

Leçon 14

Application de l'indépendance : vecteur aléatoire gaussien

1. Variable aléatoire gaussienne réelle
2. Vecteur aléatoire gaussien
3. Vecteur gaussien standard
5. Indépendance et diagonalisation
6. Découverte : Mouvement brownien et mesure de Wiener

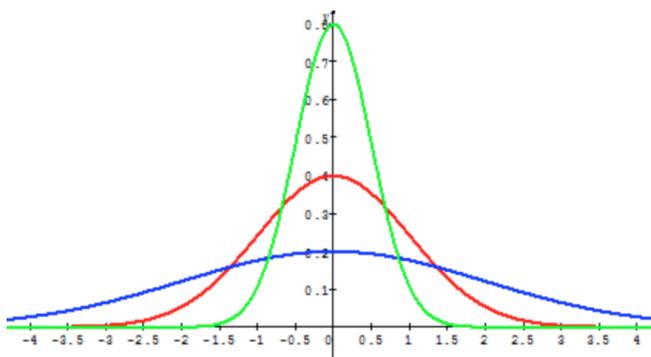
Exercices

1 Variable aléatoire gaussienne réelle

Une variable aléatoire réelle X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est de loi gaussienne, ou normale, $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ de moyenne $m \in \mathbb{R}$ et de variance $\sigma^2 > 0$ si celle-ci a pour densité

$$f_{m, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur \mathbb{R} . La dénomination des paramètres provient donc du fait que $\mathbb{E}(X) = m$ et $\text{Var}(X) = \sigma^2$.



La loi $\mathcal{N}(0, 1)$ (dite centrée réduite) engendre toutes les autres lois normales : si Y suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, alors $X = m + \sigma Y$ est de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ (et réciproquement, si X est de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors $Y = \frac{X-m}{\sigma}$ est de loi $\mathcal{N}(0, 1)$). Cette observation découle du changement de variable $y = \frac{x-m}{\sigma}$ dans le calcul de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x) f_{m, \sigma^2}(x) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \phi(m + \sigma y) f_{0,1}(y) d\lambda(y)$$

pour $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne, positive ou bornée.

Ainsi, dans la famille des variables gaussiennes, les paramètres de moyenne et de variance caractérisent la loi (une propriété qui n'est pas vraie en général).

Le calcul de la transformée de Laplace d'une variable Y de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ indique que, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(e^{uY}) = e^{\frac{1}{2}u^2}.$$

(En conséquence, si X est de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $\mathbb{E}(e^{uX}) = e^{um + \frac{1}{2}\sigma^2 u^2}$, $u \in \mathbb{R}$.) Une variable aléatoire gaussienne admet ainsi des moments de tous les ordres. Ils peuvent en fait être déterminés sur le développement de la transformée de Laplace, par exemple pour Y de loi $\mathcal{N}(0, 1)$,

$$\mathbb{E}(e^{uY}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \mathbb{E}(Y^n)$$

à travers son identification avec la série définissant $e^{\frac{1}{2}u^2}$, fournissant

$$\mathbb{E}(Y^{2r}) = \frac{(2r)!}{2^r r!}$$

et $\mathbb{E}(Y^{2r+1}) = 0$, $r \in \mathbb{N}$.

Il est possible de travailler de manière équivalente avec la fonction caractéristique (Exercice 10, Leçon 10)

$$\varphi_X(u) = \mathbb{E}(e^{iuX}) = e^{ium - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2}, \quad u \in \mathbb{R},$$

(X de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$) avec les mêmes conclusions.

Ainsi qu'il a été détaillé dans la Leçon 13, si X_1 et X_2 sont indépendantes de lois normales respectives $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$, $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, alors $X_1 + X_2$ a pour loi $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

2 Vecteur aléatoire gaussien

Un vecteur aléatoire est gaussien si toute combinaison linéaire de ses coordonnées est une variable aléatoire gaussienne réelle. C'est l'objet de la définition suivante.

Définition 1. Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_d)$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ est dit gaussien si pour tout $c = (c_1, \dots, c_d) \in \mathbb{R}^d$,

$$\langle c, X \rangle = \sum_{k=1}^d c_k X_k$$

est une variable aléatoire gaussienne réelle.

D'après le premier paragraphe, la variable gaussienne $\langle c, X \rangle$ est déterminée par ses paramètres de moyenne et de variance, à savoir

$$\mathbb{E}(\langle c, X \rangle) \quad \text{et} \quad \text{Var}(\langle c, X \rangle).$$

Par linéarité

$$\mathbb{E}(\langle c, X \rangle) = \sum_{k=1}^d c_k \mathbb{E}(X_k) = \langle c, \mathbb{E}(X) \rangle$$

où $m = \mathbb{E}(X) = (\mathbb{E}(X_1), \dots, \mathbb{E}(X_d))$ est le vecteur des moyennes, et par bilinéarité

$$\text{Var}(\langle c, X \rangle) = \sum_{k,\ell=1}^d c_k c_\ell \mathbb{E}([X_k - \mathbb{E}(X_k)] [X_\ell - \mathbb{E}(X_\ell)]) = \langle \Sigma c, c \rangle$$

où $\Sigma = (\Sigma_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq d}$,

$$\Sigma_{k,\ell} = \mathbb{E}([X_k - \mathbb{E}(X_k)] [X_\ell - \mathbb{E}(X_\ell)]),$$

est la matrice de covariance (dans les notations de la Leçon 9). La loi du vecteur X est ainsi décrite par son vecteur espérance $m = \mathbb{E}(X)$ et sa matrice de covariance Σ . Par analogie avec le cas réel, elle sera notée $\mathcal{N}(m, \Sigma)$.

En terme de fonction caractéristique de la loi du vecteur X ,

$$\varphi_X(u) = \mathbb{E}(e^{i\langle u, X \rangle}) = \varphi_{\langle u, X \rangle}(1) = e^{i\langle u, m \rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma u, u \rangle}, \quad u \in \mathbb{R}^d,$$

d'après la forme de la fonction caractéristique d'une variable gaussienne réelle.

3 Vecteur gaussien standard

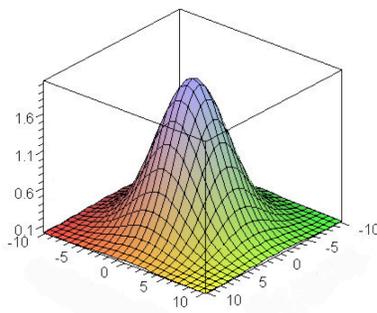
À l'image du cas réel, le vecteur gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance $\Sigma = \text{Id}$ (matrice identité $d \times d$) joue un rôle particulier, et engendre tous les autres vecteurs gaussiens.

Soit $Y = (Y_1, \dots, Y_d)$ le vecteur aléatoire dont la loi a pour densité

$$f(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{1}{2}|y|^2}, \quad y \in \mathbb{R}^d,$$

par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda = \lambda^d$ sur \mathbb{R}^d , où il est rappelé que, pour $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$, $|y|^2 = \langle y, y \rangle = \sum_{k=1}^d y_k^2$.

La détermination des lois marginales montre immédiatement, par intégration de la densité par rapport à $d - 1$ coordonnées, que chaque composante Y_k , $k = 1, \dots, d$, suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Par ailleurs, la densité f étant un produit (la loi du vecteur Y est le produit des lois $\mathcal{N}(0, 1)$), les variables marginales Y_1, \dots, Y_d sont indépendantes. Il s'ensuit que Y est un vecteur gaussien, l'addition de variables gaussiennes indépendantes étant encore gaussienne. En outre, Y a pour moyenne $m = 0$ et matrice de covariance $\Sigma = \text{Id}$. Le vecteur aléatoire Y représente donc bien la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, \text{Id})$ dans \mathbb{R}^d .



Densité de la loi normale en dimension 2

La proposition suivante démontre que, comme dans le cas réel, la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, \text{Id})$ engendre toutes les autres. Dans ce but, il est utile de rappeler

qu'une matrice de covariance Σ est symétrique et (semi-) définie positive, et qu'à ce titre elle admet une racine carrée $\Sigma = A {}^T A$ (où ${}^T A$ est la transposée de A). Dans la proposition suivante, Y est de loi $\mathcal{N}(0, \text{Id})$ dans \mathbb{R}^d .

Proposition 2. *Soit X un vecteur gaussien de moyenne m et de matrice de covariance $\Sigma = A {}^T A$: alors X a même loi que $m + AY$.*

Démonstration. Quitte à remplacer X par $X - m$, il suffit de considérer le cas d'un vecteur X centré, de matrice de covariance Σ , dont il faut vérifier qu'il a même loi que AY . Le vecteur AY satisfait la définition de vecteur gaussien (centré) ; en effet, ses composantes (dans \mathbb{R}^d) sont

$$(AY)_k = \sum_{\ell=1}^d A_{k,\ell} Y_\ell, \quad k = 1, \dots, d.$$

Ainsi, si c_1, \dots, c_d sont des coefficients réels, la combinaison linéaire

$$\sum_{k=1}^d c_k (AY)_k = \sum_{\ell=1}^d \left(\sum_{k=1}^d c_k A_{k,\ell} \right) Y_\ell$$

(en terme matriciel, pour $c = (c_1, \dots, c_d) \in \mathbb{R}^d$, $\langle c, AY \rangle = \langle {}^T A c, Y \rangle$) est aussi une combinaison linéaire des coordonnées du vecteur gaussien Y , et donc définit une variable aléatoire normale réelle.

Comme la moyenne et la covariance caractérisent les lois gaussiennes, il reste à se convaincre que la covariance du vecteur gaussien (centré) AY est bien Σ , la

covariance de X . Mais, si $k, \ell \in \{1, \dots, d\}$, d'après la description précédente,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((AY)_k(AY)_\ell) &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^d A_{k,j}Y_j \sum_{j'=1}^d A_{\ell,j'}Y_{j'}\right) \\ &= \sum_{j,j'=1}^d A_{k,j}A_{\ell,j'} \mathbb{E}(Y_jY_{j'}) \\ &= \sum_{\ell=1}^d A_{k,j}A_{\ell,j} = \Sigma_{k,\ell} \end{aligned}$$

puisque $\mathbb{E}(Y_jY_{j'}) = 1$ si $j = j'$ et 0 sinon, et par définition $\Sigma = A^\top A$. (En terme matriciel, pour $c, c' \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{E}(\langle c, AY \rangle \langle c', AY \rangle) = \mathbb{E}(\langle {}^\top A c, Y \rangle \langle {}^\top A c', Y \rangle) = \langle {}^\top A c, {}^\top A c' \rangle = \langle \Sigma c, c' \rangle.)$$

La démonstration de la proposition est ainsi terminée. \square

La proposition précédente est utile et efficace, et produit plusieurs conséquences importantes. Par exemple, la connaissance explicite de la loi de Y avec sa densité par rapport à la mesure de Lebesgue permet de transférer cette dernière sur la loi de X , au moins si la matrice de covariance est inversible. En effet, d'après la proposition donc, pour tout borélien B de \mathbb{R}^d ,

$$\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(m + AY \in B) = \mathbb{P}(Y \in A^{-1}(B - m))$$

en supposant Σ , et donc sa racine carrée A , inversible. Ici $A^{-1}(B - m)$ est le borélien

$$A^{-1}(B - m) = \{A^{-1}(x - m); x \in B\}.$$

La loi de Y a pour densité $\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{1}{2}|y|^2}$, $y \in \mathbb{R}^d$, par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur \mathbb{R}^d , de sorte que

$$\mathbb{P}(X \in B) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{A^{-1}(B-m)} e^{-\frac{1}{2}|y|^2} d\lambda.$$

En appliquant le changement de variable sur \mathbb{R}^d , $x = m + Ay$ de jacobien $\det(A)$, il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in B) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |\det(A)|} \int_B e^{-\frac{1}{2}|A^{-1}(x-m)|^2} d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \sqrt{|\det(\Sigma)|}} \int_B e^{-\frac{1}{2}\langle \Sigma^{-1}(x-m), x-m \rangle} d\lambda.\end{aligned}$$

Cette formule exprime ainsi que la loi du vecteur gaussien X admet pour densité

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \sqrt{|\det(\Sigma)|}} e^{-\frac{1}{2}\langle \Sigma^{-1}(x-m), x-m \rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

par rapport à la mesure de Lebesgue.

L'expression précédente de la densité de la loi du vecteur gaussien X suppose la non singularité de la matrice de covariance. Mais, même en présence de singularité, il est possible de décrire des densités dans des sous-espaces vectoriels de dimension le rang de la matrice de covariance. Sans en faire une analyse précise, l'exemple d'un vecteur gaussien (centré) $X = (X_1, X_2, X_3)$ de matrice de covariance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est suggestif : en fait la composante X_1 est nulle (presque sûrement) puisque $\mathbb{E}(X_1^2) = 0$, et seules les coordonnées X_2 et X_3 traduisent des variations gaussiennes. Le vecteur X prend en fait presque sûrement ses valeurs dans un espace de dimension 2, le couple (X_2, X_3) des deuxième et troisième coordonnées admettant une densité dans \mathbb{R}^2 (la densité standard de la loi $\mathcal{N}(0, \text{Id})$ de \mathbb{R}^2).

4 Indépendance et diagonalisation

C'est une affirmation générale suivant laquelle l'indépendance d'une famille (X_1, \dots, X_d) de variables aléatoires de carré intégrable entraîne leur non corrélation (orthogonalité dans L^2), autrement dit que la matrice de covariance du vecteur (X_1, \dots, X_d) est diagonale, mais que la réciproque est fautive en général. Celle-ci est néanmoins correcte pour les coordonnées X_1, \dots, X_d d'un vecteur gaussien $X = (X_1, \dots, X_d)$.

Théorème 3. *Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur gaussien; la famille (X_1, \dots, X_d) est indépendante si et seulement si la matrice de covariance Σ du vecteur X est diagonale.*

Démonstration. Les variables gaussiennes étant de carré intégrable, sous l'hypothèse d'indépendance, les variables X_1, \dots, X_d sont deux à deux non corrélées, et donc la matrice de covariance est diagonale. Réciproquement, si la matrice de covariance Σ est diagonale, un premier cas examine la situation où tous les termes de la diagonale sont strictement positifs. Alors Σ est inversible, et il est clair sur la forme de la densité de la loi de X décrite dans le paragraphe précédent que celle-ci est un produit en les coordonnées x_1, \dots, x_d de $x \in \mathbb{R}^d$. Donc, d'après le critère d'indépendance des lois produits, les composantes X_1, \dots, X_d du vecteur X sont indépendantes. S'il existe des termes diagonaux nuls, il suffit de les éliminer et de raisonner de la même façon dans l'espace $\mathbb{R}^{d'}$ où d' est le nombre de $\Sigma_{k,k}$ non nuls. En fait, le vecteur X est alors simplement un vecteur de $\mathbb{R}^{d'}$, les autres coordonnées étant presque sûrement nulles. Le théorème est ainsi démontré. \square

Une autre démonstration peut être proposée avec l'outil de la fonction caractéristique. En remplaçant X par $X - \mathbb{E}(X)$, le raisonnement est réduit au cas d'un vecteur aléatoire gaussien centré. Pour tout $u = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d$,

$$\varphi_X(u) = \mathbb{E}(e^{i\langle u, X \rangle}) = e^{-\frac{1}{2}\langle \Sigma u, u \rangle}.$$

Si Σ est diagonale,

$$\langle \Sigma u, u \rangle = \sum_{k=1}^d u_k^2 \Sigma_{k,k}$$

et, pour tout $k = 1, \dots, d$, $\Sigma_{k,k} = \mathbb{E}(X_k^2) = \text{Var}(X_k)$. Ainsi,

$$\varphi_X(u) = e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^d u_k^2 \mathbb{E}(X_k^2)} = \prod_{k=1}^d e^{-\frac{1}{2} u_k^2 \mathbb{E}(X_k^2)}.$$

Or $e^{-\frac{1}{2} u_k^2 \mathbb{E}(X_k^2)}$ est la fonction caractéristique, au point $u_k \in \mathbb{R}$, de la coordonnée X_k , de sorte que $\varphi_X(u) = \prod_{k=1}^d \varphi_{X_k}(u_k)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, propriété qui caractérise l'indépendance des variables X_1, \dots, X_d .

Il est possible d'aller un petit peu plus loin dans l'analyse d'un vecteur gaussien et de sa matrice de covariance. Soit ainsi X un vecteur gaussien, centré pour simplifier la présentation, de matrice de covariance Σ ; cette dernière étant symétrique et (semi-) définie positive, elle est diagonalisable dans une base orthonormée, et ses valeurs propres sont positives ou nulles : il existe Q matrice de passage orthogonale ($Q^\top Q = {}^\top Q Q = \text{Id}$) telle que $\Sigma = Q D {}^\top Q$, où D est une matrice diagonale de valeurs (propres) sur la diagonale $s_1, \dots, s_d \geq 0$. Dans cette représentation $A = Q \sqrt{D}$, où \sqrt{D} est la matrice diagonale composée de $\sqrt{s_1}, \dots, \sqrt{s_d}$.

Par la Proposition 3, le vecteur gaussien X a même loi que

$$AY = Q \sqrt{D} Y$$

où Y suit la loi $\mathcal{N}(0, \text{Id})$. Il est immédiat que le vecteur $\sqrt{D} Y$, de matrice de covariance D , admet des composantes indépendantes.

En conséquence de cette construction, partant du vecteur gaussien X , après le changement de base par la matrice de passage ${}^\top Q$, le nouveau vecteur gaussien $Z = {}^\top Q X$ a même loi que

$${}^\top Q AY = {}^\top Q Q \sqrt{D} Y = \sqrt{D} Y$$

(par transformation linéaire). Les composantes de Z sont donc indépendantes. Ainsi, après un changement de base approprié (issu de la diagonalisation de la matrice de covariance), un vecteur gaussien peut être mis dans une position où ses coordonnées sont indépendantes, avec tout le bénéfice qu'il en résulte.

5 Découverte : Mouvement brownien et mesure de Wiener

La loi gaussienne standard $\mathcal{N}(0, \text{Id})$ sur \mathbb{R}^d , centrée de matrice de covariance Id , est la loi gaussienne canonique sur un espace vectoriel (\mathbb{R}^d) de dimension finie. Est-il possible d'imaginer un objet analogue en dimension infinie ?

Soit par exemple l'espace de Banach $E = C([0, 1])$ des fonctions (réelles) continues sur $[0, 1]$, muni de la norme uniforme, et de la σ -algèbre \mathcal{B} des boréliens (engendrés pas les ouverts) ; une variable aléatoire à valeurs dans E ,

$$X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (E, \mathcal{B})$$

définit, pour chaque $\omega \in \Omega$, une « trajectoire » $X(\omega) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui est une fonction continue sur $[0, 1]$. Celle-ci peut se représenter comme

$$t \in [0, 1] \rightarrow X(\omega)(t)$$

mais la notation plus traditionnelle (commode) est $X_t(\omega)$, $t \in [0, 1]$. Ainsi, pour chaque $t \in [0, 1]$, X_t est une variable aléatoire réelle.

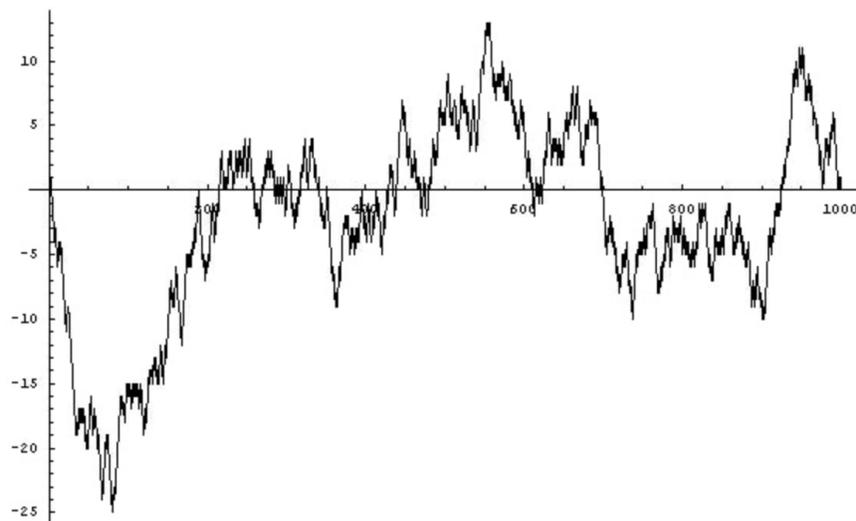
La définition de variable, ou vecteur, gaussien dans ce cadre est similaire à la définition en dimension finie et consiste à demander que, pour tous t_1, \dots, t_d dans $[0, 1]$, le vecteur $(X_{t_1}, \dots, X_{t_d})$ est gaussien dans \mathbb{R}^d .

Pour plus de simplicité, il sera supposé dans la suite que X est un vecteur gaussien centré dans $E = C([0, 1])$ (au sens où $\mathbb{E}(X_t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$). D'après la caractérisation des vecteurs gaussiens dans \mathbb{R}^d , il s'ensuit que la loi de X est complètement caractérisée par la famille des covariances $\Sigma(s, t) = \mathbb{E}(X_s X_t)$, $s, t \in [0, 1]$.

Il existe bien entendu de nombreux exemples de telles familles de covariance ; l'une d'elle est plus intéressante que d'autres, celle définie par

$$\Sigma(s, t) = \mathbb{E}(X_s X_t) = \min(s, t), \quad s, t \in [0, 1].$$

Cette covariance est celle du fameux « mouvement brownien ¹ », processus stochastique décrivant le mouvement aléatoire, et sans mémoire, d'une particule.



Un première vérification est toutefois de s'assurer qu'il s'agit bien d'une covariance, au sens où, pour tous t_1, \dots, t_d dans $[0, 1]$, il existe un vecteur gaussien $(X_{t_1}, \dots, X_{t_d})$ dans \mathbb{R}^d tel que $\mathbb{E}(X_{t_k} X_{t_\ell}) = \min(t_k, t_\ell)$, $t_k, t_\ell \in [0, 1]$. (À noter que $X_0 = 0$ presque sûrement.) La réponse est assez facile : si $Y = (Y_1, \dots, Y_d)$ est un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0, \text{Id})$ dans \mathbb{R}^d , et si $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_d \leq 1$,

$$X_{t_k} = \sum_{\ell=1}^k \sqrt{t_\ell - t_{\ell-1}} Y_\ell, \quad k = 1, \dots, d,$$

définit un tel vecteur gaussien (centré) de matrice de covariance souhaitée ; en effet, si $k \leq k'$,

$$\mathbb{E}(X_{t_k} X_{t_{k'}}) = \sum_{\ell=1}^k \sum_{\ell'=1}^{k'} \sqrt{t_\ell - t_{\ell-1}} \sqrt{t_{\ell'} - t_{\ell'-1}} \mathbb{E}(Y_\ell Y_{\ell'}).$$

1. d'après Robert Brown, chirurgien, botaniste et explorateur écossais (1773–1858).

Comme $\mathbb{E}(Y_\ell Y_{\ell'}) = 0$ si $\ell \neq \ell'$, et 1 sinon, il vient

$$\mathbb{E}(X_{t_k} X_{t_{k'}}) = \sum_{\ell=1}^k (t_\ell - t_{\ell-1}) = t_k = \min(t_k, t_{k'}).$$

En revanche, il est plus délicat de s'assurer que le vecteur gaussien ainsi défini est (presque sûrement) à valeurs dans l'espace $E = C([0, 1])$ des fonctions continues sur $[0, 1]$, en langage probabiliste, que les « trajectoires sont (presque sûrement) continues ». C'est en effet le cas, et la loi de ce vecteur gaussien définit alors une mesure de probabilité sur les boréliens de $C([0, 1])$ appelée mesure de Wiener². Sous la mesure de Wiener sur $C([0, 1])$, les applications coordonnées $x \in C([0, 1]) \mapsto x(t)$, $t \in [0, 1]$, telles que $x(0) = 0$, suivent la loi du mouvement brownien.

2. Norbert Wiener, mathématicien américain (1894–1964).

Exercices

(Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.)

Exercice 1. L'objet de l'exercice est d'obtenir un bon encadrement de la probabilité de queue d'une variable X de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, à savoir

$$\mathbb{P}(X \geq t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{[t, \infty[} e^{-\frac{1}{2}x^2} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

quand $t \geq 0$ est grand.

a) Démontrer, par une étude de fonction, que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t^2}.$$

b) Par une intégration par parties, établir que si $t > 0$,

$$\int_t^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{2}t^2} - \int_t^\infty \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

c) Vérifier de la même façon que si $t > 0$,

$$\int_t^\infty \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{t^3} e^{-\frac{1}{2}t^2} - \int_t^\infty \frac{3}{x^4} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

d) Conclure des questions b) et c) que pour tout $t > 0$,

$$\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \leq \mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{1}{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}.$$

Exercice 2. Montrer qu'il existe un vecteur gaussien centré X à valeurs dans \mathbb{R}^3 de matrice de covariance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\mathbb{E}(\langle c, X \rangle^2)$ pour tout $c \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 3. Sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et soit ε , une variable aléatoire indépendante de X , telle que $\mathbb{P}(\varepsilon = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon = +1) = \frac{1}{2}$. Démontrer que εX suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Le couple $(X, \varepsilon X)$ est-il gaussien ?

Exercice 4. Soient X et Y deux variables aléatoires normales centrées réduites $\mathcal{N}(0, 1)$ indépendantes. Quelle est la loi du couple (X, Y) ? Déterminer la loi de $\frac{X}{Y}$.

Exercice 5*. Soit (X, Y) un couple aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, \text{Id})$ sur \mathbb{R}^2 ; rappeler les lois marginales. Démontrer que XY a même loi que $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$. (*Indication* : utiliser la formule de polarisation $4XY = (X + Y)^2 - (X - Y)^2$.)

Exercice 6. Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire de loi gaussienne standard $\mathcal{N}(0, \text{Id})$ sur \mathbb{R}^d ; démontrer que la loi de $\frac{X}{|X|}$ est invariante par transformation orthogonale (pour rappel $|X| = (\sum_{k=1}^d X_k^2)^{\frac{1}{2}}$). Quelle est cette loi ?

Exercice 7*. Soit $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ un vecteur gaussien centré de dimension 4; établir l'identité

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_1 X_2 X_3 X_4) &= \mathbb{E}(X_1 X_2) \mathbb{E}(X_3 X_4) + \mathbb{E}(X_1 X_3) \mathbb{E}(X_2 X_4) \\ &\quad + \mathbb{E}(X_1 X_4) \mathbb{E}(X_2 X_3). \end{aligned}$$

(*Indications* : Plusieurs arguments sont possibles. Par exemple, si $Y = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$ est un vecteur indépendant de même loi que X , un contrôle

des covariances assure que $X + Y$ a même loi que $\sqrt{2}X$. Développer alors l'identité qui en résulte

$$4 \mathbb{E}(X_1 X_2 X_3 X_4) = \mathbb{E}((X_1 + Y_1)(X_2 + Y_2)(X_3 + Y_3)(X_4 + Y_4)).$$

Sinon, si $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4$, l'expression de la fonction caractéristique est $\mathbb{E}(e^{i\langle u, X \rangle}) = e^{-\frac{1}{2}\mathbb{E}(\langle u, X \rangle^2)}$; développer les deux expressions à l'ordre 4, et identifier les termes correspondants aux u_k tous différents.)

Exercice 8. Soient $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_d$ des nombres réels, et soit (X_0, X_1, \dots, X_d) un vecteur aléatoire gaussien centré de matrice de covariance

$$\mathbb{E}(X_k X_\ell) = \min(t_k, t_\ell), \quad k, \ell = 0, 1, \dots, d.$$

(Comme $\mathbb{E}(X_0^2) = 0$, il sera convenu que $X_0 = 0$ presque sûrement.) Déterminer les lois marginales. Poser $Y_k = \frac{X_k - X_{k-1}}{\sqrt{t_k - t_{k-1}}}$, $k = 1, \dots, d$. Démontrer que le vecteur aléatoire (Y_1, \dots, Y_d) est de loi $\mathcal{N}(0, \text{Id})$ dans \mathbb{R}^d .

Exercice 9. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, et soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels. Démontrer que les variables aléatoires $\sum_{k=1}^n a_k X_k$ et $\sum_{k=1}^n b_k X_k$ sont indépendantes si et seulement si $\sum_{k=1}^n a_k b_k = 0$.

Exercice 10. Soient $X = (X_1, \dots, X_d)$ et $Y = (Y_1, \dots, Y_d)$ deux vecteurs aléatoires gaussiens centrés sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, supposés indépendants et de même loi. Pour tout réel θ , soient $X(\theta) = X \sin(\theta) + Y \cos(\theta)$ et $X'(\theta) = X \cos(\theta) - Y \sin(\theta)$; démontrer que pour tout θ , $X(\theta)$ et $X'(\theta)$ sont des vecteurs aléatoires gaussiens indépendants de même loi que X .