Leçon 5 Exercices corrigés

(*Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.*)

Exercice 1. Soit μ une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} e^{sx} d\mu < \infty$ pour tout s dans un intervalle I de $\mathbb{R}$; démontrer que la fonction

$$s \in I \mapsto \ln\left(\int_{\mathbb{R}} e^{sx} d\mu\right)$$

est convexe.

Corrigé. Soient $s, t \in I$ et soit $\theta \in]0,1[$ de sorte que $\theta s + (1-\theta)t \in I$ car I est un intervalle. Comme

$$\int_{\mathbb{R}} e^{[\theta s+(1-\theta)t]x} d\mu = \int_{\mathbb{R}} e^{\theta sx} e^{(1-\theta)tx} d\mu,$$

par l'inégalité de Hölder pour les fonctions $x \mapsto e^{\theta sx}$, $x \mapsto e^{(1-\theta)tx}$ et les paramètres conjugués $p = \frac{1}{\theta}$, $q = \frac{1}{1-\theta}$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{[\theta s+(1-\theta)t]x} d\mu \le \left(\int_{\mathbb{R}} e^{sx} d\mu\right)^{\theta} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{tx} d\mu\right)^{1-\theta}.$$

Après la prise du logarithme des deux membres de l'inégalité, l'affirmation s'ensuit.

Exercice 2 (*Inégalité de Hölder*). Dans cet exercice, $\|\cdot\|_p$ désigne la norme L^p, $1 \le p \le \infty$, sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

a) Rappeler l'énoncé de l'inégalité de Jensen, et en déduire l'inégalité de Hölder (pour des fonctions sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$).

b) Démontrer que si $1 \le r \le p \le s \le \infty$ et $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{r} + \frac{1-\theta}{s}$ avec $\theta \in [0,1]$, alors pour toute fonction mesurable $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$,

$$\|f\|_p \le \|f\|_r^{\theta} \, \|f\|_s^{1-\theta}.$$

c) Si $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions mesurables positives sur X, et $c_1, \dots, c_n \geq 0$, $c_1 + \cdots + c_n = 1$, montrer que

$$\int_X f_1^{c_1} \cdots f_n^{c_n} d\mu \leq \left(\int_X f_1 d\mu \right)^{c_1} \cdots \left(\int_X f_n d\mu \right)^{c_n}.$$

Corrigé. a) L'inégalité de Jensen est énoncée en Théorème 4, Leçon 4. Pour démontrer l'inégalité de Hölder, soient donc $f, g : (X, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurables ; il faut établir que

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

où $1 \leq p, q \leq \infty$ sont conjugés $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Les quelques réductions suivantes sont pratiques : en excluant les cas extrêmes, il suffit de considérer $1 < p, q < \infty$; les fonctions f et g peuvent être supposées positives (pour simplifier les notations) ; enfin, supposer $0 < \|f\|_p < \infty$ et $0 < \|g\|_q < \infty$ sans quoi il n'y a rien à démontrer. La remarque suivante est technique : il peut être aussi supposé que, par exemple, g est à valeurs strictement positives (sinon la remplacer par $g\mathbb{1}_{\{g>0\}}$ qui ne modifie pas les intégrales considérées). Ces réductions étant effectuées, par homogénéité de l'inégalité de Hölder, il peut être supposé que $\|g\|_q = 1$, autrement dit $\int_X g^q d\mu = 1$. Considérer alors la mesure *de probabilité* ν de densité g^q par rapport à μ. Dans cette notation

$$\int_X fg d\mu = \int_X fg^{1-q} d\nu$$

(qui fait bien sens puisque $g > 0$). En élevant à la puissance $p > 1$, il ne suffit plus qu'à appliquer l'inégalité de Jensen pour la fonction convexe $u \in \mathbb{R}_+ \to u^p$ à la mesure de probabilité ν pour conclure que

$$\left(\int_X fg d\mu \right)^p \leq \int_X f^p g^{p(1-q)} d\nu.$$

Comme $d\nu = g^q d\mu$ et $p(1-q) = -q$ par conjugaison, le membre de droite est simplement $\int_X f^p d\mu = \|f\|_p^p$ ce qui conclut la démonstration. b) Seul l'intervalle $\theta \in]0,1[$ nécessite une démonstration. Il suffit d'écrire

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p d\mu = \int_X |f|^{\theta p} |f|^{(1-\theta)p} d\mu$$

et d'appliquer l'inégalité de Hölder au couple de fonctions $(|f|^{\theta p}, |f|^{(1-\theta)p})$ pour les exposants conjugués $(\frac{r}{\theta p}, \frac{s}{(1-\theta)p})$ puisque par hypothèse

$$\frac{\theta p}{r} + \frac{(1-\theta)p}{s} = 1.$$

c) Une récurrence peut être proposée. Avec les notations correspondantes, en partant à l'aveugle sur la base de l'inégalité de Hölder,

$$\int_X \left[f_1^{c_1} \cdots f_n^{c_n}\right] f_{n+1}^{c_{n+1}} d\mu \leq \left(\int_X \left[f_1^{c_1} \cdots f_n^{c_n}\right]^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X f_{n+1}^{c_{n+1}q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Il est naturel de poser $q = \frac{1}{c_{n+1}}$ ($c_{n+1} \notin \{0,1\}$ sans quoi il n'y a rien à démontrer). Alors $p = \frac{1}{1-c_{n+1}}$, et comme $c_1 + \cdots + c_n + c_{n+1} = 1$, il vient $c_1 p + \cdots c_n p = 1$. Ainsi, par hypothèse de récurrence appliquée aux n coefficients $c_1 p, \ldots, c_n p$,

$$\int_X \left[f_1^{c_1} \cdots f_n^{c_n}\right]^p d\mu \leq \left(\int_X f_1 d\mu\right)^{c_1 p} \cdots \left(\int_X f_n d\mu\right)^{c_n p}.$$

Après avoir élevé cette expression à la puissance $\frac{1}{p}$, il s'ensuit que l'hypothèse de récurrence est satisfaite au rang $n+1$.

Exercice 3* (*Inégalité entropique*). Sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ de probabilité ($\mu(X) = 1$), si $f, g : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sont des fonctions mesurables avec $f \geq 0$, $\int_X f d\mu = 1$, et fg intégrable, alors

$$\int_X fg \, d\mu \; \leq \; \int_X f \ln(f) d\mu + \ln\left(\int_X e^g d\mu \right).$$

(*Indication* : utiliser l'inégalité de Jensen pour la mesure de probabilité $d\nu = f d\mu$.)

Exercice 4* (*Inégalité de Pinsker*[1]). Soit μ une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{A})$, et soit f une densité de probabilité par rapport à μ (autrement dit $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable à valeurs positives et $\int_X f d\mu = 1$). Poser $E = \{f \leq 1\}$, $\mu(E) = t$, $\int_E f d\mu = a$.

a) Vérifier que $a \leq t$ et que $\int_X |f - 1| \, d\mu = 2(t - a)$.

b) Supposer $0 < a \leq t < 1$ et considérer la densité de probabilité g (par rapport à μ) définie par $g = \frac{a}{t}$ sur E et $g = \frac{1-a}{1-t}$ sur le complémentaire de E. Utiliser l'inégalité de Jensen (pour la probabilité de densité g) pour démontrer que $\int_X f \ln(f) d\mu \geq \int_X f \ln(g) \, d\mu$, et en déduire que

$$\int_X f \ln(f) d\mu \; \geq \; a \, \ln\left(\frac{a}{t}\right) + (1 - a) \ln\left(\frac{1 - a}{1 - t}\right).$$

c) Vérifier l'inégalité, pour tous $0 < a \leq t < 1$,

$$2(t - a)^2 - a \ln\left(\frac{a}{t}\right) - (1 - a) \ln\left(\frac{1 - a}{1 - t}\right) \; \leq \; 0.$$

d) Conclure de l'ensemble des questions précédentes que (inégalité de Pinsker)

$$\left(\int_X |f - 1| \, d\mu \right)^2 \; \leq \; 2 \int_X f \ln(f) d\mu.$$

1. Mark Pinsker, mathématicien soviétique et russe (1925–2003).

Corrigé. a) Pour alléger les notations, désigner par ν la mesure de probabilité de densité f par rapport à μ. Par définition $a = \nu(E) = \int_E f d\mu \leq \mu(E) = t$ car $f \leq 1$ sur E. Par la relation de Chasles, et la définition de E,

$$\begin{aligned}\int_X |f-1| d\mu &= \int_E (1-f) d\mu + \int_{E^c} (f-1) d\mu \\ &= \mu(E) - \nu(E) + \nu(E^c) - \mu(E^c) \\ &= 2\mu(E) - 2\nu(E) = 2t - 2a.\end{aligned}$$

b) L'inégalité souhaitée se réécrit sous la forme $\int_X \frac{f}{g} \ln\left(\frac{f}{g}\right) g d\mu \geq 0$ qui résulte de l'application de l'inégalité de Jensen à la mesure de probabilité de densité g par rapport à μ et à la fonction convexe $u \in \mathbb{R}_+ \to u \ln(u)$. (Noter que par le même raisonnement $\int_X f \ln(f) d\mu \geq 0$.) L'inégalité conséquente en découle par définition de g. c) Une analyse de fonction (à a ou t fixé) permettra de conclure. d) Deux cas sont à considérer en préalable : si $a = \int_E f d\mu = 0$, alors $t = \mu(E) = 0$ et, par a), $\int_X |f-1| d\mu = 0$ ce qui assure l'inégalité dans ce cas ; si $t = 1$, alors $f \leq 1$ μ-presque partout, et à nouveau $\int_X |f-1| d\mu = 1 - \int_X f d\mu = 0$. Donc, si $0 < a \leq t < 1$, par b) et c)

$$2(t-a)^2 \leq \int_X f \ln(f) d\mu$$

ce qui entraîne la conclusion avec a).

Exercice 5. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions boréliennes croissantes telles que $\int_{\mathbb{R}} f^2 d\mu < \infty$, $\int_{\mathbb{R}} g^2 d\mu < \infty$, pour une mesure μ finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$; démontrer que

$$\int_{\mathbb{R}} fg \, d\mu \geq \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu \int_{\mathbb{R}} g \, d\mu.$$

Corrigé. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} fg \, d\mu$ est bien définie, et comme μ est finie, f et g sont intégrables. Comme dans l'Exercice 5, Leçon 4, en vertu du théorème de Fubini-Tonelli,

$$\int_{\mathbb{R}} fg\,d\mu - \int_{\mathbb{R}} f\,d\mu \int_{\mathbb{R}} g\,d\mu = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \big[f(x)-f(y)\big]\big[g(x)-g(y)\big]\,d\mu(x)d\mu(y).$$

Si f et g sont croissantes, $[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)] \geq 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, d'où le résultat par conservation de l'ordre.

Exercice 6*. Démontrer que l'espace des fonctions continues $C([0,1])$ sur $[0,1]$ est dense dans l'espace de Hilbert (réel) $\mathrm{L}^2([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$. (*Indication* : si $\langle f,g\rangle_{\mathrm{L}^2(\lambda)} = 0$ pour toute fonction g de $C([0,1])$, montrer que $\langle f,\mathbb{1}_B\rangle_{\mathrm{L}^2(\lambda)} = 0$ pour tout borélien B de $[0,1]$ en commençant par le cas d'un intervalle.) En utilisant le théorème de Stone[2]-Weierstrass[3], démontrer que la famille $\theta \in \mathbb{S}^1 \to e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$, définit une base orthonormale de l'espace de Hilbert complexe $\mathrm{L}^2(\mathbb{S}^1,\mathcal{B}(\mathbb{S}^1),\frac{1}{2\pi}\lambda)$ des fonctions complexes sur le cercle unité $\mathbb{S}^1$ de module carré intégrable. En déduire que les fonctions 1, $\sqrt{2}\,\sin(n\theta)$, $\sqrt{2}\,\cos(n\theta)$, $n \in \mathbb{N}$, forment une base orthonormale de l'espace de Hilbert réel $\mathrm{L}^2(\mathbb{S}^1,\mathcal{B}(\mathbb{S}^1),\frac{1}{2\pi}\lambda)$.

Exercice 7 (*Polynômes de Legendre*[4]). Sur l'intervalle $[-1,+1]$, les monômes $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ sont orthogonalisés par rapport à la mesure de Lebesgue λ pour définir une suite de polynômes orthogonaux $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ (dont le coefficient du terme de plus haut degré est 1), appelés polynômes de Legendre.

a) Calculer P_0, P_1 et P_2.

b) Soit, pour tout entier n, q_n la n-ième dérivée du polynôme $(x^2-1)^n$, et $Q_n = \frac{n!}{(2n)!}\,q_n$ ($Q_0 = 1$). Démontrer que pour tout $k = 0, 1, \ldots, n-1$,

$$\int_{[-1,+1]} x^k Q_n(x)d\lambda = 0$$

2. Marshall Stone, mathématicien américain (1903–1989).
3. Karl Weierstrass, mathématicien allemand (1815–1897).
4. Adrien-Marie Legendre, mathématicien français (1752–1833).

et en déduire que $Q_n = P_n$.

c) En utilisant que les polynômes sont denses dans $\mathrm{L}^2([-1,+1],\mathcal{B}([-1,+1]),\lambda)$ (voir Paragraphe 4, Leçon 10), en conclure que les polynômes de Legendre forment une base orthogonale de $\mathrm{L}^2([-1,+1],\mathcal{B}([-1,+1]),\lambda)$.

Corrigé. a) P_0 est le polynôme constant égal à 1. Le polynôme P_1 est de degré 1 et doit être orthogonal à P_0, c'est-à-dire $\int_{[-1,+1]} P_1\,d\lambda = 0$. Ainsi $P_1(x) = x$. De la même façon, $P_2(x) = x^2 + ax + b$ est de degré 2 et

$$0 \;=\; \int_{[-1,+1]} P_0 P_2\,d\lambda \;=\; \int_{[-1,+1]} [x^2 + ax + b]\,d\lambda \;=\; \frac{2}{3} + 2b$$

et

$$0 \;=\; \int_{[-1,+1]} P_1 P_2\,d\lambda \;=\; \int_{[-1,+1]} x\,[x^2 + ax + b]\,d\lambda \;=\; \frac{2a}{3}\,.$$

Donc $P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$. b) Une intégration par parties indique que pour tout $n \geq 1$ et tout $k \geq 1$,

$$\int_{[-1,+1]} x^k q_n\,d\lambda \;=\; -k \int_{[-1,+1]} x^{k-1} q_{n-1}\,d\lambda.$$

Une récurrence sur n démontre alors aisément la première assertion de la question ($\int_{[-1,+1]} q_1 d\lambda = 0$). La normalisation est choisie pour que le coefficient du terme de plus haut degré de Q_n est 1. Comme Q_n est orthogonal à tous les monômes $1, x, \ldots, x^{n-1}$, il est orthogonal à tous les $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$. Ces deux caractéristiques expriment que $Q_n = P_n$. c) Pour une fonction f donnée de $\mathrm{L}^2([-1,+1],\mathcal{B}([-1,+1]),\lambda)$, il existe une suite de polynômes qui converge, dans la norme hilbertienne de $\mathrm{L}^2([-1,+1],\mathcal{B}([-1,+1]),\lambda)$, vers f. Comme tout polynôme peut s'écrire comme une combinaison linéaire (finie) de polynômes de Legendre, la conclusion s'ensuit.

Exercice 8 (*Théorème d'Archimède*[5]). Soit la mesure uniforme σ^2 sur la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$ (Théorème 3, Leçon 4) ; soit h l'application de

$$U = \big\{(\theta_1, \theta_2)\,;\, \theta_1 \in \,]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[, \theta_2 \in]0, 2\pi[\,\big\}$$

dans $\mathbb{S}^2$ (privée d'un demi-équateur) définie par

$$h(\theta_1, \theta_2) = \big(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2), \cos(\theta_1)\sin(\theta_2), \sin(\theta_1)\big)$$

(coordonnées sphériques). Vérifier que h est bijective sur U de jacobien $\cos(\theta_1)$. Démontrer que la projection de σ^2 sur un diamètre (de la sphère) (par exemple la mesure image de σ^2 par l'application $T : (s_1, s_2, s_3) \to s_3$) est uniforme sur $]-1, +1[$ (i.e. de densité constante par rapport à la mesure de Lebesgue).

Corrigé. D'après le changement de variables en coordonnées sphériques, pour toute $\psi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$, mesurable positive ou bornée,

$$\int_{\mathbb{S}^2} \psi\, d\sigma^2 = \int_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]0,2\pi[} \psi\big(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2), \cos(\theta_1)\sin(\theta_2), \sin(\theta_1)\big)\cos(\theta_1) d\theta_1 d\theta_2.$$

Par intégration par rapport à la mesure image σ^2_T de σ^2 par l'application T, pour toute fonction $\phi :]-1, +1[\to \mathbb{R}$ mesurable positive ou bornée,

$$\begin{aligned}\int_{]-1,+1[} \phi\, d\sigma^2_T = \int_{\mathbb{S}^2} \phi \circ T\, d\sigma^2 &= \int_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]0,2\pi[} \phi\big(\sin(\theta_1)\big)\cos(\theta_1) d\theta_1 d\theta_2 \\ &= 2\pi \int_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} \phi\big(\sin(\theta_1)\big)\cos(\theta_1) d\theta_1.\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à effectuer un dernier changement de variable $x = \sin(\theta_1)$ pour conclure que

$$\int_{]-1,+1[} \phi\, d\sigma^2_T = 2\pi \int_{]-1,+1[} \phi\, d\lambda.$$

5. Archimède de Syracuse, physicien, mathématicien et ingénieur grec de Sicile (287–212 av. J. C.).

La mesure σ_T^2 est donc bien uniforme sur $]-1,+1[$.

Exercice 9* (*Inégalité de Prékopa*[6]*-Leindler*[7]). Soient f, g, h trois fonctions continues strictement positives sur $\mathbb{R}$ telles que f et g sont intégrables et, pour un $\theta \in [0,1]$,

$$h\big(\theta x + (1-\theta)y\big) \;\geq\; f(x)^\theta g(y)^{1-\theta}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Définir $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda \int_{]-\infty, T(x)]} g\, d\lambda \;=\; \int_{\mathbb{R}} g\, d\lambda \int_{]-\infty, x]} f\, d\lambda, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vérifier que T est croissante et différentiable. En utilisant le changement de variable $x \mapsto z(x) = \theta x + (1-\theta)T(x)$, démontrer que

$$\int_{\mathbb{R}} h\, d\lambda \;\geq\; \Big(\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda\Big)^\theta \Big(\int_{\mathbb{R}} g\, d\lambda\Big)^{1-\theta}.$$

Démontrer par récurrence sur la dimension que le résultat s'étend aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Proposer une extension à toutes les fonctions mesurables positives sur $\mathbb{R}^d$.

Corrigé. Par homogénéité, il est commode de supposer que $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g d\lambda = 1$. La fonction $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donc définie par

$$\int_{]-\infty, T(x)]} g\, d\lambda \;=\; \int_{]-\infty, x]} f\, d\lambda, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Comme f et g sont continues et strictement positives, la première affirmation s'ensuit (et la mesure $g d\lambda$ est la mesure image par T de la mesure $f d\lambda$). Par dérivation de la formule définissant T,

$$g\big(T(x)\big)T'(x) \;=\; f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

6. András Prékopa, mathématicien hongrois (1929–2016).
7. László Leindler, mathématicien hongrois (1935–2020).

Par définition $z'(x) = \theta + (1-\theta)T'(x)$, $x \in \mathbb{R}$. L'inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique assure alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $z'(x) \geq (T'(x))^{1-\theta}$. Comme z est injective, il découle alors de la formule du changement de variable et de l'hypothèse que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} h\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} h\big(z(x)\big) z'(x) d\lambda &\geq \int_{\mathbb{R}} f(x)^\theta g\big(T(x)\big)^{1-\theta} \big(T'(x)\big)^{1-\theta} d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x)^\theta f(x)^{1-\theta} d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = 1.
\end{aligned}$$

Le cas de la dimension d s'obtient donc par une récurrence sur la dimension. Par approximation de fonctions intégrables par des fonctions régulières, le résultat s'étend à toutes les fonctions mesurables positives.