# Leçon 7 Exercices corrigés

(*Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.*)

**Exercice 1** (*Formule du crible de Poincaré*). Soit $P$ une mesure de probabilité sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ ; démontrer que pour tous $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2), \\
P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\
&\quad - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) \\
&\quad + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3),
\end{aligned}$$

puis que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

(*Indication* : effectuer une récurrence sur $n$, ou développer puis intégrer par rapport à $P$ l'identité

$$1 - \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{A^c} = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k^c} = \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathbb{1}_{A_k})$$

où $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$.)

*Corrigé.* Cette correction utilise l'identité sur les fonctions indicatrices. Le développement de $\prod_{k=1}^{n}(1 - \mathbb{1}_{A_k})$ fournit en effet

$$\prod_{k=1}^{n} (1 - \mathbb{1}_{A_k}) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1}} \mathbb{1}_{A_{i_2}} \cdots \mathbb{1}_{A_{i_k}}$$

ce qui se vérifie par récurrence sur $n$. Comme

$$\mathbb{1}_{A_{i_1}} \mathbb{1}_{A_{i_2}} \cdots \mathbb{1}_{A_{i_k}} = \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}},$$

la conclusion s'ensuit après intégration par rapport à $P$.

**Exercice 2.** Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0, \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad 0 \le t < 1, \\ \frac{t}{2} & \text{si} \quad 1 \le t < 2, \\ 1 & \text{si} \quad 2 \le t. \end{cases}$$

Représenter $F$.

a) Montrer que $F$ est la fonction de répartition d'une unique mesure de probabilité $P$ sur les boréliens de $\mathbb{R}$.

b) Calculer $P(\{\frac{1}{2}\}), P(\{1\}), P(]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[)$.

c) Décomposer $P$ en la somme d'une mesure atomique et d'une mesure à densité.

*Corrigé.* a) La fonction $F$ est croissante, continue à droite et telle que $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$ ; elle définit donc une unique mesure de probabilité $P$ sur les boréliens de $\mathbb{R}$. b) Par construction, $P(]a, b]) = F(b) - F(a)$, $a < b$, avec les formules analogues pour les autres formes d'intervalles. Ainsi,

$$\begin{aligned} P\big(\{\tfrac{1}{2}\}\big) &= F\big(\tfrac{1}{2}\big) - F\big(\tfrac{1}{2}-\big) = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} = 0, \\ P\big(\{1\}\big) &= F(1) - F(1-) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}, \\ P(]\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}[) &= F\big(\tfrac{3}{2}-\big) - F\big(\tfrac{1}{2}\big) = \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

c) La fonction $F$ présente deux points de discontinuité en $t = 0$ et $t = 1$, tous deux d'amplitude $\frac{1}{4}$, correspondant à la mesure discrète $\frac{1}{4}\,\delta_0 + \frac{1}{4}\,\delta_1$. Une fois ces points retirés, elle est continue, et même dérivable sauf en un nombre fini de points ($t = 0, 1, 2$), de dérivée $f = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{]1,2[}$. Ainsi $P$ se décompose sous la forme

$$P = \frac{1}{4}\,\delta_0 + \frac{1}{4}\,\delta_1 + f d\lambda,$$

la notation $fd\lambda$ signifiant donc, pour simplifier, la mesure de densité $f$ par rapport à $\lambda$.

**Exercice 3.** Soit, pour tout réel $\beta \in [0,1]$, la fonction $F_\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0, \\ \beta + (1-\beta)t & \text{si} \quad 0 \leq t < 1, \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq t. \end{cases}$$

Vérifier que $F_\beta$ est une fonction de répartition. Décrire la probabilité $P$ associée (décomposer $P$ sous la forme $P = \beta P_1 + (1-\beta)P_2$ où $P_1$ est une probabilité discrète et $P_2$ une probabilité à densité que l'on précisera). Discuter les cas $\beta = 0$ et $\beta = 1$.

*Corrigé.* Pour tout $\beta \in [0,1]$, la fonction $F_\beta$ est croissante, continue à droite et telle que $\lim_{t\to-\infty} F_\beta(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} F_\beta(t) = 1$ ; c'est donc bien une fonction répartition qui définit une mesure de probabilité $P$ sur les boréliens de $\mathbb{R}$. Si $\beta = 0$, $F_\beta$ est la fonction de répartition de la loi uniforme $\mathcal{U}(0,1)$ sur l'intervalle $(0,1)$ ; si $\beta = 1$, c'est la fonction de répartition de la masse de Dirac au point 0. Si $0 < \beta < 1$, $F_\beta$ présente un point de discontinuité en $t = 0$, d'amplitude $\beta$, correspondant donc à une masse de Dirac. Pour le reste, elle est continue, dérivable sauf en un nombre fini de points, de dérivée $f = (1-\beta)\mathbb{1}_{]0,1[}$, correspondant à une mesure de densité $f$ par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda$. En rééquilibrant les poids, $P = \beta P_1 + (1-\beta)P_2$ où $P_1 = \delta_0$ et $P_2 = \lambda$ sur $(0,1)$.

**Exercice 4** (*(Mesure de) Probabilité logistique*). Démontrer que la fonction (*sigmoïde*)

$$F(t) = \frac{1}{1+e^{-t}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

est la fonction de répartition d'une mesure de probabilité $P$ sur les boréliens de $\mathbb{R}$ admettant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

**Exercice 5** (*(Mesure de) Probabilité de Gumbel*[1]). Démontrer que la fonction (double exponentielle)

$$F(t) \,=\, e^{-e^{-t}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

est une fonction de répartition (c'est la fonction de répartition de la loi dite de Gumbel). Si $P$ désigne la mesure de probabilité de fonction de répartition $F$, calculer $P(A)$ pour $A = [1, \infty[$, $]-\infty, 0[$, $\{0\}$, $[0, \frac{1}{2}[$.

1. Emil Julius Gumbel, mathématicien allemand (1891–1966).