Leçon 4 Exercices corrigés

(*Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.*)

Exercice 1. Le théorème de Fubini s'applique-t-il à la fonction

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,,\quad (x,y)\in[0,1]^2$$

(par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0,1]^2$) ?

Indication. Il pourra être vérifié que $\int_{[0,1]}\big(\int_{[0,1]}f(x,y)d\lambda(y)\big)d\lambda(x)=\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$ en échangeant les rôles de x et y.

Exercice 2. Les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\overline{\mathbb{R}}$ suivantes sont-elles intégrables sur $[0,1]^2$ par rapport à la mesure de Lebesgue ?

$$f(x,y)\;=\;\frac{x-y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,;\qquad f(x,y)\;=\;\frac{1}{(1-xy)^p}\,,\quad p>0.$$

Corrigé. Concernant la première fonction, pour tout $x\in\,]0,1]$,

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]}\big|f(x,y)\big|d\lambda(y)\;&\geq\;\int_{[0,\frac{x}{2}]}\big|f(x,y)\big|d\lambda(y)\\&\geq\;\int_{[0,\frac{x}{2}]}\frac{x-\frac{x}{2}}{(x^2+\frac{x^2}{4})^{\frac{3}{2}}}\,d\lambda(y)\end{aligned}$$

qui est de l'ordre de $\frac{1}{x}$. Ainsi, par le théorème de Tonelli, $\int_{[0,1]^2}|f|d\lambda=\infty$, et f n'est pas intégrable. Pour la seconde fonction, qui est positive, pour tout $x\in\,]0,1]$,

$$\int_{[0,1]}f(x,y)d\lambda(y)\;=\;\begin{cases}-\frac{1}{(p+1)x}\,[(1-x)^{p+1}-1] & \text{si}\quad p\neq-1,\\ -\frac{1}{x}\ln(1-x) & \text{si}\quad p=-1.\end{cases}$$

Dans les deux cas, la fonction de x est continue pour $x \in]0,1]$ et se prolonge par continuité en $x = 0$ (avec la valeur 1). Elle est donc intégrable en x, et à nouveau par le théorème de Tonelli, $\int_{[0,1]^2} |f| d\lambda < \infty$.

Exercice 3. Calculer $\int_E (x^3 + y^3)\, d\lambda(x,y)$ où $E = \{x, y \geq 0\,;\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ $(a, b > 0)$.

Exercice 4 (*Intégrale gaussienne*). En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, puis un changement de variables en coordonnées polaires, démontrer que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2} d\lambda \right)^2 = \int_{]0,2\pi[} \int_{]0,\infty[} \rho\, e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\lambda(\theta) d\lambda(\rho).$$

En déduire que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2} d\lambda = \sqrt{2\pi}\,.$$

Indication. Par le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2} d\lambda \right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} d\lambda^2$$

(où λ^2 est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$). Utiliser alors les coordonnées polaires comme suggéré.

Exercice 5. Soit μ une mesure de probabilité sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$, et soit $f : X \to \mathbb{R}$ de carré intégrable pour μ. Démontrer que

$$\int_X f^2 d\mu - \left(\int_X f\, d\mu \right)^2 = \frac{1}{2} \int_X \int_X \big[f(x) - f(y)\big]^2 d\mu(x) d\mu(y).$$

(Le membre de gauche est une variance au sens de la Leçon 9.)

Indication. Développer le carré dans l'intégrale de droite et utiliser le théorème de Fubini-Tonelli.

Exercice 6* (*Intégrale de Dirichlet*[1]). On se propose de déterminer la valeur (si elle existe) de l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\, dx.$$

a) Donner un sens à cette intégrale. La fonction $x \in]0,\infty[\mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est-elle intégrable au sens de Lebesgue ?

b) Soit $a > 0$; démontrer que la fonction $f : (x,y) \mapsto e^{-xy}\sin(x)$ est intégrable sur $]0,a[\times]0,\infty[$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}^2$.

c) Poser $I_a = \int_{]0,a[\times]0,\infty[} f d\lambda$. Exprimer I_a de deux façons différentes, et calculer la limite $\lim_{a\to\infty} I_a$. En déduire la valeur de l'intégrale I.

Corrigé. a) L'intégrale I est à entendre comme l'intégrale de Riemann impropre de la fonction $x \in]0,\infty[\mapsto \frac{\sin(x)}{x}$. Cette fonction n'est pas intégrable au sens de Lebesgue, l'intégrale de sa valeur absolue étant infinie ; en effet,

$$\int_{]0,\infty[} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| d\lambda \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{]a_n,b_n[} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| d\lambda$$

avec par exemple $a_n = (2n-1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$, $b_n = (2n-1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, $n \in \mathbb{N}$. Sur chaque intervalle $]a_n,b_n[$, $\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}\,b_n}$ de sorte que

$$\int_{]0,\infty[} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| d\lambda \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\pi}{2\sqrt{2}\,b_n}$$

qui est une série divergente. b) Pour $(x,y) \in]0,a[\times]0,\infty[$,

$$\left|e^{-xy}\sin(x)\right| \leq e^{-ay}$$

1. Johann Dirichlet, mathématicien prussien (1805–1859).

qui est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue (sur $]0,a[\times]0,\infty[$).
c) D'après le théorème de Fubini-Tonelli, la fonction f étant intégrable sur $]0,a[\times]0,\infty[$,

$$\begin{aligned} I_a &= \int_{]0,a[\times]0,\infty[} f d\lambda = \int_{]0,a[} \left(\int_{]0,\infty[} e^{-xy} \sin(x) d\lambda(y) \right) d\lambda(x) \\ &= \int_{]0,\infty[} \left(\int_{]0,a[} e^{-xy} \sin(x) d\lambda(x) \right) d\lambda(y). \end{aligned}$$

D'une part, par intégration de l'exponentielle en y,

$$\int_{]0,a[} \left(\int_{]0,\infty[} e^{-xy} \sin(x) d\lambda(y) \right) d\lambda(x) = \int_{]0,a[} \frac{\sin(x)}{x} d\lambda$$

qui s'identifie à l'intégrale de Riemann $\int_0^a \frac{\sin(x)}{x} dx$. Ainsi, $\lim_{a\to\infty} I_a = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$.
D'autre part, par une double intégration par parties, pour tout $y \in]0,\infty[$,

$$\begin{aligned} \int_{]0,a[} e^{-xy} \sin(x) d\lambda(x) &= \int_0^a e^{-xy} \sin(x) dx \\ &= -\frac{1}{y} \sin(a) e^{-ay} - \frac{1}{y^2} \cos(a) e^{-ay} + \frac{1}{y^2} \\ &\quad - \frac{1}{y^2} \int_0^a e^{-xy} \sin(x) dx, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\int_{]0,a[} e^{-xy} \sin(x) d\lambda(x) = -\frac{y}{1+y^2} \sin(a) e^{-ay} - \frac{1}{1+y^2} \cos(a) e^{-ay} + \frac{1}{1+y^2}.$$

Par convergence dominée,

$$\lim_{a\to\infty} \int_{]0,\infty[} \left(\int_{]0,a[} e^{-xy} \sin(x) d\lambda(x) \right) d\lambda(y) = \int_{]0,\infty[} \frac{1}{1+y^2} d\lambda = \frac{\pi}{2},$$

et donc $\lim_{a\to\infty} I_a = \frac{\pi}{2}$. En conclusion $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 7. Cet exercice a pour but de calculer le volume (c'est-à-dire la mesure de Lebesgue) ω_d de la boule euclidienne unité (fermée) B de $\mathbb{R}^d$ à partir de l'intégrale gaussienne de l'Exercice 4.

a) Démontrer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2}|x|^2} d\lambda^d \;=\; (2\pi)^{\frac{d}{2}}.$$

b) Utiliser la décomposition de la mesure de Lebesgue λ^d dans $\mathbb{R}^d$ en partie radiale et sphérique (Théorème 3) pour obtenir que

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2}|x|^2} d\lambda^d \;=\; \int_{]0,\infty[} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} r^{d-1} e^{-\frac{1}{2}r^2}\, d\lambda^1(r) d\sigma^{d-1}(s).$$

c) En déduire que

$$(2\pi)^{\frac{d}{2}} \;=\; 2^{\frac{d}{2}-1}\, \Gamma\Big(\frac{d}{2}\Big)\, \sigma^{d-1}(\mathbb{S}^{d-1})$$

où $\Gamma(p) = \int_{]0,\infty[} x^{p-1} e^{-x} d\lambda$ est la fonction Gamma. (Rappeler que $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$.)

d) De la définition de σ^{d-1}, déduire que $\omega_d = \frac{1}{d}\,\sigma^{d-1}(\mathbb{S}^{d-1})$, et conclure que

$$\omega_d \;=\; \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}\,.$$

Exercice 8 (*Théorème du retour de Poincaré*). Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec μ finie, et $T : X \to X$ une application mesurable de X, sous laquelle μ est invariante, i.e. $\mu \circ T^{-1} = \mu$. Les itérées de T sont désignées par T^k, $k \geq 0$ (avec la convention $T^0 = \mathrm{Id}$). Soit également $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) > 0$.

a) Pour tout $x \in X$, poser $N(x) = \sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_A(T^k(x))$, et $G(x) = e^{-N(x)}$. Vérifier que G est une application mesurable (dans les boréliens de $\mathbb{R}$) et intégrable par rapport à μ.

b) Poser $H = G \circ T$. Démontrer que $G = e^{-\mathbb{1}_A} H$ et que $\int_X H d\mu = \int_X G d\mu$. En déduire que $G = H$ μ-presque partout.

c*) Conclure que pour μ-presque tout $x \in A$, la suite $T^k(x)$, $k \geq 0$, passe une infinité de fois dans A.

Corrigé. a) Les applications composées T^k, $k \geq 0$, sont mesurables ainsi que l'indicatrice $\mathbb{1}_A$ puisque $A \in \mathcal{A}$; ainsi $N : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable et de même G. La fonction mesurable G est telle que $0 \leq G \leq 1$, donc intégrable puisque μ est finie. b) Par définition de N et un glissement d'indice,

$$N \circ T = \sum_{k \geq 0} \mathbb{1}_A(T^{k+1}) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{1}_A(T^k) - \mathbb{1}_A = N - \mathbb{1}_A.$$

Il s'ensuit que $G = e^{-\mathbb{1}_A} H$. Par ailleurs, puisque μ est invariante sous T, $\int_X H d\mu = \int_X G \circ T d\mu = \int_X G d\mu$. Maintenant $H \geq G$ d'après la première affirmation et $\int_X [H - G] d\mu = 0$ d'après la seconde : il en découle que $H - G = 0$ μ-presque partout. c) Les inclusions

$$A \cap \{N < \infty\} \subset A \cap \{G \neq H\} \subset \{G \neq H\}$$

entraînent, d'après la conclusion précédente, que $\mu(A \cap \{N < \infty\}) = 0$. Ainsi, pour μ-presque tout $x \in A$, $N(x) = \infty$ signifiant que la suite des itérés $T^k(x)$, $k \geq 0$, passe une infinité de fois dans A.