Leçon 8 Exercices corrigés

(*Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.*)

Exercice 1. Un jet de deux dés est modélisé par l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{36}\,\mathrm{Card}(A)$. Le premier dé sera la variable aléatoire $X : \Omega \to E$, $E = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{B} = \mathcal{P}(E)$, définie par $X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1$.

a) Quelle la mesure image $\mathbb{P}_X$ de $\mathbb{P}$ par X ?

b) Si $\phi : E \to \mathbb{R}$, expliciter les deux intégrales $\int_\Omega \phi \circ X d\mathbb{P}$ et $\int_E \phi\, d\mathbb{P}_X$.

Corrigé. a) $\mathbb{P}_X$ est une mesure sur les parties de l'ensemble discret $E = \{1,2,3,4,5,6\}$, il suffit donc de déterminer $\mathbb{P}(\{k\})$ pour $k = 1,2,3,4,5,6$. Par définition d'une mesure image,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{k\}\big) &= \mathbb{P}\big((\omega_1,\omega_2) \in \Omega\,;\, X(\omega_1,\omega_2) = k\big) \\
&= \mathbb{P}\big((\omega_1,\omega_2) \in \Omega\,;\, \omega_1 = k\big) \\
&= \frac{1}{36}\,\mathrm{Card}\big\{(\omega_1,\omega_2) \in \{1,2,3,4,5,6\}^2\,;\, \omega_1 = k\big\} \\
&= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

puisqu'il y a six couples de la forme (k, ω_2) dans Ω. Donc $\mathbb{P}_X$ est uniforme sur $E = \{1,2,3,4,5,6\}$. b) D'après la description de $\mathbb{P}_X$ et l'intégration par rapport à une mesure discrète,

$$\int_E \phi\, d\,\mathbb{P}_X = \sum_{k=1}^{6} \phi(k)\,\mathbb{P}\big(\{k\}\big) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} \phi(k).$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \phi\circ X\,d\mathbb{P} &= \frac{1}{36}\sum_{(\omega_1,\omega_2)\in\Omega} \phi\big(X(\omega_1,\omega_2)\big)\\ &= \frac{1}{36}\sum_{(\omega_1,\omega_2)\in\Omega} \phi(\omega_1)\\ &= \frac{6}{36}\sum_{k=1}^{6}\phi(k).\end{aligned}$$

Il vient donc que $\int_\Omega \phi\circ X\,d\mathbb{P} = \int_E \phi\,d\mathbb{P}_X$ ce qui n'est rien d'autre que le théorème de transport (Leçon 3) dans ce cadre.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\big(X \geq m+n \,|\, X \geq n\big) \;=\; \mathbb{P}(X \geq m).$$

(On dit que X est « sans mémoire ».) En supposant que $\mathbb{P}(X = 1) = a$, déterminer la loi de X. Même question si X est une variable aléatoire à valeurs réelles positives telle que

$$\mathbb{P}\big(X > s+t \,|\, X > t\big) \;=\; \mathbb{P}(X > s), \quad s, t > 0.$$

Exercice 3. Soit Y une variable aléatoire de loi uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 5]$. Quelle est la probabilité que les racines de l'équation

$$x^2 + (Y+2)x + Y + 3 \;=\; 0$$

en la variable $x \in \mathbb{R}$ soient réelles ?

Indications. La loi de la variable aléatoire Y est la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 5]$, de densité donc $\frac{1}{5}\mathbb{1}_{[0,5]}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Le discriminant du trinôme $x^2+(Y+2)x+Y+3$ est une fonction de la variable aléatoire Y ; il doit être positif ou nul pour qu'il y ait des racines réelles.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(2n, \frac{1}{2})$; déterminer la loi de $Y = |X - n|$.

Corrigé. La variable X est à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, 2n\}$, et donc $Y = |X-n|$ est à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, n\}$. Si $k = 0$,

$$\mathbb{P}(Y = 0) \;=\; \mathbb{P}(X = n) \;=\; \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n},$$

et si $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = k) \;&=\; \mathbb{P}(X = n - k) + \mathbb{P}(X = n + k) \\
&=\; \frac{1}{2^{2n}}\left(\binom{2n}{n-k} + \binom{2n}{n+k}\right) \\
&=\; \frac{1}{2^{2n-1}}\binom{2n}{n+k}
\end{aligned}$$

d'après les propriétés des coefficients binomiaux.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ de paramètre $p \in]0, 1[$; calculer $p_n(t) = \mathbb{P}(X > nt)$, $t \geq 0$, $n \geq 1$. Pour $p = \frac{1}{n}$, $n \geq 2$, $t \geq 0$, étudier la limite de $p_n(t)$ lorsque $n \to \infty$.

Corrigé. Par définition de la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$,

$$p_n(t) \;=\; \mathbb{P}(X > nt) \;=\; \sum_{k > nt} p(1-p)^{k-1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} p_n(t) &= \sum_{k\geq \lfloor nt\rfloor+1} p(1-p)^{k-1} \\ &= (1-p)^{\lfloor nt\rfloor} \sum_{k-\lfloor nt\rfloor-1\geq 0} p(1-p)^{k-\lfloor nt\rfloor-1} \\ &= (1-p)^{\lfloor nt\rfloor} \sum_{\ell\geq 0} p(1-p)^{\ell} \\ &= (1-p)^{\lfloor nt\rfloor}. \end{aligned}$$

Lorsque $p = \frac{1}{n}$, $\lim_{n\to\infty}(1-p)^{\lfloor nt\rfloor} = e^{-t}$. Ainsi $\mathbb{P}(X > nt)$ converge vers $\mathbb{P}(Y > t)$ où Y suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

Exercice 6. Soit la fonction

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0, \\ \frac{t}{1+t} & \text{si} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

a) Tracer F et démontrer que c'est une fonction de répartition.

b) Expliquer pourquoi F est la fonction de répartition d'une unique mesure de probabilité P sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$.

On désigne par X une variable aléatoire réelle, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de loi P.

c) Décrire un espace probabilisé possible.

d) Soit $Y = X\mathbb{1}_{\{X\leq 3\}}$; justifier que Y est une variable aléatoire ; dans quel ensemble prend-elle ses valeurs ? Décrire et tracer la fonction de répartition $F_Y(t) = \mathbb{P}_Y(]-\infty, t]) = \mathbb{P}(Y \leq t)$, $t \in \mathbb{R}$, de la loi $\mathbb{P}_Y$ de Y.

e) Exprimer $\mathbb{P}_Y$ sous la forme d'une combinaison d'une mesure discrète et d'une mesure admettant une densité.

Corrigé. a) La fonction F est croissante, continue, et $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$. C'est donc une fonction de répartition. b) La fonction F détermine une fonction additive P sur les intervalles $]a,b]$, $a < b$, de $\mathbb{R}$, par $P(]a,b]) = F(b) - F(a)$, qui s'étend en une unique mesure de probabilité sur les boréliens de $\mathbb{R}$. Il peut être noté que F est dérivable sur $]0,\infty[$, de dérivée $\frac{1}{(1+x)^2}$, qui est donc la densité de F par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$. c) Il est toujours possible de considérer $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{P} = P$, et la variable aléatoire (identité) $X(\omega) = \omega$, $\omega \in \Omega = \mathbb{R}$, dont la loi est clairement P. d) Comme X est mesurable, $\{X \leq 3\} \in \mathcal{A}$, et donc $\mathbb{1}_{\{X\leq 3\}}$ est mesurable. La variable Y est donc mesurable comme produit de fonctions mesurables (variables aléatoires). La variable X est à valeurs positives ou nulles (car $\mathbb{P}(X \leq 0) = F(0) = 0$) ; par ailleurs, si $X > 3$, alors $Y = 0$. Donc Y est à valeurs dans $[0,3]$, et la fonction de répartition F_Y de la loi de Y est nulle si $t < 0$ et égale à 1 si $t > 3$. Si $0 \leq t \leq 3$, la définition de Y indique que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leq t) &= \mathbb{P}(X \leq t, X \leq 3) + \mathbb{P}(X > 3) \\
&= \mathbb{P}(X \leq t, X \leq 3) + 1 - F(3) \\
&= \mathbb{P}(X \leq t) + 1 - F(3)
\end{aligned}$$

Comme $F(3) = \frac{1}{4}$, il s'ensuit que

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ t < 0, \\ \frac{t}{1+t} + \frac{1}{4} & \text{si } \ 0 \leq t \leq 3, \\ 1 & \text{si } \ t > 3. \end{cases}$$

e) La fonction de répartition F_Y de la loi de Y présente un point de discontinuité en $t = 0$ d'amplitude $\frac{1}{4}$. En dehors de ce point (et de $t = 3$), elle est continue et dérivable, de dérivée $f(t) = \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathbb{1}_{]0,3[}(t)$. Donc la loi $\mathbb{P}_Y$ de Y se décompose en la somme de la masse de Dirac $\frac{1}{4}\,\delta_0$ et de la mesure de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi jointe du couple (X, Y) est donnée par

$$\mathbb{P}\big((X,Y) = (k,\ell)\big) \,=\, \frac{c}{k!\,\ell!}\,, \quad (k,\ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

où $c \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer la valeur de c. Reconnaître les lois marginales de X et Y.

b) Mêmes questions si à présent $\mathbb{P}((X,Y) = (k,\ell)) = \frac{c(k+\ell)}{2^{k+\ell}}$, $(k,\ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Exercice 8. Le couple aléatoire (X, Y) défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suit la loi uniforme sur le carré $[-1, +1]^2$. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(\frac{1}{2} < X^2 + Y^2 < 1)$.

Corrigé. L'ensemble à mesurer correspond à la couronne, centrée en 0, entre les rayons $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 1. Son aire (mesure de Lebesgue) est donc $\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. La loi de (X, Y) est uniforme sur le carré $[-1, +1]^2$, donc après la normalisation probabiliste, il s'agit de $\frac{1}{4}\lambda$ pour λ la mesure de Lebesgue restreinte au carré. Ainsi, la probabilité recherchée est $\frac{\pi}{8}$.

Exercice 9 (*Loi du demi-cercle*). Un couple aléatoire (X, Y) est uniformément réparti sur le disque unité

$$\mathcal{D} \,=\, \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + y^2 \leq 1\big\}$$

de $\mathbb{R}^2$.

a) Décrire la densité de la loi de (X, Y) par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

b) Calculer $\mathbb{P}(X \geq \frac{1}{\sqrt{2}})$. (*Indications* : faire un dessin ; $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.)

c) Démontrer que la loi de X admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue que l'on identifiera.

Corrigé. a) La densité f de la loi de (X, Y) est donnée par $f = \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{\mathcal{D}}$. b) Sur un dessin, l'ensemble $\{X \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\}$ correspond à un quart de disque privé du triangle isocèle (demi carré) le supportant ; sa surface est donc $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ et ainsi, après la normalisation probabiliste,

$$\mathbb{P}\Big(X \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \frac{1}{\pi}\Big(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}.$$

c) La loi de la marginale X admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$ donnée par $\int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\lambda(y)$, $x \in \mathbb{R}$. Comme $f = \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{\mathcal{D}}$, pour tout $x \in [-1, +1]$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\lambda(y) = \frac{1}{\pi} \lambda\Big(\big[-\sqrt{1 - x^2}, \sqrt{1 - x^2}\,\big]\Big) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - x^2}.$$

Ainsi, la fonction $\frac{2}{\pi} \sqrt{1 - x^2}\, \mathbb{1}_{[-1,+1]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, est la densité de la loi dite du demi-cercle (même si, de par la normalisation $\frac{2}{\pi}$, son graphe est une ellipse).

Exercice 10*. Pour un entier $n \geq 1$, et pour $1 \leq k \leq n$, soit

$$\Omega = \Omega_k = \Big\{ x \in \{0, 1\}^n \, ; \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell = k \Big\}.$$

L'espace Ω est muni de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω et de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. Le vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_n)$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ réprésente les composantes d'un élément de Ω.

Vérifier que, pour tout $\ell = 1, \ldots, n$, X_ℓ suit une loi de Bernoulli. Démontrer que, pour tous $j, \ell = 1, \ldots, n$ distincts, (X_j, X_ℓ) a même loi que (X_1, X_2). (*Indication* : observer que $\sum_{\ell=1}^{n} X_\ell = k$.)