

(iii) Les fonctions u et v sont intégrables au sens de Lebesgue et $\int_{\mathbb{R}} u d\lambda = \int_{\mathbb{R}} v d\lambda = 0$.

(iv) La fonction v n'est pas intégrable au sens de Riemann.

Indications. Appliquer les propriétés et théorèmes de la leçon.

Exercice 8. Soit $f_n = \frac{1}{n^3} \mathbb{1}_{[1,n]}$, $n \geq 1$; existe-t-il une fonction intégrable positive h (pour la mesure de Lebesgue sur $[1, \infty[$) telle que $f_n \leq h$, $n \geq 1$? Même question pour $f_n = \frac{1}{n \ln(n)} \mathbb{1}_{[1,n]}$, $n \geq 2$.

Exercice 9. Étudier les limites quand n tend vers l'infini de

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x} \cos(x) dx; \quad \int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n} dx; \quad \int_1^\infty \frac{1+nx}{(1+x)^n} dx.$$

Exercice 10 (*Fonction Gamma*). Soit $\Gamma(p) = \int_{]0,\infty[} x^{p-1} e^{-x} d\lambda(x)$, $p > 0$, la fonction Gamma. Démontrer que Γ est continue, indéfiniment dérivable, et calculer sa dérivée n -ième. Montrer que l'on a $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ pour tout $p > 0$, et en déduire l'expression de $\Gamma(n+1)$ lorsque $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. Dans cet exercice, $(X, \mathcal{B}, \lambda)$ est l'espace mesuré défini par $X =]0, \infty[$, $\mathcal{B}$ la tribu borélienne sur X et λ la mesure de Lebesgue. Soit la fonction

$$f(t) = \int_X e^{-x^2 - \frac{t}{x^2}} d\lambda(x).$$

Quel est le domaine de définition de f ? Démontrer que f est continue sur $[0, \infty[$, dérivable sur $]0, \infty[$. Établir que pour tout $t > 0$, $f'(t) = -\frac{1}{\sqrt{t}} f(t)$. En déduire l'expression de $f(t)$.

Exercice 12. Soit la fonction $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (]0, \infty[, \mathcal{B}(]0, \infty[))$ définie par $f(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Décrire l'image de la mesure de Lebesgue λ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par la fonction $f(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Corrigé. La mesure image λ_f est portée par $]0, \infty[$ (car f y prend ses valeurs). Soit $]a, b]$ un intervalle de $]0, \infty[$; par définition de mesure image,

$$\lambda_f([a, b]) = \lambda(\{x \in X; a < e^{-x} \leq b\}) = \ln(b) - \ln(a).$$

Comme

$$\ln(b) - \ln(a) = \int_a^b \frac{1}{x} dx = \int_{]a,b]} \frac{1}{x} d\lambda$$

(au sens de Riemann ou de Lebesgue), la mesure λ_f coïncide, sur tous les intervalles $]a, b]$, $0 < a < b < \infty$, avec la mesure de densité $\frac{1}{x}$, $x \in]0, \infty[$, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Par l'unicité dans le théorème de Carathéodory (Théorème 4, Leçon 2), ces deux mesures sont identiques.

Exercice 13* (*Méthode de Laplace*²). Soit f une fonction positive de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1, +1]$ dont le maximum (global) est atteint uniquement en 0, et telle que $f(0) = 1$ et $f''(0) < 0$.

a) En utilisant une formule de Taylor, démontrer que pour tout $0 < \varepsilon < -f''(0)$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [-\eta, +\eta]$,

$$1 + \left(f''(0) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq 1 + \left(f''(0) + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{x^2}{2}$$

b) En faisant usage des inégalités élémentaires $e^{u-u^2} \leq 1+u \leq e^u$ pour $u \geq -\frac{1}{2}$, en déduire que pour tout $x \in [-\eta, +\eta]$,

$$e^{\frac{1}{2}(f''(0)-\varepsilon)x^2} \leq f(x) \leq e^{\frac{1}{2}(f''(0)+\varepsilon)x^2}.$$

c) Démontrer l'équivalence, pour $r \rightarrow \infty$,

$$\int_{[-1, +1]} f^r d\lambda \sim \sqrt{\frac{2\pi}{-rf''(0)}}.$$

(Décomposer l'intégrale sur $[-\eta, +\eta]$ et son complémentaire.)

d) Application à la fonction Gamma d'Euler Γ . Démontrer que, pour tout $p > 0$,

$$\Gamma(p+1) = p^{p+1} e^{-p} \int_{[-1, \infty[} (x+1)^p e^{-px} d\lambda.$$

2. Pierre-Simon de Laplace, mathématicien, astronome, physicien et homme politique français (1749–1827).

En appliquant c) (étendu à $[-1, \infty[$), déduire l'équivalent quand $p \rightarrow \infty$ (*formule de Stirling*³)

$$\Gamma(p+1) \sim \sqrt{2\pi p} p^p e^{-p}.$$

Corrigé. a) Comme f'' est continue sur $[-1, +1]$, il existe $\eta > 0$ tel que $|f''(x) - f''(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $x \in [-\eta, +\eta]$. D'après la formule de Taylor à l'ordre 2 avec reste intégral,

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \int_0^x (x-u)f''(u)du \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} f''(0) + \int_0^x (x-u)[f''(u) - f''(0)]du \end{aligned}$$

(où il a été utilisé que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$). Ainsi

$$1 + \left(f''(0) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq 1 + \left(f''(0) + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{x^2}{2}$$

pour tout $x \in [-\eta, +\eta]$. b) Pour utiliser les inégalités élémentaires $e^{u-u^2} \leq 1+u \leq e^u$ pour $u \geq -\frac{1}{2}$, choisir également $\eta > 0$ de sorte que $(f''(0) - \frac{\varepsilon}{2})\frac{x^2}{2} \geq -\frac{1}{2}$ et

$$\left(f''(0) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{x^2}{2} - \left(f''(0) - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \frac{x^4}{4} \geq (f''(0) - \varepsilon) \frac{x^2}{2}$$

pour tout $x \in [-\eta, +\eta]$. c) En suivant l'indication, pour tout $r > 0$,

$$\int_{[-1, +1]} f^r d\lambda = \int_{[-\eta, +\eta]} f^r d\lambda + \int_{[-\eta, +\eta]^c} f^r d\lambda.$$

D'après b),

$$\int_{[-\eta, +\eta]} f^r d\lambda \leq \int_{[-\eta, +\eta]} e^{\frac{r}{2}(f''(0) + \varepsilon)x^2} d\lambda.$$

3. James Stirling, mathématicien écossais (1692–1770).

En posant $\alpha = -r(f''(0) + \varepsilon) > 0$, après un changement de variable,

$$\int_{[-\eta, +\eta]} e^{\frac{r}{2}(f''(0)+\varepsilon)x^2} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{[-\eta\sqrt{\alpha}, +\eta\sqrt{\alpha}]} e^{-\frac{1}{2}y^2} d\lambda.$$

En observant que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}y^2} d\lambda = \sqrt{2\pi}$ (voir Exercice 4, Leçon 4), il s'ensuit que

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \int_{[-\eta, +\eta]} f^r d\lambda \leq \sqrt{\frac{2\pi}{-(f''(0) + \varepsilon)}}.$$

Par ailleurs, comme $f(0) = 1$ est un maximum global unique, si $x \notin [-\eta, +\eta]$, $f(x) \leq a < 1$, et donc

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \int_{[-\eta, +\eta]^c} f^r d\lambda = 0.$$

En conclusion

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \int_{[-1, +1]} f^r d\lambda \leq \sqrt{\frac{2\pi}{-(f''(0) + \varepsilon)}}.$$

Un raisonnement similaire fournit

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \int_{[-1, +1]} f^r d\lambda \geq \sqrt{\frac{2\pi}{-(f''(0) - \varepsilon)}}.$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre ε vers 0 pour atteindre l'affirmation demandée.

d) Par définition

$$\begin{aligned} \Gamma(p+1) &= \int_{[0, \infty[} x^p e^{-x} d\lambda \\ &= p^{p+1} \int_{[0, \infty[} y^p e^{-py} d\lambda \\ &= p^{p+1} e^{-p} \int_{[-1, \infty[} (z+1)^p e^{-pz} d\lambda \end{aligned}$$

après deux changements de variables élémentaires. La fonction $f(x) = (x+1)e^{-x}$, $x \in [-1, \infty[$, est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1, \infty[$, avec un maximum global en 0, telle que $f(0) = 1$ et $f''(0) = -1$. Comme elle tend vers 0 à l'infini, le raisonnement mené en c) s'étend, pour conclure donc que

$$\int_{[-1, \infty[} f^p d\lambda \sim \sqrt{\frac{2\pi}{p}}.$$

Puisque $\Gamma(p+1) = p^{p+1}e^{-p} \int_{[-1, \infty[} f^p d\lambda$, la formule de Stirling en découle.

Exercice 14. Soit μ une mesure de probabilité sur $[0, 1]$, et soient $m = \int_{[0,1]} x d\mu$, $v = \int_{[0,1]} (x-m)^2 d\mu$, $a = \int_{[0,1]} x^2 d\mu - m^2$ et $b = (\frac{1}{2} - m)^2 + \int_{[0,1]} x(1-x) d\mu$. Exprimer v et b en fonction de a . En déduire que $a \leq \frac{1}{4}$ et que $a = \frac{1}{4}$ pour une unique mesure μ que l'on déterminera.

Indications. $0 \leq v = a$ et $0 \leq b = \frac{1}{4} - a$. Si $b = 0$, nécessairement $m = \frac{1}{2}$ et $x(1-x) = 0$ μ -presque partout.

Exercice 15 (*Distance en variation totale*). Si μ et ν sont deux mesures de probabilité sur un ensemble fini ou dénombrable X (muni de la tribu des parties $\mathcal{P}(X)$), on définit leur distance en variation totale

$$d_{\text{TV}}(\mu, \nu) = \sup_{A \subset X} |\mu(A) - \nu(A)|.$$

a) Vérifier que d_{TV} est une distance sur l'espace des mesures de probabilité sur $(X, \mathcal{P}(X))$.

b) Démontrer que

$$d_{\text{TV}}(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sup \left| \int_X f d\mu - \int_X f d\nu \right| = \frac{1}{2} \sum_{x \in X} |\mu(\{x\}) - \nu(\{x\})|$$

où le supremum dans l'expression du milieu porte sur toutes les fonctions $f : X \rightarrow [-1, +1]$. (*Indication* : considérer $A_* = \{x \in X; \mu(\{x\}) \geq \nu(\{x\})\}$.)

Corrigé. b) Par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \left| \int_X f d\mu - \int_X f d\nu \right| &= \left| \sum_{x \in X} f(x) [\mu(\{x\}) - \nu(\{x\})] \right| \\ &\leq \sum_{x \in X} |\mu(\{x\}) - \nu(\{x\})| \end{aligned}$$

si $|f| \leq 1$. Par ailleurs, si $A \subset X$ et $f = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A^c} \in [-1, +1]$,

$$\int_X f d\mu - \int_X f d\nu = 2[\mu(A) - \nu(A)]$$

de sorte que $d_{\text{TV}}(\mu, \nu) \leq \frac{1}{2} \sup \left| \int_X f d\mu - \int_X f d\nu \right|$. Ainsi

$$d_{\text{TV}}(\mu, \nu) \leq \frac{1}{2} \sup \left| \int_X f d\mu - \int_X f d\nu \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{x \in X} |\mu(\{x\}) - \nu(\{x\})|$$

Pour réaliser les égalités, observer que, avec $A_* = \{x \in X; \mu(\{x\}) \geq \nu(\{x\})\}$,

$$\begin{aligned} &\sum_{x \in X} |\mu(\{x\}) - \nu(\{x\})| \\ &= \sum_{x \in A_*} [\mu(\{x\}) - \nu(\{x\})] - \sum_{x \in A_*^c} [\mu(\{x\}) - \nu(\{x\})] \\ &= [\mu(A_*) - \nu(A_*)] - [\mu(A_*^c) - \nu(A_*^c)] \\ &= 2[\mu(A_*) - \nu(A_*)] \\ &\leq 2 d_{\text{TV}}(\mu, \nu). \end{aligned}$$

Il peut être noté alors que la fonction $f = \mathbb{1}_{A_*} - \mathbb{1}_{A_*^c}$ réalise l'optimum dans le supremum sur les fonctions f à valeurs dans $[-1, +1]$.

Exercice 16* (*Mesure de Cantor*). Rappeler la construction de l'ensemble de Cantor dans l'Exercice 9, Leçon 2.

a) Poser, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in [0, 1]$, $F_n(x) = (\frac{3}{2})^n \lambda([0, x] \cap E_n)$. Représenter F_0, F_1, F_2 . Démontrer que

$$|F_n(x) - F_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{2^{n-2}}, \quad x \in [0, 1], n \geq 1.$$

En déduire que la fonction $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x)$, $x \in [0, 1]$, existe, est croissante et continue.

b) Soit λ^F la mesure de Stieltjes sur $[0, 1]$ associée à la fonction croissante F ; la mesure λ^F comporte-t-elle une partie atomique? Est-elle absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ ? Lui est-elle étrangère?

Corrigé. a) La fonction F_n est constante sur E_n^c de sorte que, comme $E_n \subset E_{n-1}$, F_n et F_{n-1} coïncident sur E_{n-1}^c . Si $x \in E_{n-1}$, il appartient à l'une des cellules triadiques, qui se décompose en trois cellules au rang n . Sur cette cellule, la différence $|F_n(x) - F_{n-1}(x)|$ est au plus $\frac{2}{2^{n-1}}$. Comme

$$\sum_{n \geq 1} \sup_{x \in [0, 1]} |F_n(x) - F_{n-1}(x)| < \infty,$$

la suite F_n , $n \in \mathbb{N}$, est de Cauchy dans l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni de la norme uniforme, donc y converge vers une limite continue F . La fonction F est croissante puisque toutes les F_n le sont. b) La fonction F étant continue, la mesure de Stieltjes λ^F n'admet pas d'atomes. Sur l'ouvert E_n^c , $F = F_n$ est constante. Tout ouvert de $\mathbb{R}$ étant une réunion disjointe d'intervalles ouverts, et la mesure λ^F d'un intervalle étant nulle si F est constante sur cet intervalle, il s'ensuit que $\lambda^F(E_n^c) = 0$. Donc, si $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$ est l'ensemble de Cantor, $\lambda^F(C^c) = 0$ et $\lambda^F(C) = 1$. Rappeler que $\lambda(C) = 0$. La mesure λ^F est donc étrangère à la mesure de Lebesgue.