Leçon 15

Application de l'indépendance :
le lemme de Borel-Cantelli

1. Le lemme de Borel

2. Le lemme de Cantelli

3. Illustrations

Exercices

Cette courte leçon est consacrée à un argument très usité : le lemme de Borel-Cantelli. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.

Si A_n, $n \in \mathbb{N}$, est une famille de parties de Ω, l'ensemble

$$A = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} A_n$$

est parfois noté sous la forme $\limsup_{n \to \infty} A_n$ (et qualifié de limite supérieure ensembliste). Cette notation, qui peut prêter à confusion, ne sera pas utilisée. Elle est toutefois naturelle s'il est rappelé (Exercice 4, Leçon 1) que

$$\mathbb{1}_A = \limsup_{n \to \infty} \mathbb{1}_{A_n}.$$

En effet, $\omega \in A$ si et seulement si ω appartient à une infinité d'éléments de la suite A_n, $n \in \mathbb{N}$.

Le complémentaire de A est

$$A^c = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq m} A_n^c.$$

Un élement ω de Ω appartient à A^c si et seulement si ω appartient à tous les éléments de la suite A_n^c, $n \in \mathbb{N}$, à partir d'un certain rang. Il peut être noté $\liminf_{n \to \infty} A_n^c$

Le lemme de Borel-Cantelli est constitué de deux parties, l'une directe pour des événements quelconques, l'autre réciproque pour des événements indépendants. Elles sont souvent confondues dans les illustrations sous la seule dénomination de *lemme de Borel-Cantelli*.

1 Le lemme de Borel

Les objets et notations sont ceux du paragraphe introductif, avec donc $A = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} A_n$ pour une suite A_n, $n \in \mathbb{N}$, de $\mathcal{P}(\Omega)$. Si les A_n, $n \in \mathbb{N}$, sont éléments de $\mathcal{A}$, il en va de même de A d'après les axiomes d'une σ-algèbre. L'énoncé suivant a déjà été évoqué dans l'Exercice 3 de la Leçon 2.

Proposition 1 (Lemme de Borel[1])**.** *Soit A_n, $n \in \mathbb{N}$, une famille d'événements de $\mathcal{A}$; si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, alors $\mathbb{P}(A) = 0$.*

Démonstration. Puisque $A = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} A_n$ est une intersection décroissante, d'après les propriétés de convergence monotone d'une mesure (finie),

$$0 \leq \mathbb{P}(A) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geq m} A_n\Big).$$

Or $\mathbb{P}\big(\bigcup_{n\geq m} A_n\big) \leq \sum_{n\geq m} \mathbb{P}(A_n)$ par sous-additivité. Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ converge, son reste tend vers 0, ce qui fournit la conclusion. $\square$

Une autre petite démonstration consiste à observer que, par convergence monotone (Corollaire 4, Leçon 3),

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n}\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_n}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n).$$

Si donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n}$ est presque sûrement finie. Pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, il n'y a ainsi qu'un nombre fini de A_n pour lesquels $\omega \in A_n$, autrement dit $\omega \in A^c$. En conclusion, $\mathbb{P}(A^c) = 1$ ce qui équivaut au résultat.

2 Le lemme de Cantelli

Le lemme de Cantelli est donc une réciproque, pour des événements indépendants, du lemme de Borel. Les objets et notations sont ceux du paragraphe introductif, avec donc $A = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} A_n$ pour une suite A_n, $n \in \mathbb{N}$, de $\mathcal{P}(\Omega)$.

1. Émile Borel, mathématicien et homme politique français (1871–1956).

Proposition 2 (Lemme de Cantelli[2]). *Soit A_n, $n \in \mathbb{N}$, une famille d'événements (mutuellement) indépendants de $\mathcal{A}$; si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty$, alors $\mathbb{P}(A) = 1$.*

Avant de passer à la démonstration, il convient d'observer que cet énoncé est plus fort que la réciproque du lemme de Borel, à savoir si $P(A) = 0$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty$. En effet, en passant à la contraposée, cette dernière exprimerait simplement que sous la divergence de la série, $\mathbb{P}(A) > 0$. Il se cache en fait derrière cet énoncé une propriété, dite loi du 0-1, qui pour des événements indépendants entraîne automatiquement que $\mathbb{P}(A) = 1$ si $\mathbb{P}(A) > 0$. La forme contraposée de la Proposition 2 est justifiée par les applications dans lesquelles le point de départ consiste le plus souvent à évaluer les probabilités $\mathbb{P}(A_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Pour $1 \leq m \leq N$ des entiers fixés, par indépendance des événements A_n, $n \in \mathbb{N}$, et donc aussi des A_n^c, $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\bigg(\bigcup_{n=m}^{N} A_n\bigg) &= 1 - \mathbb{P}\bigg(\bigcap_{n=m}^{N} A_n^c\bigg) \\ &= 1 - \prod_{n=m}^{N} \big[1 - \mathbb{P}(A_n)\big].\end{aligned}$$

Pour tout réel $u \geq 0$, il est aisé de vérifier que $1 - u \leq e^{-u}$. Cette inégalité appliquée à $u = \mathbb{P}(A_n)$ pour tout n indique que

$$\prod_{n=m}^{N} \big[1 - \mathbb{P}(A_n)\big] \leq \exp\bigg(-\sum_{n=m}^{N} \mathbb{P}(A_n)\bigg),$$

et ainsi

$$1 \geq \mathbb{P}\bigg(\bigcup_{n=m}^{N} A_n\bigg) \geq 1 - \exp\bigg(-\sum_{n=m}^{N} \mathbb{P}(A_n)\bigg).$$

2. Francesco Paolo Cantelli, mathématicien italien (1875–1966).

Comme la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ diverge, pour tout entier m fixé, $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=m}^{N} \mathbb{P}(A_n) = \infty$. Donc, par l'inégalité précédente,

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\bigg(\bigcup_{n=m}^{N} A_n \bigg) = 1.$$

Mais, par croissance monotone, la limite à gauche n'est rien d'autre que $\mathbb{P}\big(\bigcup_{n\geq m} A_n\big)$. Ainsi donc, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big(\bigcup_{n\geq m} A_n\big) = 1$. Il a déjà été vu dans la démonstration du lemme de Borel que $\mathbb{P}(A) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\big(\bigcup_{n\geq m} A_n\big)$. Ainsi, clairement, $\mathbb{P}(A) = 1$. Le proposition est démontrée. $\square$

3 Illustrations

Les deux illustrations suivantes sont enrichissantes.

Soit X_n, $n \in \mathbb{N}$, une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, pour laquelle existe un réel C tel que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X_n \geq C) < \infty\,;$$

qu'est-il possible de conclure sur la suite X_n, $n \in \mathbb{N}$?

Bien entendu, l'hypothèse invite à employer le lemme de Borel-Cantelli (dans sa partie directe). Il indique que $\mathbb{P}(A) = 0$ où

$$A = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} \{X_n \geq C\}.$$

Par passage au complémentaire $\mathbb{P}(A^c) = 1$ où

$$A^c = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq m} \{X_n < C\}.$$

Comme déjà observé, $\omega \in A^c$ signifie que $X_n(\omega) < C$ pour tout n sauf un nombre fini (dépendant de ω). Ainsi en particulier $\limsup_{n\to\infty} X_n(\omega) \leq C$, qui a donc lieu pour presque tout ω puisque $\mathbb{P}(A^c) = 1$.

En conclusion, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X_n \geq C) < \infty$, alors

$$\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} X_n \leq C\big) \, = \, 1.$$

En particulier $\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n < \infty$ presque sûrement.

De la même façon, sur la base du lemme de Cantelli, si les X_n, $n \in \mathbb{N}$, sont de plus indépendantes et si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X_n \geq C) = \infty$, alors (les événements $\{X_n \geq C\}$, $n \in \mathbb{N}$, étant indépendants),

$$\mathbb{P}\bigg(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq m} \{X_n \geq C\}\bigg) \, = \, 1.$$

Donc, pour presque tout $\omega \in \Omega$, $X_n(\omega) \geq C$ pour une infinité d'entiers n. Donc

$$\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} X_n \geq C\big) \, = \, 1.$$

Ce type d'argument sera très profitable lors de l'étude de la convergence presque sûre de suites de variables aléatoires.

Le seconde application est plus anecdotique. Une pièce de monnaie équilibrée est lancée une infinité de fois ; quelle est la probabilité de faire une infinité de fois un million de pile consécutifs ?

Il suffit de modéliser les lancers par une suite X_n, $n \in \mathbb{N}$, de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$ sur $\{0,1\}$ (1 pour pile et 0 pour face par exemple). Les événements considérés sont alors de la forme

$$A_n \, = \, \{X_n = X_{n+1} = \cdots = X_{n+999\,999} = 1\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Par indépendance des variables X_n, $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{2^{10^6}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ est divergente. Mais les événements A_n ne sont pas indépendants, par exemple A_n et A_{n+1} mettent en jeu tous deux les variables $X_{n+1}, \ldots, X_{n+999\,999}$. En revanche, la sous-suite $B_n = A_{10^6 n}$, $n \in \mathbb{N}$, est composée d'événements indépendants (pour la même raison que précédemment), et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B_n)$ diverge de la même façon. Donc, la partie réciproque du lemme de Borel-Cantelli appliquée à cette suite indique que, avec la notation correspondante, $\mathbb{P}(B) = 1$. Comme (sous-suite) $B \subset A$, il vaut également que $\mathbb{P}(A) = 1$. Ainsi, presque sûrement, les lancers feront apparaître une infinité de fois 10^6 pile consécutifs.

Exercices

(*Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.*)

Exercice 1. Soit a_n, $n \in \mathbb{N}$, une suite de nombres réels définissant le terme général d'une série convergente, et soit X_n, $n \in \mathbb{N}$, une suite de variables aléatoires réelles. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X_n \neq a_n) < \infty$. Démontrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est presque sûrement convergente.

Exercice 2*. Si x_n, $n \in \mathbb{N}$, est une suite de nombres entiers, un entier j est valeur d'adhérence de la suite x_n, $n \in \mathbb{N}$, si et seulement si il existe une sous-suite strictement croissante d'entiers n_k, $k \in \mathbb{N}$, telle que $x_{n_k} = j$ pour tout k.

a) Soit à présent X_n, $n \in \mathbb{N}$, une suite de variables aléatoires indépendantes, telle que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, X_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{n^{1+\rho}})$ où $\rho > 0$. Pour $j \in \mathbb{N}$, démontrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X_n = j)$ diverge si et seulement si $\rho j \leq 1$.

b) Si $\rho = \frac{1}{3}$, conclure que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite X_n, $n \in \mathbb{N}$, est presque sûrement égal à $\{1, 2, 3\}$.

Exercice 3. Soit X_n, $n \in \mathbb{N}$, une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ de paramètre 1 sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a*) Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X_n > (1+\varepsilon)\ln(n)) < \infty$. En déduire que, presque sûrement,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln(n)} \leq 1.$$

b) Suivant le même schéma, démontrer que, presque sûrement,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln(n)} \geq 1.$$

c*) Soit X_n, $n \in \mathbb{N}$, une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$; déterminer la limite presque sûre

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\sqrt{2\ln(n)}} \,.$$

Exercice 4*. Soit X_n, $n \in \mathbb{N}$, une suite croissante de variables aléatoires positives sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = \infty$ et

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Var}(X_n)}{[\mathbb{E}(X_n)]^2} \;=\; 0.$$

a) Pour tout $\eta > 0$, extraire une sous-suite X_{n_k}, $k \in \mathbb{N}$, telle que, pour tout $s \in]0,1[$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\big(X_{n_k} \geq s\,\mathbb{E}(X_{n_k})\big) \;\geq\; \frac{(1-s)^2}{1+\eta} \,.$$

(*Indication* : faire usage de l'inégalité de Paley-Zygmund, Exercice 4, Leçon 11.)

b) Déduire de la question précédente que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t > 0$, il existe une sous-suite d'entiers n_k, $k \in \mathbb{N}$, et un entier k_0 tel que, pour tout $k \geq k_0$, $\mathbb{P}(X_{n_k} \geq t) \geq 1 - \varepsilon$.

c) Démontrer que la suite X_n, $n \in \mathbb{N}$, tend presque sûrement vers $+\infty$.

d) Déduire de la question précédente que toute suite A_n, $n \in \mathbb{N}$, d'événements de $\mathcal{A}$ vérifiant les deux conditions $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ et

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{k,\ell=1}^{n} \mathbb{P}(A_k \cap A_\ell)}{\big(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\big)^2} \;=\; 1$$

est telle que $\mathbb{P}\big(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} A_n\big) = 1$.

e) Conclure à une autre démonstration du lemme de Borel-Cantelli dans sa partie indépendante.