Leçon 3

Rappels de la théorie de l'intégration : intégrale

1. Intégrale de fonction positive et théorème de convergence monotone

2. Intégrale de fonction de signe quelconque et théorème de convergence dominée

3. Propriétés de l'intégrale

4. Intégrale de fonction à valeurs complexes

5. Intégration par rapport à une mesure image

6. Intégration par rapport à une mesure discrète

7. Comparaison avec l'intégrale de Riemann

8. Théorèmes de continuité et de dérivabilité (de Lebesgue)

9. Complément : Théorème de Radon-Nikodym

Exercices

Une mesure μ sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ permet de développer une théorie de l'intégrale par rapport à μ. Étant donné une fonction mesurable à valeurs réelles $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, l'objectif est de donner un sens à

$$\int_X f \, d\mu$$

comme somme des valeurs de f pondérées par la mesure μ. Comme dans les leçons précédentes, les démonstrations ne sont pas développées.

1 Intégrale de fonction positive et théorème de convergence monotone

Soit donc un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$; la construction de l'intégrale d'une fonction mesurable f se fait par étape, en considérant pour commencer des fonctions simples.

Pour toute la souplesse nécessaire, il pourra être convenu que $0 \times \mu(A) = 0$ même si $\mu(A) = \infty$.

1ère étape. Soit $f = \mathbb{1}_A$ la fonction indicatrice d'une partie A de $\mathcal{A}$; le point de départ de toute la théorie de l'intégration repose sur l'identité fondamentale

$$\int_X \mathbb{1}_A \, d\mu \; = \; \mu(A),$$

brique élémentaire de la théorie qui correspond pleinement à l'intuition, la fonction $\mathbb{1}_A$ étant égale à 1 sur A, qui est donc mesuré par μ, et 0 ailleurs. Il apparaît d'ores et déjà que $\int_X \mathbb{1}_A \, d\mu$ peut être à valeurs dans $[0, \infty]$ (si $\mu(A) = \infty$).

2ème étape. La première étape s'étend immédiatement aux fonctions étagées positives en respectant une intuition naturelle : si $f = \sum_{k=1}^n c_k \mathbb{1}_{A_k}$, $A_k \in \mathcal{A}$

disjoints, $c_k \in \mathbb{R}_+$ distincts différents de 0, $k = 1, \dots, n$,

$$\int_X f \, d\mu \;=\; \sum_{k=1}^n c_k \mu(A_k).$$

Dès cette étape, la propriété de linéarité se dégage : si f, g sont étagées sur le modèle précédent, et $\alpha, \beta \geq 0$, alors

$$\int_X (\alpha f + \beta g) \, d\mu \;=\; \alpha \int_X f \, d\mu + \beta \int_X g \, d\mu.$$

La démonstration s'appuie sur le fait que pour f étagée, $\int_X f \, d\mu$ ne dépend pas du choix de la partition définissant f ; choisir alors la même partition pour f et g et l'affirmation s'ensuit.

De la même façon, la conservation de l'ordre est satisfaite : si f, g sont étagées positives et $g \leq f$, alors

$$\int_X g \, d\mu \;\leq\; \int_X f \, d\mu.$$

3ème étape. Cette étape fait écho au fait que si $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable positive, elle est limite croissante de fonctions étagées positives (Proposition 8, Leçon 1) ; il est naturel ainsi de poser, pour une telle fonction mesurable positive f,

$$\int_X f \, d\mu \;=\; \sup \int_X g \, d\mu$$

le supremum parcourant l'ensemble des fonctions étagées positives g telles que $g \leq f$. Il est important à nouveau de noter que l'intégrale ainsi définie peut éventuellement être infinie.

Une construction alternative pourrait définir $\int_X f d\mu$ comme la limite croissante de la suite $\int_X f_n d\mu$, $n \in \mathbb{N}$, si les f_n, $n \in \mathbb{N}$, sont étagées et convergent en croissant vers f ; mais il convient alors de vérifier que l'intégrale de f ne dépend pas du choix de la suite de fonctions étagées. Cette vérification découle du *théorème de convergence monotone.*

Théorème 1 (Théorème de convergence monotone)**.** *Soit f_n, $n \in \mathbb{N}$, une suite de fonctions mesurables positives sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ convergeant en croissant vers une fonction (mesurable) f ; alors*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

(et la limite est celle d'une suite croissante).

Il s'ensuit aisément de cet énoncé que l'intégrale des fonctions mesurables positives est linéaire et conserve le sens des inégalités comme pour les fonctions étagées.

Le théorème de convergence monotone est essentiellement équivalent au lemme de Fatou[1].

Lemme 2 (Lemme de Fatou)**.** *Soit f_n, $n \in \mathbb{N}$, une suite de fonctions mesurables positives sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$; alors*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Il n'y a pas d'analogue en général de cet énoncé pour des limites supérieures, par la même restriction sur la mesure d'une suite décroissante de parties (Proposition 2, Leçon 2) ; en effet, si $f_n = \mathbb{1}_{A_n}$, $n \in \mathbb{N}$, alors $\limsup_{n\to\infty} f_n = \mathbb{1}_A$ où $A = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\ge m} A_n$ (Exercice 4, Leçon 1), et il n'est pas toujours vrai que $\limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \le \mu(A)$ (sauf si $\mu(A_{n_0}) < \infty$ pour un n_0).

Pour terminer, et même si l'assertion est essentiellement évidente, il vaut la peine de souligner que si f est mesurable positive et nulle μ-presque partout, alors $\int_X f d\mu = 0$ (puisque c'est le cas pour les fonctions étagées).

1. Pierre Fatou, mathématicien et astronome français (1878–1929).

2 Intégrale de fonction de signe quelconque et théorème de convergence dominée

La quatrième étape de la construction de l'intégrale concerne les fonctions de signe quelconque. Si a est un réel, $a_+ = \max(a, 0)$ et $a_- = -\min(a, 0)$ de sorte que $a_+, a_- \geq 0$, $a = a_+ - a_-$ et $|a| = a_+ + a_-$.

4ème étape. Une fonction mesurable $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est dite *intégrable* si $\int_X |f| d\mu < \infty$. Si c'est le cas, son intégrale est définie par

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f_+\, d\mu - \int_X f_-\, d\mu$$

où $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = -\min(f, 0)$ sont les parties positive et négative de f. Comme $|f| = f_+ + f_-$, f_+ et f_- sont toutes deux intégrables, de sorte que la différence précédente fait nécessairement sens. Il est clair avec cette définition que

$$\left| \int_X f\, d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$$

qui s'interprète comme « l'inégalité triangulaire pour l'intégrale ».

Le mot « intégrable » sera donc réservé aux fonctions f, même positives, telles que $\int_X |f| d\mu < \infty$, même si quand f est positive, l'intégrale $\int_X f d\mu$ garde un sens, éventuellement infini. Il résulte de ce commentaire que plusieurs résultats sont énoncés ci-dessous pour des fonctions « positives ou intégrables » (référant ainsi aux étapes 3 et 4 de la construction de l'intégrale).

L'intégrale $\int_X f d\mu$ peut aussi être définie pour une fonction à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, $f : (X, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$. Si f est à valeurs dans $[0, \infty]$, l'intégrale a toujours un sens, fini ou infini. Si f à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ est intégrale, i.e. $\int_X |f| d\mu < \infty$, alors en fait f est μ-presque partout à valeurs dans $\mathbb{R}$ (car si $\mu(|f| = \infty) > 0$, nécessairement $\int_X |f| d\mu = \infty$). Il sera en fait utile de retenir pour la suite qu'une fonction intégrable est finie presque partout (pour la mesure sous-jacente).

Si $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est positive ou intégrable, et si $A \in \mathcal{A}$, poser

$$\int_A f \, d\mu = \int_X (\mathbb{1}_A f) d\mu.$$

Une autre façon de voir cette notation est de considérer la restriction de f et de μ à l'espace mesurable $(A, \mathcal{A} \cap A)$.

Le théorème de convergence dominée est le pendant du théorème de convergence monotone pour des intégrales de fonctions de signe quelconque. Il nécessite néanmoins une hypothèse d'intégrabilité uniforme sur la suite de fonctions considérées.

Théorème 3 (Théorème de convergence dominée)**.** *Soit f_n, $n \in \mathbb{N}$, une suite de fonctions mesurables sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ convergeant vers une fonction mesurable f et telle qu'il existe une fonction positive intégrable h telle que $|f_n| \leq h$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; alors*

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

Ainsi que précisé dans le paragraphe suivant, il suffit de supposer que la suite f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge μ-presque partout vers f, et que la condition de domination $|f_n| \leq h$ ait lieu μ-presque partout pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'exemple traditionnel de la suite de fonctions $f_n = n \mathbb{1}_{]0, \frac{1}{n}]}$, $n \in \mathbb{N}$, sur $]0, 1]$, muni de la mesure de Lebesgue λ, montre que celle-ci converge λ-presque partout vers $f = 0$ alors que $\int_{]0,1]} f_n d\lambda = 1$ pour tout n, mettant clairement en évidence la nécessité de l'hypothèse de domination dans le théorème de convergence dominée (la fonction mesurable $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ n'étant pas intégrable car plus grande que $\frac{1}{2x}$, $x \in]0, 1]$).

Le corollaire suivant et immédiat (des théorèmes de convergence monotone et dominée), trouve de nombreuses applications.

Corollaire 4 (Théorèmes de convergence monotone et dominée pour les séries)**.** *Sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$, soient f_n, $n \in \mathbb{N}$, des fonctions mesurables ; si les fonctions f_n,*

$n \in \mathbb{N}$, sont positives,

$$\int_X \Big(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \Big) d\mu \, = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n \, d\mu.$$

Si les fonctions f_n, $n \in \mathbb{N}$, sont de signe quelconque, et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_X |f_n| d\mu < \infty$, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge μ-presque partout, et l'égalité précédente est satisfaite.

3 Propriétés de l'intégrale

Ce paragraphe rassemble les propriétés principales de l'intégrale. D'autres seront développées ou précisées à l'occasion.

Avant de les présenter, il convient de souligner la relation de Chasles [2] d'usage constant. Si $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est positive ou intégrable, et si A et B sont disjoints dans $\mathcal{A}$,

$$\int_{A \cup B} f \, d\mu \, = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu.$$

Ce que cache cette identité est que, si f est positive, l'application

$$A \in \mathcal{A} \, \to \, \int_A f \, d\mu$$

est à nouveau une mesure sur $(X, \mathcal{A})$ (Exercice 1).C'est en fait un moyen très important de créer de nouvelles mesures. (Il est aussi alors facile d'imaginer que si f prend des valeurs positives et négatives et est intégrable, cette opération va créer une *mesure signée*.) Cette nouvelle mesure a en particulier la propriété que si $\mu(A) = 0$, alors $\int_A f \, d\mu = 0$ (puisque $\mathbb{1}_A f = 0$ μ-presque partout). La

2. Michel Chasles, mathématicien français (1793-1880).

propriété reste vraie si f est intégrable (en décomposant en parties positive et négative).

Pour énoncer quelques unes des propriétés de l'intégrale ainsi construite, il est commode d'inclure la possibilité d'ensembles négligeables, et donc de faire usage de propriétés presque partout. En effet, si $f, g : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sont deux fonctions mesurables positives ou intégrables telles que $f = g$ μ-presque partout, alors $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$. Pour la démonstration, si $A = \{f \neq g\} \in \mathcal{A}$, par hypothèse $\mu(A) = 0$, et par la relation de Chasles,

$$\int_X f\, d\mu \;=\; \int_{A^c} f\, d\mu \;=\; \int_{A^c} g\, d\mu \;=\; \int_X g\, d\mu$$

car $f = g$ sur A^c. Cette observation a pour conséquence de pouvoir formuler diverses propriétés avec la souplesse μ-presque partout.

Proposition 5 (Quelques propriétés de l'intégrale)**.** *Soient deux fonctions intégrables $f, g : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$;*

a) [Linéarité] Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ est intégrable et

$$\int_X [\alpha f + \beta g] d\mu \;=\; \alpha \int_X f\, d\mu + \beta \int_X g\, d\mu.$$

b) [Positivité et conservation de l'ordre] Si $g \leq f$ μ-presque partout, $\int_X g d\mu \leq \int_X f d\mu$. En particulier $\int_X f d\mu \geq 0$ si $f \geq 0$ μ-presque partout et $\big| \int_X f d\mu \big| \leq \int_X |f| d\mu$.

c) Si $\mu(A) = 0$, $A \in \mathcal{A}$, alors $\int_A f d\mu = 0$.

d) Si $\int_X |f| d\mu = 0$, alors $f = 0$ μ-presque partout.

Les points a), b), c) ont été discutés auparavant. Il est instructif de donner une démonstration rapide du point d). Par convergence monotone croissante

$$\mu\big(|f| > 0\big) \;=\; \lim_{n \to \infty} \mu\big(|f| \geq \tfrac{1}{n}\big).$$

Ainsi, si $\mu(|f| > 0) > 0$, il existe $n \geq 1$ tel que $\mu(f \geq \frac{1}{n}) > 0$. Alors, par conservation de l'ordre,

$$0 = \int_X |f| d\mu \geq \int_{\{|f| \geq \frac{1}{n}\}} f \, d\mu \geq \frac{1}{n} \mu\big(|f| \geq \tfrac{1}{n}\big)$$

ce qui est contradictoire. Donc $\mu(|f| > 0) = 0$ ce qui exprime que $f = 0$ μ-presque partout.

Cette courte démonstration est aussi l'occasion de signifier la notation simplifiée

$$\mu\big(|f| \geq t\big) = \mu\big(\{|f| \geq t\}\big).$$

4 Intégrale de fonction à valeurs complexes

Une fonction mesurable à valeurs complexes

$$f : (X, \mathcal{A}) \to \big(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C})\big)$$

est tout simplement un couple (f_1, f_2) de fonctions mesurables sur $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, les parties réelle et imaginaire de f, la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ s'identifiant à $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Si μ est une mesure positive sur $(X, \mathcal{A})$, la fonction mesurable f est dite intégrable si $\int_X |f| d\mu < \infty$, $|f| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$ désignant le module de $f = f_1 + i f_2$ en tant que nombre complexe. Comme

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|f_1| + |f_2|\big) \leq |f| \leq |f_1| + |f_2|,$$

d'après les propriétés de l'intégrale, $f = (f_1, f_2)$ est intégrable si et seulement si f_1 et f_2 sont intégrables en tant que fonctions réelles, à savoir $\int_X |f_1| d\mu < \infty$

et $\int_X |f_2| d\mu < \infty$. L'intégrale de f est alors le nombre complexe

$$\int_X f\,d\mu \;=\; \int_X f_1\,d\mu + i\int_X f_2\,d\mu.$$

Les mesures signées ont été évoquées précédemment comme différence de deux mesures positives. Il est facile d'imaginer ce qu'est alors une *mesure complexe* à partir d'un couple de mesures signées. L'intégration par rapport aux mesures signées, puis aux mesures complexes, se définit suivant le même schéma en se ramenant à des intégrales par rapport à des mesures positives.

5 Intégration par rapport à une mesure image

Pour rappel, la mesure image μ_f d'une mesure μ sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ par une fonction mesurable $f : (X, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{B})$ est une mesure sur $\mathcal{B}$ définie par

$$B \in \mathcal{B} \;\to\; \mu_f(B) \;=\; \mu\big(f^{-1}(B)\big).$$

Il est naturel alors de décrire l'intégration par rapport à une telle mesure image. L'énoncé suivant sera qualifié de « théorème de transport » en théorie des probabilités.

Proposition 6 (Intégration par rapport à une mesure image)**.** *Pour toute fonction $\phi : (E, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable positive,*

$$\int_E \phi\,d\mu_f \;=\; \int_X \phi \circ f\,d\mu.$$

En outre, si ϕ est à valeurs réelles quelconques, ϕ est intégrable par rapport à μ_f si et seulement si $\phi \circ f$ est intégrable par rapport à μ, et si c'est le cas, l'égalité précédente a lieu.

Cette proposition est le résultat immédiat de la définition d'une mesure image et de la construction de l'intégrale de Lebesgue. En effet, si ϕ est l'indicatrice d'un borélien B, $\phi = \mathbb{1}_B$, alors

$$\phi \circ f \,=\, \phi(f) \,=\, \mathbb{1}_B(f) \,=\, \mathbb{1}_{f^{-1}(B)}$$

(car $\mathbb{1}_B(f(x)) = 1$ si et seulement si $f(x) \in B$, autrement dit $x \in f^{-1}(B)$, et de même si l'indicatrice est nulle). Mais alors, d'après la 1ère étape de la construction de l'intégrale, d'une part

$$\int_E \phi \, d\mu_f \,=\, \int_E \mathbb{1}_B \, d\mu_f \,=\, \mu_f(B),$$

et d'autre part

$$\int_X \phi \circ f \, d\mu \,=\, \int_X \mathbb{1}_{f^{-1}(B)} \, d\mu \,=\, \mu\big(f^{-1}(B)\big),$$

quantités égales par la définition de la mesure image. Le schéma de construction de l'intégrale se déroule alors suivant les trois étapes consécutives pour conclure à la proposition annoncée.

6 Intégration par rapport à une mesure discrète

Si μ est une mesure sur un ensemble fini ou dénombrable X, muni de la σ-algèbre $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ des parties de X, l'intégration par rapport à μ revient à une sommation : pour toute fonction $f : X \to \mathbb{R}$ positive,

$$\int_X f \, d\mu \,=\, \sum_{x \in X} f(x) \, \mu\big(\{x\}\big).$$

En effet, μ est une somme pondérée de masses de Dirac en les éléments de X, $\mu = \sum_{x \in X} \mu(\{x\}) \, \delta_x$. L'intégration par rapport à une masse de Dirac δ_x repose sur la formule fondamentale

$$\int_X f \, d\delta_x \;=\; f(x)$$

qui est établie pour une indicatrice $f = \mathbb{1}_A$, $A \subset X$, à travers l'identité

$$\int_X \mathbb{1}_A \, d\delta_x \;=\; \delta_x(A) \;=\; \mathbb{1}_A(x).$$

Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ de signe quelconque est intégrable par rapport à μ si et seulement si $\sum_{x \in X} |f(x)| \mu(\{x\}) < \infty$.

Ce paragraphe peut ainsi se résumer de façon vigoureuse par l'identité

$$\sum = \int .$$

7 Comparaison avec l'intégrale de Riemann

Outre le fait que l'intégrale de Lebesgue permet des intégrations sur des espaces généraux et par rapport à des mesures variées, pour la mesure de Lebesgue elle-même (sur $\mathbb{R}$ ou un intervalle de $\mathbb{R}$), une des supériorités de l'intégrale de Lebesgue vis-à-vis de l'intégrale de Riemann [3] provient du fait que cette dernière est approchée par des fonctions étagées définies sur un découpage fixe de l'intervalle d'intégration alors qu'à travers les fonctions étagées de la Proposition 8, Leçon 1, l'intégrale de Lebesgue fait usage d'un découpage adapté, et donc plus précis, de la fonction à intégrer.

Les liens entre l'intégrale de Lebesgue et l'intégrale de Riemann sont régis par l'énoncé suivant.

3. Bernhard Riemann, mathématicien allemand (1826–66).

Théorème 7 (Comparaison entre Lebesgue et Riemann)**.** *Soit* $[a,b]$ *un intervalle fermé borné de* $\mathbb{R}$*, et* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction bornée. Si* f*, mesurable (pour les tribus boréliennes), est intégrable au sens de Riemann, alors* f *est intégrable au sens de Lebesgue, et les intégrales coïncident :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f\, d\lambda.$$

La fonction f *est intégrable selon Riemann si et seulement si*

$$f : ([a,b], \mathcal{L}([a,b]) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

est mesurable et l'ensemble des points de $]a,b[$ *où* f *n'est pas continue est de mesure de Lebesgue nulle.*

Les fonctions continues (sur un intervalle fermé borné $[a,b]$) sont intégrables au sens de Riemann (et donc aussi au sens de Lebesgue). Le fait de pouvoir se ramener à une intégrale de Riemann permet d'utiliser le théorème fondamental du calcul intégral et tous les outils correspondants, dont le calcul par primitive et l'intégration par parties.

Ce théorème appelle plusieurs commentaires, notamment notationnels. En effet, la coïncidence entre les intégrales de Riemann et de Lebesgue, quand elle a lieu, conduit à confondre, voire à mixer, les écritures. C'est ainsi qu'elles pourront prendre les formes

$$\int_{[a,b]} f(x)\, d\lambda(x), \quad \int_a^b f(x)\, d\lambda(x), \quad \int_a^b f(x)\, \lambda(dx) \quad \text{etc.}$$

pas toujours très heureuses, mais compréhensibles... L'intégrale de Lebesgue ne nécessite pas d'indiquer les points de l'espace, mais l'usage et la commodité y conduisent naturellement. Par exemple, il sera écrit « $\int_{[a,b]} e^x\, d\lambda$ » plutôt que « $\int_{[a,b]} f\, d\lambda$ où f est la fonction $f(x) = e^x$, $x \in [a,b]$ ».

La notation $d\mu$ a aussi son origine dans cette identification.

À l'image de l'intégrale impropre de Riemann, il est possible de définir aussi une intégrale impropre de Lebesgue d'une fonction borélienne $f :]a, \infty[\to \mathbb{R}$, intégrable sur tous les intervalles $]a, b]$, $a < b$, si la limite

$$\lim_{b \to \infty} \int_{]a,b]} f \, d\lambda$$

existe. Attention cependant que l'existence de la limite n'entraîne pas nécessairement que f est intégrable (au sens de Lebesgue) sur $]a, \infty[$ (i.e. $\int_{]a,\infty[} |f| d\lambda < \infty$) comme le montre l'exemple étudié dans l'Exercice 6, Leçon 4.

8 Théorèmes de continuité et de dérivabilité (de Lebesgue)

Ce paragraphe énonce les propriétés de continuité et de dérivabilité des intégrales lorsque les fonctions à intégrer dépendent d'un paramètre.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et soit une famille f_t, $t \in I$, de fonctions intégrables sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Dans le premier théorème (de continuité), il est supposé que, pour μ-presque tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f_t(x)$ est continue, dans le second qu'elle est dérivable, de dérivée notée $\partial_t f_t$. Pour simplifier, les théorèmes sont présentés globalement sur I, ils pourraient être localisés en un point de I (et sont souvent utiles sous cette forme).

Théorème 8 (Théorème de continuité)**.** *S'il existe une fonction intégrable positive $h : (X, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que, pour tout $t \in I$, $|f_t| \leq h$ μ-presque partout, alors la fonction*

$$t \in I \to \int_X f_t \, d\mu$$

est continue.

Théorème 9 (Théorème de dérivabilité)**.** *S'il existe une fonction intégrable positive* $h : (X, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *telle que, pour tout* $t \in I$, $|\partial_t f_t| \leq h$ μ*-presque partout, alors la fonction*

$$t \in I \to \int_X f_t \, d\mu$$

est dérivable, de dérivée $\int_X \partial_t f_t d\mu$.

Un bon exemple d'illustration de ces théorèmes a trait à la fonction Gamma d'Euler [4] définie par

$$\Gamma(p) = \int_{[0,\infty[} x^{p-1} e^{-x} d\lambda, \quad p > 0$$

(dans les notations décrites dans le Paragraphe 6). Ils permettent d'établir que la fonction $p \to \Gamma(p)$ est continue et dérivable (en fait indéfiniment dérivable) sur $]0, \infty[$. Les démonstrations utiliseront avantageusement de localiser les arguments sur un intervalle autour d'un point p_0 où sont étudiées la continuité et la dérivabilité.

Ces énoncés justifient également la dérivation terme à terme de la série géométrique $\sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} a^n = \frac{1}{1-a}$, $0 < a < 1$. En effet, $\sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} a^n$ s'interprète comme l'intégrale sur $\mathbb{N} \cup \{0\}$ de la fonction $f_a : n \to a^n$ par rapport à la mesure de comptage. En appliquant le théorème de dérivabilité sur un intervalle $I =]b, c[$ autour d'un point a $(0 < b < a < c < 1)$, il est aisé de se convaincre des hypothèses, de sorte qu'en dérivant à droite et à gauche l'identité $\sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} a^n = \frac{1}{1-a}$, il vient

$$\sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} n a^{n-1} = \frac{1}{(1-a)^2} \, .$$

4. Leonhard Euler, mathématicien et physicien suisse (1707–1783).

9 Complément : Théorème de Radon-Nikodym

Il a déjà été mentionné que, étant donné une mesure μ sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ et une fonction mesurable positive $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, l'application

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu = \int_X (\mathbb{1}_A f) d\mu, \quad A \in \mathcal{A},$$

définit une nouvelle mesure sur $(X, \mathcal{A})$ (Exercice 1). Cette mesure est appelée *mesure de densité f par rapport à μ*. De nombreux exemples seront étudiés dans le cadre du calcul des probabilités, avec pour mesure de référence la mesure de Lebesgue.

L'intégration par rapport à ν s'effectue très simplement par multiplication avec la fonction de densité,

$$\int_X g \, d\nu = \int_X gf \, d\mu$$

pour toute $g : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable positive (par exemple) comme il en résulte si $g = \mathbb{1}_A$, $A \in \mathcal{A}$, puisque

$$\int_X \mathbb{1}_A \, d\nu = \nu(A) = \int_A f \, d\mu = \int_X (\mathbb{1}_A f) d\mu.$$

La mesure ν de densité f par rapport à μ possède la propriété suivant laquelle si $\mu(A) = 0$ pour $A \in \mathcal{A}$, alors $\nu(A) = 0$ (car $\mathbb{1}_A f = 0$ μ-presque partout). Si μ et ν sont un couple de mesures sur $(X, \mathcal{A})$ avec cette propriété, il est dit que ν est *absolument continue* par rapport à μ, noté $\nu << \mu$. Le théorème de Radon[5]-Nikodym[6] exprime réciproquement que si $\nu << \mu$, alors ν admet une densité par rapport à μ.

5. Johann Radon, mathématicien autrichien (1887-1956).
6. Otto Nikodym, mathématicien polonais (1887-1974).

Théorème 10 (Théorème de Radon-Nikodym)**.** *Soit* (ν, μ) *un couple de mesure sur un espace mesurable* $(X, \mathcal{A})$ *tel que* ν *soit absolument continue par rapport à* μ *; alors* ν *admet une densité par rapport à* μ *sous la forme d'une fonction mesurable positive* $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *telle que* $\nu(A) = \int_A f d\mu$ *pour tout* $A \in \mathcal{A}$*. La fonction* f *est appelée dérivée de Radon-Nikodym de* ν *par rapport à* μ*, notée* $f = \frac{d\nu}{d\mu}$*.*

La notation $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ est parfaitement adaptée à l'intégration par rapport à ν puisque $\int_X g d\nu = \int_X g f d\mu$, et conduit naturellement à l'écriture $d\nu = f d\mu$ décrivant ν.

Si deux mesures μ et ν sur $(X, \mathcal{A})$ sont telles que $\nu << \mu$ et $\mu << \nu$, elles sont dites *équivalentes*. S'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) = 0$ et $\nu(A^c) = 0$, elles sont dites *étrangères* (en particulier, sauf si ν est la mesure nulle, elle n'est pas absolument continue par rapport à μ). Par exemple, la mesure de Lebesgue (sur $\mathbb{R}$) et la mesure de comptage (sur $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$) sont étrangères (pour $A = \mathbb{Z}$).

Exercices

(*Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.*)

Exercice 1. Démontrer que si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré et $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable positive, l'application

$$\nu(A) \,=\, \int_A f\, d\mu \,=\, \int_X (\mathbb{1}_A f) d\mu, \quad A \in \mathcal{A},$$

est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$. Elle vérifie en outre que $\nu(A) = 0$ si $\mu(A) = 0$.

Exercice 2 (*Continuité de l'intégrale au voisinage de la partie vide.*) Soit f une fonction intégrable sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $A \in \mathcal{A}$ vérifie $\mu(A) \leq \eta$, alors $\int_A |f| d\mu \leq \varepsilon$.

Exercice 3. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré fini, et soit $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable ; démontrer que les quatre assertions suivantes sont équivalentes : (i) f est intégrable par rapport à μ ; (ii) $\lim_{n\to\infty} \int_{\{|f| \geq n\}} |f| d\mu = 0$; (iii) $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\, \mu(n \leq |f| < n+1) < \infty$; (iv)* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(|f| \geq n) < \infty$.

Exercice 4 (*Lemme de Scheffé*[7]). Soient f_n, $n \in N$, f des fonctions positives intégrables sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$ telles que $f_n \to f$ μ-presque partout et $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$. Démontrer que

$$\lim_{n\to 0} \int_X |f_n - f| d\mu \,=\, 0.$$

(Il pourra être établi pour commencer que $\lim_{n\to\infty} \int_X (f - f_n)^+ d\mu = 0$.)

7. Henry Scheffé, statisticien américain (1907–1977).

Exercice 5. Démontrer à l'aide du théorème de convergence dominée que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

(*Indications* : utiliser la mesure de comptage sur $\mathbb{N} \cup \{0\}$; développer $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ par la formule du binôme, et identifier une suite de fonctions f_n (sur $\mathbb{N} \cup \{0\}$) et sa limite f.)

Exercice 6. Soient μ et ν deux mesures finies sur la σ-algèbre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boréliens de $\mathbb{R}$; démontrer que si $\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \int_{\mathbb{R}} f d\nu$ pour toute fonction continue bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors $\mu = \nu$. (*Indication* : approcher l'indicatrice $\mathbb{1}_{[a,b]}$ par une fonction continue bornée.)

Exercice 7. Soient les fonctions $u(x) = \mathbb{1}_{\{\frac{1}{n}\,;\, n\geq 1\}}(x)$ et $v(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$; discuter de la véracité des assertions suivantes :

(i) La fonction u est continue partout sauf sur un ensemble dénombrable de points. Comme ce dernier est de mesure de Lebesgue nulle, u est presque partout continue, et donc intégrable au sens de Riemann.

(ii) La fonction v est continue partout sauf sur l'ensemble $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Comme ce dernier est de mesure de Lebesgue nulle, v est presque partout continue, et donc intégrable au sens de Riemann.

(iii) Les fonctions u et v sont intégrables au sens de Lebesgue et $\int_{\mathbb{R}} u d\lambda = \int_{\mathbb{R}} v d\lambda = 0$.

(iv) La fonction v n'est pas intégrable au sens de Riemann.

Exercice 8. Soit $f_n = \frac{1}{n^3}\, \mathbb{1}_{[1,n]}$, $n \geq 1$; existe-t-il une fonction intégrable positive h (pour la mesure de Lebesgue sur $[1, \infty[$) telle que $f_n \leq h$, $n \geq 1$? Même question pour $f_n = \frac{1}{n\ln(n)}\, \mathbb{1}_{[1,n]}$, $n \geq 2$.

Exercice 9. Étudier les limites quand n tend vers l'infini de

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x} \cos(x) dx\,; \qquad \int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n}\, dx\,; \qquad \int_1^\infty \frac{1+nx}{(1+x)^n}\, dx.$$

Exercice 10 (*Fonction Gamma*). Soit $\Gamma(p) = \int_{]0,\infty[} x^{p-1} e^{-x} d\lambda(x)$, $p > 0$, la fonction Gamma. Démontrer que Γ est continue, indéfiniment dérivable, et calculer sa dérivée n-ième. Montrer que l'on a $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$ pour tout $p > 0$, et en déduire l'expression de $\Gamma(n+1)$ lorsque $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. Dans cet exercice, $(X, \mathcal{B}, \lambda)$ est l'espace mesuré défini par $X =]0,\infty[$, $\mathcal{B}$ la tribu borélienne sur X et λ la mesure de Lebesgue. Soit la fonction

$$f(t) = \int_X e^{-x^2 - \frac{t}{x^2}} d\lambda(x).$$

Quel est le domaine de définition de f ? Démontrer que f est continue sur $[0,\infty[$, dérivable sur $]0,\infty[$. Établir que pour tout $t > 0$, $f'(t) = -\frac{1}{\sqrt{t}} f(t)$. En déduire l'expression de $f(t)$.

Exercice 12. Soit la fonction $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\,]0,\infty[, \mathcal{B}(]0,\infty[))$ définie par $f(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Décrire l'image de la mesure de Lebesgue λ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par la fonction $f(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 13* (*Méthode de Laplace*[8]). Soit f une fonction positive de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,+1]$ dont le maximum (global) est atteint uniquement en 0, et telle que $f(0) = 1$ et $f''(0) < 0$.

a) En utilisant une formule de Taylor, démontrer que pour tout $0 < \varepsilon < -f''(0)$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [-\eta, +\eta]$,

$$1 + \left(f''(0) - \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{x^2}{2} \;\leq\; f(x) \;\leq\; 1 + \left(f''(0) + \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{x^2}{2}$$

8. Pierre-Simon de Laplace, mathématicien, astronome, physicien et homme politique français (1749–1827).

b) En faisant usage des inégalités élémentaires $e^{u-u^2} \leq 1+u \leq e^u$ pour $u \geq -\frac{1}{2}$, en déduire que pour tout $x \in [-\eta, +\eta]$,

$$e^{\frac{1}{2}(f''(0)-\varepsilon)x^2} \;\leq\; f(x) \;\leq\; e^{\frac{1}{2}(f''(0)+\varepsilon)x^2}.$$

c) Démontrer l'équivalence, pour $r \to \infty$,

$$\int_{[-1,+1]} f^r d\lambda \sim \sqrt{\frac{2\pi}{-rf''(0)}}\,.$$

(Décomposer l'intégrale sur $[-\eta, +\eta]$ et son complémentaire.)

d) Application à la fonction Gamma d'Euler Γ. Démontrer que, pour tout $p > 0$,

$$\Gamma(p+1) \;=\; p^{p+1}e^{-p}\int_{[-1,\infty[}(x+1)^p e^{-px}d\lambda.$$

En appliquant c) (étendu à $[-1,\infty[$), déduire l'équivalent quand $p \to \infty$ (*formule de Stirling*[9])

$$\Gamma(p+1) \;\sim\; \sqrt{2\pi p}\,p^p\,e^{-p}.$$

Exercice 14. Soit μ une mesure de probabilité sur $[0,1]$, et soient $m = \int_{[0,1]} x d\mu$, $v = \int_{[0,1]}(x-m)^2 d\mu$, $a = \int_{[0,1]} x^2 d\mu - m^2$ et $b = (\frac{1}{2}-m)^2 + \int_{[0,1]} x(1-x)d\mu$. Exprimer v et b en fonction de a. En déduire que $a \leq \frac{1}{4}$ et que $a = \frac{1}{4}$ pour une unique mesure μ que l'on déterminera.

Exercice 15 (*Distance en variation totale*). Si μ et ν sont deux mesures de probabilité sur un ensemble fini ou dénombrable X (muni de la tribu des parties $\mathcal{P}(X)$), on définit leur distance en variation totale

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu,\nu) \;=\; \sup_{A\subset X}\big|\mu(A)-\nu(A)\big|.$$

9. James Stirling, mathématicien écossais (1692–1770).

a) Vérifier que d_{TV} est une distance sur l'espace des mesures de probabilité sur $(X, \mathcal{P}(X))$.

b) Démontrer que

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu,\nu) \;=\; \frac{1}{2}\,\sup\left|\int_X f\,d\mu - \int_X f\,d\nu\right| \;=\; \frac{1}{2}\sum_{x\in X}\big|\mu(\{x\})-\nu(\{x\})\big|$$

où le supremum dans l'expression du milieu porte sur toutes les fonctions $f : X \to [-1,+1]$. (*Indication* : considérer $A_* = \{x \in X; \mu(\{x\}) \geq \nu(\{x\})\}$.)

Exercice 16* (*Mesure de Cantor*). Rappeler la construction de l'ensemble de Cantor dans l'Exercice 9, Leçon 2.

a) Poser, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in [0,1]$, $F_n(x) = (\frac{3}{2})^n \lambda([0,x] \cap E_n)$. Représenter F_0, F_1, F_2. Démontrer que

$$\big|F_n(x) - F_{n-1}(x)\big| \leq \frac{1}{2^{n-2}}\,, \quad x \in [0,1],\, n \geq 1.$$

En déduire que la fonction $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$, $x \in [0,1]$, existe, est croissante et continue.

b) Soit λ^F la mesure de Stieltjes sur $[0,1]$ associée à la fonction croissante F ; la mesure λ^F comporte-t-elle une partie atomique ? Est-elle absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ ? Lui est-elle étrangère ?