Leçon 17

Convergence presque sûre
de suites de variables aléatoires

La convergence presque sûre n'est rien d'autre que la convergence presque partout de la théorie de la mesure. Elle est présentée ici dans le cadre probabiliste. Le lemme de Borel-Cantelli (Leçon 15) s'avère un outil précieux pour démontrer, et même caractériser dans certains cas, la convergence presque sûre de suites de variables aléatoires.

Dans cette leçon, X_n, $n \in \mathbb{N}$, désigne une suite de variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et convergeant potentiellement vers une variable limite X (définie sur le même espace). En fait, la présentation est la même pour des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (en particulier des variables complexes), en remplaçant les valeurs absolues par une norme quelconque sur $\mathbb{R}^d$. Le cas de variables à valeurs dans un espace métrique (E, d) se développe de la même façon.

1 Convergence presque sûre

Définition 1 (Convergence presque sûre)**.** *Une suite X_n, $n \in \mathbb{N}$, de variables aléatoires réelles converge presque sûrement vers une variable aléatoire réelle X s'il existe $\Omega_0 \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ et, pour tout $\omega \in \Omega_0$,*

$$\lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X(\omega).$$

Dans la terminologie de la théorie de la mesure, il est équivalent d'exprimer que l'ensemble où X_n ne converge pas vers X est de mesure nulle. La convergence presque sûre d'une suite de variables aléatoires (fonctions mesurables) est donc simplement la convergence ponctuelle usuelle en dehors d'un ensemble négligeable. La convergence presque sûre se prête donc aisément aux opérations traditionnelles sur les limites (somme, produit, etc.), par réunion d'ensembles de mesure nulle.

La suite de ce paragraphe va s'attacher à décrire explicitement l'événement Ω_0 de la définition afin que ce dernier se prête à l'utilisation du lemme de

Borel-Cantelli (Leçon 15).

Dire que $X_n(\omega)$, $n \in \mathbb{N}$, converge vers $X(\omega)$ signifie

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, m \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ \forall\, n \geq m, \quad \big|X_n(\omega) - X(\omega)\big| \, < \, \varepsilon,$$

autrement dit

$$\omega \, \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq m} \big\{ |X_n - X| < \varepsilon \big\}.$$

Pour les besoins de la théorie de la mesure qui exige des opérations dénombrables, l'intersection sur les $\varepsilon > 0$ (ou seulement $0 < \varepsilon \leq 1$) peut être remplacée par une intersection sur tous les entiers $\ell \geq 1$ avec $\varepsilon = \frac{1}{\ell}$ (ou tout autre suite de réels strictement positifs convergeant vers 0), puisque pour tout $0 < \varepsilon \leq 1$ il existe $\ell \geq 1$ tel que $\frac{1}{\ell+1} < \varepsilon \leq \frac{1}{\ell}$.

Ainsi, la suite X_n, $n \in \mathbb{N}$, converge presque sûrement vers X si, et seulement si,

$$\mathbb{P}\bigg(\bigcap_{\ell \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq m} \big\{ |X_n - X| < \tfrac{1}{\ell} \big\} \bigg) \, = \, 1$$

(c'est l'événement Ω_0 de la définition). Par passage au complémentaire,

$$\mathbb{P}\bigg(\bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} \big\{ |X_n - X| \geq \tfrac{1}{\ell} \big\} \bigg) \, = \, 0.$$

Pour une suite B_ℓ, $\ell \in \mathbb{N}$, d'événements de $\mathcal{A}$, il est équivalent (par sous-additivité) que $\mathbb{P}\big(\bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} B_\ell\big) = 0$ ou que $\mathbb{P}(B_\ell) = 0$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$. Ainsi, la suite X_n, $n \in \mathbb{N}$, converge presque sûrement vers X si, et seulement si, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\bigg(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} \big\{ |X_n - X| \geq \tfrac{1}{\ell} \big\} \bigg) \, = \, 0.$$

De façon traditionnelle, il est équivalent à ce stade de revenir à $\varepsilon > 0$ en lieu et place de $\frac{1}{\ell}$ par exactement le raisonnement inverse de précédemment.

En conclusion, la suite X_n, $n \in \mathbb{N}$, converge presque sûrement vers X si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$ (ou seulement $0 < \varepsilon \leq 1$),

$$\mathbb{P}\bigg(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} \big\{ |X_n - X| \geq \varepsilon \big\} \bigg) \, = \, 0.$$

L'événement en question ici est exactement celui qui intervient dans le lemme de Borel-Cantelli (Leçon 15) pour $A_n = \{|X_n - X| \geq \varepsilon\}$, $n \in \mathbb{N}$ (voir les paragraphes suivants).

Pour des comparaisons ultérieures, il est bénéfique de transcrire la caractérisation précédente sous la forme

$$\lim_{m \to \infty} \mathbb{P}\big(\sup_{n \geq m} |X_n - X| \geq \varepsilon \big) \, = \, 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$. En effet,

$$\Big\{ \sup_{n \geq m} |X_n - X| \, \geq \, \varepsilon \Big\} \supset \bigcup_{n \geq m} \big\{ |X_n - X| \, \geq \, \varepsilon \big\}, \quad m \in \mathbb{N},$$

et

$$\Big\{ \sup_{n \geq m} |X_n - X| \, \geq \, \varepsilon \Big\} \subset \bigcup_{n \geq m} \big\{ |X_n - X| \, \geq \, \varepsilon' \big\}, \quad m \in \mathbb{N},$$

pour tout $\varepsilon' < \varepsilon$. Comme par limite décroissante

$$\lim_{m \to \infty} \mathbb{P}\bigg(\bigcup_{n \geq m} \big\{ |X_n - X| \geq \varepsilon \big\} \bigg) \, = \, \mathbb{P}\bigg(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} \big\{ |X_n - X| \geq \varepsilon \big\} \bigg) \, = \, 0,$$

l'affirmation s'ensuit.

Comme indiqué plus haut, cette caractérisation (et les développements suivants) est identique pour des vecteurs aléatoires, ou même des variables aléatoires à valeurs dans un espace métrique (E, d) en remplaçant $|X_n - X|$ par $d(X_n, X)$.

2 Critère de Borel-Cantelli

La caractérisation précédente de la convergence presque sûre est précieuse, car elle est directement en relation avec le lemme de Borel-Cantelli, ici la partie directe – lemme de Borel (Leçon 15), qui fournit un critère efficace de convergence presque sûre. La proposition suivante en découle immédiatement.

Proposition 2 (Premier critère de Borel-Cantelli)**.** *Pour qu'une suite X_n, $n \in \mathbb{N}$, converge presque sûrement vers X, il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\big(|X_n - X| \geq \varepsilon\big) < \infty.$$

Comme dans le paragraphe précédent, pour des raisons de décroissance, il suffit que le critère soit satisfait pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ pour un $\varepsilon_0 > 0$, par exemple $\varepsilon_0 = 1$.

L'exemple suivant est illustratif, et sera repris plus loin. Si les variables X_n, $n \in \mathbb{N}$, sont de Bernoulli avec $\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p_n$, $n \in \mathbb{N}$, pour tout $0 < \varepsilon \leq 1$,

$$\mathbb{P}\big(|X_n| \geq \varepsilon\big) = \mathbb{P}(X_n = 1) = p_n.$$

Ainsi, si $\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n < \infty$, la suite X_n, $n \in \mathbb{N}$, converge presque sûrement vers la variable aléatoire $X = 0$.

3 Suite de variables aléatoires indépendantes

Le lemme de Borel-Cantelli dans sa partie réciproque – lemme de Cantelli (Leçon 15), fournit une équivalence au critère du paragraphe précédent en présence d'indépendance. Comme pour le premier critère, la proposition suivante en découle immédiatement.

Proposition 3 (Deuxième critère de Borel-Cantelli). *Pour qu'une suite X_n, $n \in \mathbb{N}$, de variables aléatoires indépendantes converge presque sûrement vers la variable aléatoire $X = 0$, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\big(|X_n| \geq \varepsilon\big) < \infty.$$

La limite dans cet énoncé doit être nulle, ou presque sûrement constante, afin d'assurer l'indépendance des événements $\{|X_n| \geq \varepsilon\}$, $n \in \mathbb{N}$.

La démonstration de la nécessité résulte donc de la description de la convergence presque sûre développée dans le Paragraphe 1 et de la réciproque du lemme de Borel-Cantelli exprimant que si X_n, $n \in \mathbb{N}$, converge presque sûrement vers 0, à savoir, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\bigg(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} \{|X_n| \geq \varepsilon\}\bigg) = 0$$

(ou seulement < 1), alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon)$ converge.

L'exemple précédent des variables X_n de Bernoulli de paramètre p_n, $n \in \mathbb{N}$, montre que si celles-ci sont indépendantes, alors la convergence presque sûre vers 0 de la suite X_n, $n \in \mathbb{N}$, a lieu si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n < \infty$.

4 Convergence presque sûre et convergence dans L^p

Comme présenté dans la Leçon 5, pour $p > 0$,

$$\mathrm{L}^p = \mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = \mathrm{L}^p\big((\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}); \mathbb{R}\big)$$

est l'espace des variables aléatoires réelles X telles que $\mathbb{E}(|X|^p) < \infty$. La même définition vaut pour des variables complexes ou à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ en remplaçant

$|\cdot|$ par le module ou la norme euclidienne (ou n'importe quelle autre norme) sur $\mathbb{R}^d$. Rappeler que pour des mesures de probabilités, d'après l'inégalité de Jensen par exemple, $\mathrm{L}^{p'} \subset \mathrm{L}^p$ si $p' \geq p$.

À ces espaces est associée naturellement une notion de convergence.

Définition 4 (Convergence dans L^p)**.** *Si X_n, $n \in \mathbb{N}$, et X sont des variables aléatoires réelles dans L^p, $p > 0$, la suite X_n, $n \in \mathbb{N}$, converge vers X dans L^p si*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big(|X_n - X|^p\big) \,=\, 0.$$

Il est profitable d'observer que si cette limite a lieu, en vertu de l'inégalité triangulaire, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n|^p) = \mathbb{E}(|X|^p)$ (mais la réciproque est fausse en général).

Le théorème de convergence dominée fournit une condition pour qu'une suite X_n, $n \in \mathbb{N}$, convergeant presque sûrement vers X converge également vers celle-ci dans L^p (pour un $p > 0$). Il suffit que $X \in \mathrm{L}^p$ et qu'il existe une variable aléatoire positive Y dans L^p telle que $|X_n| \leq Y$ presque sûrement pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si tel est le cas en effet, presque sûrement pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|X_n - X|^p \,\leq\, \big(|X_n| + |X|\big)^p \,\leq\, 2^{\max(p-1,0)}\big(Y^p + |X|^p\big),$$

où l'inégalité réelle élémentaire

$$(a+b)^p \,\leq\, 2^{\max(p-1,0)}(a^p + b^p), \quad a, b \geq 0,$$

a été utilisée (diviser les deux membres de l'inégalité par $a > 0$, et faire une étude de fonction de la variable $u = \frac{b}{a} \geq 0$). Comme $|X_n - X|^p \to 0$ presque sûrement, et que $Y^p + |X|^p$ est intégrable, le théorème de convergence dominée exprime bien que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big(|X_n - X|^p\big) \,=\, 0.$$

Il pourrait être supposé aussi que $|X_n - X| \leq Y$, $n \in \mathbb{N}$, pour une variable aléatoire Y dans L^p.

Sans hypothèse de domination, la convergence presque sûre ne peut entraîner seule la convergence dans L^p. Voici un exemple simple. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ de paramètre 1 ; pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, poser

$$X_n \,=\, X\,\mathbb{1}_{[0,n]}(X) + e^{2n}\,\mathbb{1}_{]n,\infty[}(X).$$

Si $X \le n$, alors $X_n = X$, de sorte que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout n,

$$\mathbb{P}\big(|X_n - X| \ge \varepsilon\big) \,\le\, \mathbb{P}(X > n) \,=\, e^{-n}$$

puisque X est de loi $\mathcal{E}(1)$. Donc la suite X_n, $n \in \mathbb{N}$, converge presque sûrement vers X (premier critère de Borel-Cantelli). Maintenant,

$$\mathbb{E}(X_n) \,\ge\, e^{2n}\,\mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{]n,\infty[}(X)\big) \,=\, e^{2n}\,\mathbb{P}(X > n) \,=\, e^{n}.$$

Il s'ensuit que $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(X_n) = \infty$ alors que $\mathbb{E}(X) = 1$. Il n'est donc pas possible que X_n converge vers X dans L^1. De la même façon, elle ne peut converger dans L^p pour aucun $p > 0$.

Réciproquement enfin, la convergence dans L^p n'implique pas la convergence presque sûre. Il suffit à cet effet de reprendre l'exemple de la suite de variables aléatoires indépendantes X_n, $n \in \mathbb{N}$, de lois de Bernoulli $\mathcal{B}(p_n)$ sur $\{0,1\}$. Il y a convergence presque sûre de X_n vers 0 si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n < \infty$. Mais $\mathbb{E}(|X_n|^p) = \mathbb{E}(X_n) = p_n$, $n \in \mathbb{N}$, et il y a donc convergence de X_n vers 0 dans L^p dès que seulement $p_n \to 0$.

Exercices

(*Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.*)

Exercice 1. Soit Y_n, $n \in \mathbb{N}$, une suite de variables aléatoires de lois de Bernoulli $\mathcal{B}(p_n)$ sur $\{0,1\}$ de paramètres respectifs de succès $p_n = \frac{1}{n}$.

a) Si Z est une variable aléatoire intégrable, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\big(|nY_n - Z|\big) \geq \mathbb{E}\big(|Z|\big) - \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\{Y_n=1\}}\,|Z|\big).$$

En déduire que si la suite nY_n, $n \in \mathbb{N}$ converge vers Z dans L^1, nécessairement $Z = 0$ presque sûrement. Y-a-t-il convergence ?

b) Dans cette question, les Y_n, $n \in \mathbb{N}$, sont supposées mutuellement indépendantes. Que dire des limites presque sûre et dans L^1 de la suite Y_n, $n \in \mathbb{N}$?

c) Mêmes questions si $p_n = \frac{1}{n^2}$.

Exercice 2. Soit X_k, $k \in \mathbb{N}$, une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, X_k suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha_k)$ de paramètre $\alpha_k > 0$; poser $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $n \geq 1$.

a) Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ pour $n \geq 1$. En déduire que si $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\alpha_k} < \infty$, alors la série $\sum_{k=1}^\infty X_k$ est presque sûrement convergente.

b*) Il est supposé de plus dans cette question que les variables X_k, $k \geq 1$, sont indépendantes. Calculer $\mathbb{E}(e^{-S_n})$ pour $n \geq 1$. Démontrer que si $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\alpha_k} = \infty$, alors la série $\sum_{k=1}^\infty X_k$ est presque sûrement divergente.

Exercice 3. Soit X_k, $k \in \mathbb{N}$, une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ de paramètre 1, et $M_n = \max_{1 \leq k \leq n} X_k$, $n \geq 1$.

a) Démontrer que pour tout $0 < \varepsilon < 1$,

$$\mathbb{P}\big(M_n \leq (1-\varepsilon)\ln(n)\big) = \left(1 - \frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right)^n = \exp\left[n \ln\left(1 - \frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right)\right].$$

En déduire, par le lemme de Borel-Cantelli, que presque sûrement

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{M_n}{\ln(n)} \;\geq\; 1-\varepsilon.$$

b) Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\big(M_n \geq (1+\varepsilon)\ln(n)\big) \;=\; 1 - \exp\left[n \ln\left(1 - \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)\right].$$

Soit n_k, $k \in \mathbb{N}$, la sous-suite d'entiers définie par $n_k = \lfloor k^\rho \rfloor$, $k \in \mathbb{N}$, $\rho > 0$, où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière. Par le lemme de Borel-Cantelli, déduire de ce qui précède que si $\varepsilon\rho > 1$, alors presque sûrement

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{M_{n_k}}{\ln(n_k)} \;\leq\; 1+\varepsilon.$$

c) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\max_{n_k \leq n < n_{k+1}} \frac{M_n}{\ln(n)} \;\leq\; \frac{\ln(n_{k+1})}{\ln(n_k)} \, \frac{M_{n_{k+1}}}{\ln(n_{k+1})}\,.$$

d) Déduire des questions précédentes que $\frac{M_n}{\ln(n)} \to 1$ presque sûrement. (Cette limite est à comparer à la conclusion de l'Exercice 3, Leçon 15.)

e) Poser $Z_n = n e^{-M_n}$, $n \geq 1$. Démontrer que la suite des fonctions de répartition de Z_n converge vers une fonction de répartition F. Est-elle la fonction de répartition d'une loi classique ? Si oui, laquelle ?

Exercice 4* (*Récurrence et transience*). Soient X_k, $k \in \mathbb{N}$, des variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans $\mathbb{Z}$; pour tout $n \geq 1$, soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. La suite S_n, $n \geq 1$, est dite *récurrente* si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) \;=\; \infty,$$

et *transiente* sinon. Démontrer que si la suite S_n, $n \geq 1$, est transiente, l'ensemble d'entiers $\{n \geq 1\,; S_n = 0\}$ est fini presque sûrement (autrement dit, la suite S_n, $n \geq 1$, ne « visite » plus 0 à partir d'un certain rang).

Il est supposé à présent que $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$ et $\mathbb{E}(X_1) = 0$. Le projet de l'exercice est de démontrer qu'alors la suite S_n, $n \geq 1$, est récurrente.

a) Prouver que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}\big(|S_n| > \varepsilon n\big) \;\leq\; \frac{1}{\varepsilon^2 n}\,\mathbb{E}(X_1^2).$$

b) Démontrer que pour tout $k \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}(S_k = x) \;=\; \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}\big(\{S_k = x\} \cap B_j\big)$$

où $B_1 = \{S_1 = x\}$ et

$$B_j \;=\; \{S_i \neq x, i = 1, \ldots, j-1, S_j = x\}, \quad j = 2, \ldots, k.$$

Démontrer également que pour tous $1 \leq j \leq k$ et tout $x \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}\big(\{S_k = x\} \cap B_j\big) \;=\; \mathbb{P}(S_k - S_j = 0)\,\mathbb{P}(B_j) \;=\; \mathbb{P}(S_{k-j} = 0)\,\mathbb{P}(B_j).$$

c) Déduire de la question précédente que, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_k = x) \;\leq\; \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(S_k = 0).$$

d) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $N > 0$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(S_k = 0) \;\geq\; \frac{1}{2N+1} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(|S_k| \leq N\big).$$

En conclure que pour tout $n \geq 1$ et tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(S_k = 0) \geq \frac{1}{2\varepsilon n + 1} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(|S_k| \leq \varepsilon k\big).$$

e) Déduire des questions a) et d) que la suite S_n, $n \geq 1$, est récurrente.