Leçon 12

Indépendance

La notion d'indépendance est centrale en probabilité. Typiquement, deux événements A et B sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sont dits *indépendants* (sous la probabilité $\mathbb{P}$) si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

Plus généralement, une famille quelconque A_j, $j \in J$, est dite *(mutuellement) indépendante* (pour $\mathbb{P}$, ou $\mathbb{P}$-indépendante) si pour toute partie finie $K \subset J$,

$$\mathbb{P}\bigg(\bigcap_{k\in K} A_k\bigg) = \prod_{k\in K} \mathbb{P}(A_k)$$

(le choix de K finie permet de ne pas affronter des intersections non dénombrables et des produits infinis éventuellement divergents).

Il n'est pas inutile de rappeler que si A_j, $j \in J$, est une famille indépendante, il en va de même de la famille B_j, $j \in J$, où les B_j sont soit A_j, soit A_j^c.

Cette leçon développe la notion d'indépendance en la (re)-formulant sur les variables aléatoires.

1 Indépendance de variables aléatoires

Sur le modèle du rappel précédent, la définition suivante décrit la notion d'indépendance d'une famille de variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. L'indépendance est toujours entendue par rapport à la probabilité $\mathbb{P}$, et cette mention est le plus souvent omise.

Définition 1 (Indépendance de variables aléatoires)**.** *Une famille quelconque X_j, $j \in J$, de variables aléatoires réelles est dite (mutuellement) indépendante si, pour toute partie finie $K \subset J$, et tous boréliens B_k, $k \in K$,*

$$\mathbb{P}\bigg(\bigcap_{k\in K} \{X_k \in B_k\}\bigg) = \prod_{k\in K} \mathbb{P}(X_k \in B_k).$$

Si $K = \{1, \ldots, n\}$, la propriété se réécrit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) &= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n} \{X_k \in B_k\}\Big) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \in B_k) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \in B_1) \cdots \mathbb{P}(X_n \in B_n).\end{aligned}$$

Il sera dit aussi plus simplement que les X_j, $j \in J$, sont (mutuellement) indépendantes.

La définition précédente appelle plusieurs commentaires. Tout d'abord, elle est inchangée si les variables X_j prennent leurs valeurs dans un espace mesurable quelconque, éventuellement variable avec j, $(E_j, \mathcal{B}_j)$, $j \in J$, en choisissant des $B_k \in \mathcal{B}_k$, $k \in K$. En particulier, il est possible de prendre $E_j = \mathbb{R}^d$ muni de la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ pour tout j, de sorte qu'elle s'applique pour des familles de vecteurs aléatoires.

La définition mentionne le mot « mutuellement » par opposition à une « indépendance deux à deux », à savoir X_j et X_k sont indépendantes pour tous $j, k \in J$ différents. Cette dernière est plus faible que l'indépendance mutuelle, strictement en général comme le montre l'exemple des trois variables aléatoires $X_1 = Z_1$, $X_2 = Z_2$, $X_3 = Z_1 Z_2$, où les Z_1, Z_2, Z_3 sont (mutuellement) indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$ sur $\{-1, +1\}$: X_1, X_2, X_3 sont indépendantes deux à deux, mais

$$\mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = 1, X_3 = 1) = 0 \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(X_1 = -1)\,\mathbb{P}(X_2 = 1)\,\mathbb{P}(X_3 = 1)$$

et donc ne sont pas mutuellement indépendantes.

L'indépendance deux à deux sera peu utilisée, l'indépendance mutuelle sera ainsi qualifiée plus simplement d'« indépendance ».

2 Caractérisation de l'indépendance

La proposition suivante fournit une caractérisation très pratique de l'indépendance. Elle est formulée pour plus de simplicité pour une famille finie de variables aléatoires réelles.

Proposition 2. *Une famille $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est indépendante si et seulement si la loi $\mathbb{P}_{(X_1,\dots,X_n)}$ (sur $\mathbb{R}^n$) du vecteur $(X_1, \dots, X_n)$ est égale au produit $\mathbb{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$ des lois (marginales). Autrement dit, si $\phi_1, \dots, \phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont boréliennes, positives ou bornées,*

$$\mathbb{E}\big(\phi_1(X_1) \cdots \phi_n(X_n)\big) = \mathbb{E}\big(\phi_1(X_1)\big) \cdots \mathbb{E}\big(\phi_n(X_n)\big).$$

Démonstration. D'après le théorème de transport pour la loi du vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(\phi_1(X_1) \cdots \phi_n(X_n)\big) &= \mathbb{E}\big((\phi_1 \cdots \phi_n)(X_1, \dots, X_n)\big) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi_1 \cdots \phi_n \, d\,\mathbb{P}_{(X_1,\dots,X_n)}.\end{aligned}$$

Si $\mathbb{P}_{(X_1,\dots,X_n)} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$, d'après la définition d'une mesure produit et le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi_1 \cdots \phi_n \, d\,\mathbb{P}_{(X_1,\dots,X_n)} = \bigg(\int_{\mathbb{R}} \phi_1 \, d\,\mathbb{P}_{X_1}\bigg) \cdots \bigg(\int_{\mathbb{R}} \phi_n \, d\,\mathbb{P}_{X_n}\bigg).$$

Mais, par transport cette fois pour chaque coordonnée, $\int_{\mathbb{R}} \phi_k \, d\mathbb{P}_{X_k} = \mathbb{E}(\phi_k(X_k))$, $k = 1, \dots, n$, ce qui démontre l'identité de la proposition. En choisissant $\phi_k = \mathbb{1}_{B_k}$ pour des boréliens B_k, $k = 1, \dots, n$, celle-ci exprime que

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1) \cdots \mathbb{P}(X_n \in B_n),$$

soit l'indépendance des variables $X_1, \dots, X_n$. Réciproquement, si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, la relation précédente a lieu pour toute famille de boréliens

$B_1, \ldots, B_n$. Donc, par définition des lois et des mesures produits,

$$\mathbb{P}_{(X_1,\ldots,X_n)}(B_1 \times \cdots \times B_n) \,=\, \mathbb{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_{X_n}(B_1 \times \cdots \times B_n),$$

autrement dit $\mathbb{P}_{(X_1,\ldots,X_n)}$ et $\mathbb{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$ coïncident sur les rectangles $B_1 \times \cdots \times B_n$ qui engendrent la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$, donc coïncident sur celle-ci. □

Le corollaire suivant est d'usage constant dans les applications. Il est énoncé pour des variables aléatoires réelles mais est identique pour des vecteurs aléatoires.

Corollaire 3. *Si des variables aléatoires réelles $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, et si $\psi_1, \ldots, \psi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions boréliennes, alors $\psi_1(X_1), \ldots, \psi_n(X_n)$ sont indépendantes.*

Il suffit en effet d'appliquer la caractérisation précédente aux fonctions boréliennes (positives ou bornées) $\phi_1 \circ \psi_1, \ldots, \phi_n \circ \psi_n$.

Le second corollaire est intuitivement clair, mais sa démonstration nécessite un peu de soin. Il est énoncé pour une partition des indices en deux parties, mais reste valable pour toute partition.

Corollaire 4. *Si $(X_1, \ldots, X_n)$ est une famille de variables aléatoires (réelles) indépendantes, pour tout $1 \leq k < n$, les vecteurs aléatoires $(X_1, \ldots, X_k)$ et $(X_{k+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendants.*

Démonstration. Pour soulager les notations, soient $Y = (X_1, \ldots, X_k)$ et $Z = (X_{k+1}, \ldots, X_n)$. Par indépendance des variables $X_1, \ldots, X_n$, pour tous boréliens $B_1, \ldots, B_n$,

$$\mathbb{P}\big(Y \in B_1 \times \cdots \times B_k, Z \in B_{k+1} \times \cdots \times B_n\big) \,=\, \prod_{\ell=1}^{n} \mathbb{P}(X_\ell \in B_\ell).$$

Comme

$$\mathbb{P}\big(Y \in B_1 \times \cdots \times B_k\big) \;=\; \prod_{\ell=1}^{k} \mathbb{P}(X_\ell \in B_\ell)$$

et

$$\mathbb{P}\big(Z \in B_{k+1} \times \cdots \times B_n\big) \;=\; \prod_{\ell=k+1}^{n} \mathbb{P}(X_\ell \in B_\ell),$$

en découpant le produit, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(Y \in B_1 \times \cdots \times B_k, Z \in B_{k+1} \times \cdots \times B_n\big)& \\ = \mathbb{P}\big(Y \in B_1 \times \cdots \times B_k\big)\, &\mathbb{P}\big(Z \in B_{k+1} \times \cdots \times B_n\big).\end{aligned}$$

La démonstration sera achevée si les pavés $B_1 \times \cdots \times B_k$ et $B_{k+1} \times \cdots \times B_n$ peuvent être remplacés par des boréliens quelconques de $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{n-k}$ respectivement. Un argument de classe monotone permet d'y accéder. Fixer $C = B_{k+1} \times \cdots \times B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-k})$; la famille

$$\mathcal{M} \;=\; \big\{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\,;\, \mathbb{P}(Y \in B, Z \in C) = \mathbb{P}(Y \in B)\,\mathbb{P}(Z \in C)\big\}$$

est une classe monotone qui contient les pavés de la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, et donc cette tribu elle-même (Théorème 12, Leçon 1). Ainsi

$$\mathbb{P}(Y \in B, Z \in C) \;=\; \mathbb{P}(Y \in B)\,\mathbb{P}(Z \in C)$$

pour tout borélien B de $\mathbb{R}^k$. Répéter ensuite l'opération sur $\mathbb{R}^{n-k}$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ fixé. □

Il résulte par exemple de la conjonction des deux corollaires que si X_1, X_2, X_3 sont des variables aléatoires réelles indépendantes, et si $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont boréliennes, alors $\phi(X_1, X_2)$ et $\psi(X_3)$ sont indépendantes.

Quelques conséquences immédiates peuvent être dégagées des énoncés précédents, sous forme d'illustrations pratiques.

Si par exemple, (X, Y) est un couple aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que, pour tous $(m, n) \in \mathbb{N}^2$,

$$\mathbb{P}\big((X, Y) = (m, n)\big) \;=\; p_m\, q_n$$

pour des réels positifs p_m et q_n, alors X et Y sont indépendantes. En effet si P est la mesure $P = \sum_{m\in\mathbb{N}} p_m \delta_m$ et Q la mesure $Q = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n \delta_n$, alors la loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ du couple (X, Y) est le produit des mesures $P \otimes Q$ (puisque $P \otimes Q(\{(m, n)\}) = p_m\, q_n$, $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Il se peut que P et Q ne soient pas des probabilités, il convient alors de les renormaliser par leurs masses totales de sorte que les lois marginales de X et Y sont données par

$$\mathbb{P}_X \;=\; \frac{1}{P(\mathbb{N})}\, P \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_Y \;=\; \frac{1}{Q(\mathbb{N})}\, Q,$$

et $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y$ (en sommant sur m et n, il est clair que $P(\mathbb{N})\, Q(\mathbb{N}) = 1$).

De la même façon, si la loi d'un couple (X, Y) sur $\mathbb{R}^2$ a pour densité un produit de fonctions positives

$$f(x)g(y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda^2 = \lambda \otimes \lambda$ sur $\mathbb{R}^2$, alors X et Y sont indépendantes, de lois de densités respectives

$$\frac{1}{\int_{\mathbb{R}} f d\lambda}\, f \quad \text{et} \quad \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} g d\lambda}\, g$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. En effet, si A et B sont des boréliens,

$$\mathbb{P}\big((X, Y) \in A \times B\big) \;=\; \int_{A\times B} f g\, d\lambda^2 \;=\; \bigg(\int_A f\, d\lambda\bigg)\bigg(\int_B g\, d\lambda\bigg)$$

d'après le théorème de Fubini-Tonelli. Comme $\int_{\mathbb{R}^2} f g d\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda \int_{\mathbb{R}} g d\lambda = 1$, l'affirmation s'ensuit après renormalisation éventuelle.

3 Indépendance et non corrélation

La caractérisation de l'indépendance décrite dans le paragraphe précédent a des conséquences pratiques, qui toutefois ne lui sont pas équivalentes en général. Par exemple, si X et Y sont indépendantes et intégrables,

$$\mathbb{E}(XY) \,=\, \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y),$$

autrement dit X et Y sont non corrélées. Plusieurs précautions sont à considérer. D'abord, si X et Y sont indépendantes et intégrables, le produit XY est intégrable. Pour s'en convaincre, appliquer par exemple la Proposition 2 pour obtenir que, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}\big(|X|\mathbb{1}_{\{|X|\leq n\}}\,|Y|\mathbb{1}_{\{|Y|\leq n\}}\big) \,=\, \mathbb{E}\big(|X|\mathbb{1}_{\{|X|\leq n\}}\big)\,\mathbb{E}\big(|Y|\mathbb{1}_{\{|Y|\leq n\}}\big)$$

Par convergence monotone $\mathbb{E}(|XY|) < \infty$. En appliquant la même formule à X et Y plutôt que $|X|$ et $|Y|$ et le théorème de convergence dominée, l'égalité $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$ s'ensuit. Cette remarque est donc différente de la définition de non corrélation (Leçon 9) qui suppose que les variables sont de carré intégrable.

Ensuite, même pour des variables aléatoires de carré intégrable, l'égalité $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$ n'entraîne pas en général l'indépendance (tout comme l'espérance ou la variance ne caractérisent pas la loi !). De nombreux exemples sont disponibles, parmi eux X de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, $Y = X^2$ pour lesquelles $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X^3) = 0 = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(X^2)$ mais, pour plein de bonnes raisons, X et $Y = X^2$ ne sont pas indépendantes (Y dépend beaucoup de X...).

4 Méthodes et outils de caractérisation de l'indépendance

Étant donné un couple (X, Y) de variables aléatoires (réelles), ou plus généralement une famille $(X_1, \dots, X_n)$, le plus efficace afin de déterminer l'indépendance éventuelle de X et Y est de partir de la loi du couple à travers les espérances

$$\mathbb{E}\big(\phi(X)\psi(Y)\big)$$

pour $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ boréliennes, positives ou bornées. Une telle espérance se calcule par transport pour la loi du couple comme

$$\mathbb{E}\big(\phi(X)\psi(Y)\big) \,=\, \mathbb{E}\big((\phi\psi)(X,Y)\big) \,=\, \int_{\mathbb{R}^2} \phi\,\psi\,d\,\mathbb{P}_{(X,Y)}.$$

Si d'aventure, après quelques opérations algébriques ou changements de variables, cette expression prend la forme

$$\int_{\mathbb{R}^2} \phi\,\psi\,dPdQ \,=\, \int_{\mathbb{R}^2} \phi\,\psi\,dP \otimes Q$$

(par le théorème de Fubini-Tonelli) pour des mesures de probabilités P et Q, il en ressort que la loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ est le produit des lois $P \otimes Q$, et donc que X et Y sont indépendantes de lois respectives $\mathbb{P}_X = P$ et $\mathbb{P}_Y = Q$. (Quelquefois P et Q ne sont pas de probabilité, et il convient alors simplement de redistribuer les masses, comme par exemple $dPdQ = d(\frac{1}{2}P)d(2Q)$.)

L'illustration suivante pourra aider à la compréhension de la démarche. Elle reprend l'Exercice 3, Leçon 10, dans lequel X est une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ de paramètre 1. Pour décrire la loi du couple (N, D) où N et D sont respectivement les parties entière et décimale de X, il vient, suivant le schéma précédent,

$$\mathbb{E}\big(\phi(N)\psi(D)\big) \,=\, \mathbb{E}\big(\phi(\lfloor X\rfloor)\psi(X - \lfloor X\rfloor)\big)$$

pour toutes ϕ, ψ boréliennes, positives ou bornées. Par transport pour la loi de X,

$$\mathbb{E}\big(\phi(\lfloor X \rfloor)\psi(X - \lfloor X \rfloor)\big) \;=\; \int_{[0,\infty[} \phi(\lfloor x \rfloor)\psi(x - \lfloor x \rfloor)\, e^{-x} d\lambda$$

et par une relation de Chasles sur l'intégrale,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(\phi(\lfloor X \rfloor)\psi(X - \lfloor X \rfloor)\big) \;&=\; \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[n,n+1[} \phi(n)\psi(x-n)\, e^{-x} d\lambda \\ &=\; \sum_{n=0}^{\infty} \phi(n) e^{-n} \int_{[0,1[} \psi(y)\, e^{-y} d\lambda\end{aligned}$$

après le changement de variable $y = x - n$ pour chaque n.

Ainsi, si P est la mesure discrète $P = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}\delta_n$ (une forme de la loi géométrique) et Q la mesure de densité e^{-y} par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0, 1[$, il a été établi que

$$\mathbb{E}\big(\phi(N)\psi(D)\big) \;=\; \int_{(\mathbb{N}\cup\{0\})\times[0,1[} \phi\, \psi\, dPdQ.$$

Les mesures P et Q n'étant pas de probabilité, il convient de les normaliser pour obtenir que $\mathbb{P}_N = \frac{e-1}{e}\, P$ (loi de N) et $\mathbb{P}_D = \frac{e}{e-1}\, Q$ (loi de D), et donc que la loi du couple (N, D) est décrite par le produit des lois marginales $\mathbb{P}_N \otimes \mathbb{P}_D$. Cette conclusion établit que N et D sont indépendantes, ce qui est confirmé par le théorème de Fubini-Tonelli

$$\mathbb{E}\big(\phi(N)\psi(D)\big) \;=\; \int_{(\mathbb{N}\cup\{0\})\times[0,1[} \phi\, \psi\, d\,\mathbb{P}_N d\,\mathbb{P}_D \;=\; \mathbb{E}\big(\phi(N)\big)\, \mathbb{E}\big(\psi(D)\big).$$

La description de $\mathbb{E}(\phi(N)\psi(D))$ aura donc fourni tout à la fois la loi du couple, la loi des marginales, et l'indépendance.

L'indépendance d'une famille $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires réelles peut aussi être décrite à travers les fonctions de répartition, sous la forme

$$\mathbb{P}(X_1 \le t_1, \ldots, X_n \le t_n) \;=\; \mathbb{P}(X_1 \le t_1) \cdots \mathbb{P}(X_n \le t_n)$$

pour tous $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ (les mesures $\mathbb{P}_{(X_1,\dots,X_n)}$ et $\mathbb{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$ étant caractérisées sur les rectangles de $\mathbb{R}^n$), pas toujours l'outil le plus commode dans les applications.

Une autre méthode, plus efficace, pour mettre en évidence l'indépendance de variables aléatoires est la fonction caractéristique. L'énoncé suivant résulte de la Proposition 2 et du fait que la fonction caractéristique détermine la loi (d'une variable aléatoire et d'un vecteur aléatoire).

Proposition 5. *Une famille $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est indépendante si et seulement si la fonction caractéristique $\varphi_{(X_1,\dots,X_n)}$ (sur $\mathbb{R}^n$) du vecteur $X = (X_1, \dots, X_n)$ est égale au produit $\varphi_{X_1} \cdots \varphi_{X_n}$ des fonctions caractéristiques des lois marginales, autrement dit, pour tout $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$,*

$$\varphi_X(u) = \mathbb{E}\big(e^{i\langle u, X\rangle}\big) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(e^{iu_k X_k}\big) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(u_k).$$

5 Complément : Analyse booléenne

L'analyse booléenne moderne étudie les fonctions mesurables et les mesures sur le cube discret $\{0,1\}^n$ ou $\{-1,+1\}^n$.

L'espace $\{-1,+1\}^n$ est muni naturellement de la mesure de probabilité uniforme μ, autrement dit $\mu(\{x\}) = \frac{1}{2^n}$ pour tout $x \in \{-1,+1\}^n$. C'est la mesure produit de la mesure de Bernoulli $\nu = \frac{1}{2}\,\delta_{-1} + \frac{1}{2}\,\delta_{+1}$ sur chaque coordonnée. En effet,

$$\nu \otimes \cdots \otimes \nu\big(\{x\}\big) \,=\, \nu\big(\{x_1\}\big) \cdots \nu\big(\{x_n\}\big) \,=\, \frac{1}{2^n}$$

si $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

L'espace $\{-1,+1\}^n$ muni de la mesure uniforme μ donne lieu à une structure hilbertienne et à des décompositions orthogonales du type de Fourier.

Pour toute partie $A \subset \{1, \ldots, n\}$, soit $w_A = \prod_{i \in A} x_i$ où les $x_i : \{-1,+1\}^n \to \{-1,+1\}$, $i = 1, \ldots, n$, sont les applications coordonnées ($w_\emptyset = 1$). La famille $w_A, A \subset \{1, \ldots, n\}$, forme une base orthonormale de l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(\{-1,+1\}^n, \mu)$. La vérification s'établit par plusieurs points. D'après la nature produit de μ, $\int_{\{-1,+1\}^n} x_i \, d\mu = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. En conséquence, par le théorème de Fubini-Tonelli, $\int_{\{-1,+1\}^n} w_A \, d\mu = 0$ pour toutes les parties $A \subset \{1, \ldots, n\}$, sauf la partie vide. Observer en outre que $x_i^2 = 1$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Si A et B sont des parties de $\{1, \ldots, n\}$, alors $w_A \, w_B = w_{A \Delta B}$, où $A\Delta B$ est la différence symétrique de A et B. Il s'ensuit que $\int_{\{-1,+1\}^n} w_A \, w_B \, d\mu = 0$ si $A \neq B$, et $= 1$ si $A = B$.

La famille $w_A, A \subset \{1, \ldots, n\}$ forme donc un système orthonormal dans $\mathrm{L}^2(\{-1,+1\}^n, \mu)$. Pour démontrer que c'est une base, il reste à s'assurer que toute fonction $f : \{-1,+1\}^n \to \mathbb{R}$ peut se représenter sous la forme

$$f \,=\, \sum_{A \subset \{1, \ldots, n\}} f_A \, w_A$$

pour des coefficients $f_A \in \mathbb{R}$. Ceci peut être établi par récurrence sur n.

Si $n = 1$, une fonction $f : \{-1, +1\} \to \mathbb{R}$ prend deux valeurs $f(+1)$ et $f(-1)$, et donc est de la forme $f(x_1) = a + bx_1$ pour $a = \frac{1}{2}[f(+1) + f(-1)]$ et $b = \frac{1}{2}[f(+1) - f(-1)]$. Maintenant, si $f : \{-1, +1\}^{n+1} \to \mathbb{R}$, à $(x_1, \ldots, x_n) \in \{-1, +1\}^n$ fixé,

$$f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \ = \ a + bx_{n+1}$$

d'après l'étape d'initialisation, où donc a et b sont des fonctions sur $\{-1, +1\}^n$. Par hypothèse de récurrence, $a = \sum_{A \subset \{1,\ldots,n\}} a_A \, w_A$ et $b = \sum_{A \subset \{1,\ldots,n\}} b_A \, w_A$ pour des réels a_A, b_A, $A \subset \{1, \ldots, n\}$. Comme $w_A x_{n+1} = w_{A \cup \{n+1\}}$, la fonction f sur $\{-1, +1\}^{n+1}$ est elle aussi de la forme $\sum_{A \subset \{1,\ldots,n,n+1\}} f_A \, w_A$ ce qui démontre la récurrence. En conclusion, la famille $w_A, A \subset \{1, \ldots, n\}$, forme une base orthonormale de l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(\{-1, +1\}^n, \mu)$.

D'un point de vue probabiliste, les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ représentent simplement une famille de variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$ sur $\{-1, +1\}$ puisque la loi du vecteur est le produit des lois marginales de Bernoulli, c'est-à-dire la mesure de probabilité uniforme μ sur $\{-1, +1\}^n$. Pour passer à $\{0, 1\}$, il suffit de considérer $Y_i = \frac{1}{2}(X_i + 1)$, $i = 1, \ldots, n$. Des lois $\mathcal{B}(p)$ pour $p \in \,]0, 1[$ peuvent être considérées de la même manière, plus généralement des interactions aléatoires entre les sommets du cube.

Exercices

(*Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.*)

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ de paramètre $p \in]0,1[$; si Q et R désigne respectivement le quotient et le reste de la division de X par un entier $k \geq 2$ fixé, démontrer que les variables aléatoires Q et R sont indépendantes et déterminer leurs lois. (*Indication* : étudier $\mathbb{P}(Q = \ell, R = r)$, $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $r \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, et rappeler l'unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne.)

Exercice 2 (*Fonction d'Euler*). Soit n un entier (≥ 2) et $p_1, \ldots, p_k$ ses diviseurs premiers ; poser, pour $\ell = 1, \ldots, k$,

$$A_\ell \,=\, \big\{ x \in \{1, \ldots, n\} \,;\, x \text{ est multiple de } p_\ell \big\}.$$

L'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ étant muni de la probabilité uniforme P, montrer que les ensembles $A_1, \ldots, A_k$ sont indépendants (pour P).

Soit $\varphi(n)$ le nombre d'entiers de $\{1, \ldots, n\}$ premiers à n (fonction d'Euler) ; montrer que

$$\varphi(n) \,=\, n \prod_{\ell=1}^{k} \Big(1 - \frac{1}{p_\ell} \Big).$$

Exercice 3 (*Loi zeta*). La loi zeta (aussi appelée loi de Zipf[1]) μ_s de paramètre $s > 1$ est la mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$ définie par

$$\mu_s\big(\{n\}\big) \,=\, \frac{1}{\zeta(s)} \, \frac{1}{n^s} \,, \quad n \in \mathbb{N},$$

où $\zeta(s) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^s}$.

1. George Kingsley Zipf, linguiste, philologue et statisticien américain (1902–1950).

a) Soit X une variable aléatoire de loi μ_s. Discuter de l'existence des moments $\mathbb{E}(X^r)$, $r > 0$, suivant les valeurs de s et r, et donner leur expression. Si elle existe, expliciter $\mathrm{Var}(X)$.

b) Établir que

$$\zeta(s)\,\Gamma(s) \;=\; \int_0^\infty t^{s-1}\,\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt$$

où $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$ est la fonction Gamma. (*Indication* : développer $\frac{a}{1-a}$ en série, $0 < a < 1$.)

c) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, démontrer que $\mu_s(p\,\mathbb{N}) = \frac{1}{p^s}$.

d) Soit p_k, $k \geq 1$, la suite des nombres premiers, et $A_k = p_k\mathbb{N}$. Démontrer que $\bigcap_{k\geq 1} A_k^c = \{1\}$, puis que

$$\frac{1}{\zeta(s)} \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu_s\bigg(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c\bigg).$$

e) Démontrer que les ensembles A_k, $k \geq 1$, sont indépendants sous μ_s. En déduire une preuve probabiliste de l'*identité d'Euler*

$$\frac{1}{\zeta(s)} \;=\; \prod_{k\geq 1}\Big(1-\frac{1}{p_k^s}\Big).$$

Exercice 4. Soit $\alpha > 0$, et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X suivant la loi uniforme $\mathcal{U}(0,\frac{1}{\alpha})$ sur l'intervalle $[0,\frac{1}{\alpha}]$ et Y la loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha)$ de paramètre $\alpha > 0$. Décrire la loi du couple (X,Y), et calculer $\mathbb{P}(X \geq Y)$.

Exercice 5. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soient X et Y des variables aléatoires indépendantes, X de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ de paramètre 1, et Y de loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ $(n \geq 1)$. Démontrer que la loi de $Z = \frac{X}{1+Y}$ a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$ qui sera précisée. (*Indication* : décrire par exemple $\mathbb{E}(\phi(Z))$ pour $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne, positive ou bornée.) Calculer, si elle existe, l'espérance $\mathbb{E}(Z)$.

Exercice 6. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

a) En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, démontrer que pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}(X > t\,Y) \;=\; \int_{]0,\infty[} e^{-ty} d\,\mathbb{P}_Y(y) \;=\; \mathbb{E}\big(e^{-tY}\big).$$

En déduire la fonction de répartition de la loi de la variable aléatoire $\frac{X}{Y}$, puis montrer que celle-ci admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

b) Retrouver le résultat de la question précédente en évaluant, pour toute fonction borélienne $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, positive ou bornée, l'espérance $\mathbb{E}\big(\phi\big(\frac{X}{Y}\big)\big)$.

c) Déterminer la loi de $\frac{X}{X+Y}$.

d) Démontrer que $\frac{X}{X+Y}$ et $X + Y$ sont indépendantes.

Exercice 7 (*Développement de l'Exercice 4, Leçon 9*). Soit X_n une variable aléatoire de loi uniforme $\mathcal{U}(0, n)$ sur l'intervalle $[0, n]$, où n est un entier ≥ 1.

a) Démontrer que $\mathbb{E}(X_n) = n\,\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathrm{Var}(X_n) = n^2\,\mathrm{Var}(X_1)$, et calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathrm{Var}(X_1)$.

b) Quelle est la loi du couple $(\lfloor X_n \rfloor + 1, \lfloor X_n \rfloor + 1 - X_n)$?

c) Soit Y_n une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$. Justifier que $\mathrm{Var}(Y_n) = \mathrm{Var}(X_n) - \mathrm{Var}(X_1)$. En déduire la formule pour $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice 8. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes de loi zeta de paramètres respectifs $s > 1$ et $t > 1$, et soit $Z = \mathrm{pgcd}(X, Y)$; démontrer que pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Z \in p\,\mathbb{N}) = \frac{1}{p^{s+t}}$. *En déduire que Z suit une loi zeta de paramètre $s + t$.

Exercice 9. Montrer par un calcul direct sur les probabilités que si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètre $p_1 \in]0, 1[$ et $p_2 \in]0, 1[$ respectivement, alors $\min(X_1, X_2)$ suit encore une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ dont on précisera le paramètre p. Qu'en est-il si X_1 et X_2 sont exponentielles de paramètre $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$? Le démontrer sans calcul grâce à l'Exercice 5, Leçon 8.

Exercice 10. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètres respectifs $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$.

a) Démontrer que $\mathbb{P}(X_1 = X_2) = 0$.

b) Poser $Z = \min(X_1, X_2)$ et $M = \mathrm{argmin}\,(X_1, X_2)$ (par définition $M = i$ signifie que $Z = X_i$). Démontrer que Z suit une loi exponentielle, et que

$$\mathbb{P}(M = 1) \;=\; \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}\,, \quad \mathbb{P}(M = 2) \;=\; \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\,.$$

c) Calculer, pour $i = 1, 2$ et $t \geq 0$, $\mathbb{P}(M = i, Z > t)$.

d) Que peut-on dire des variables aléatoires M et Z ?

Exercice 11. Si X est une variable aléatoire de carré intégrable, démontrer que

$$\mathrm{Var}(X) \;=\; \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\big([X - Y]^2\big)$$

où Y est une variable aléatoire indépendante de X et de même loi.

Exercice 12* (*Variance de la loi de Gumbel*).

a) Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $]0, \infty[$, et si Y est indépendante de même loi que X, démontrer que la loi de $\ln(Z)$ où $Z = \frac{X}{Y}$ est symétrique (voir Exercice 5, Leçon 9).

b) En utilisant les conclusions de l'Exercice 5, Leçon 9, ainsi que l'Exercice 11, démontrer alors que si $\ln(Z)$ est de carré intégrable,

$$\mathrm{Var}\big(\ln(X)\big) \;=\; 2\int_0^\infty t\,\mathbb{P}\big(\ln(Z) \geq t\big)dt.$$

Dans ce qui suit, X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

c) Rappeler pourquoi, d'après l'Exercice 6, $\mathbb{P}(Z \geq t) = \frac{1}{1+t}$ pour tout $t \geq 0$.

d) Déduire des deux questions précédentes que

$$\mathrm{Var}\big(\ln(X)\big) \;=\; \int_0^\infty \frac{2t}{1+e^t}\,dt \;=\; \frac{\pi^2}{6} \quad \text{(valeur admise)}.$$

e) Démontrer que $-\ln(X)$ suit la loi de Gumbel, et donner la variance de cette loi.

Exercice 13. Vérifier l'identité $\max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$ pour tous réels a, b.

Soient à présent deux variables aléatoires X et Y indépendantes de même loi intégrable ; poser $Z = \max(X,Y)$. Démontrer que

$$\mathbb{E}(Z) - \mathbb{E}(X) \;\geq\; \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\big(|X - \mathbb{E}(X)|\big).$$

Exercice 14. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soient X et N deux variables aléatoires indépendantes, X suivant la loi uniforme $\mathcal{U}(-1,+1)$ sur $[-1,+1]$ et N la loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$ de paramètre $\theta > 0$. Calculer $\mathbb{E}(X^N)$, et essayer d'en donner une valeur exacte quand $\theta = 1$.

Exercice 15 (*Temps d'atteinte.*) Soit X_n, $n \in \mathbb{N}$, une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ de paramètre $p \in]0,1[$ à valeurs dans $\{0,1\}$; poser $T = \inf\{n \geq 1\,; X_n = 1\}$ avec $\inf \emptyset = \infty$.

a) Montrer que $T < \infty$ presque sûrement et calculer $\mathbb{P}(T = n)$ pour tout $n \geq 1$.

b) Calculer $\mathbb{E}(T)$ et $\mathrm{Var}(T)$.

c) Définir la variable aléatoire X_T et donner sa loi.

d) Démontrer que les variables aléatoires $Y_k = X_{T+k}$, $k \geq 1$, sont indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p.