Leçon 5

Rappels de la théorie de l'intégration : espace L^p, formule du changement de variable

Les espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p sont les espaces fonctionnels de la théorie de l'intégration. Dans toute cette leçon, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré fixé.

1 Espace $\mathcal{L}^p$, inégalités de Hölder et de Minkowski

Définition 1 (Espace $\mathcal{L}^p$). *Pour $0 < p < \infty$, $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est l'espace des fonctions mesurables $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telles que $|f|^p$ est intégrable, soit*

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty.$$

Si $p = \infty$, $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ est l'espace des fonctions mesurables $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ pour lesquelles il existe $c \geq 0$ tel que $|f| \leq c$ μ-presque partout.

Ces espaces peuvent aussi être noté $\mathcal{L}^p((X, \mathcal{A}, \mu)\,; \mathbb{R})$ pour signifier qu'il est également possible de considérer des fonctions à valeurs complexes, donc un couple, parties réelle et imaginaire, de fonctions mesurables en remplaçant les valeurs absolues par des modules, et en désignant les espaces par $\mathcal{L}^p((X, \mathcal{A}, \mu)\,; \mathbb{C})$. Le plus souvent ces notations sont abrégées en $\mathcal{L}^p(\mu)$, voire $\mathcal{L}^p$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. L'espace $\mathcal{L}^1(\mu)$ est tout simplement l'espace des fonctions intégrables (par rapport à μ) de la théorie de Lebesgue.

La première inégalité importante est d'usage constant.

Proposition 2 (Inégalité de Hölder[1]). *Soit $1 < p < \infty$ et soit q l'exposant conjugué $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; si $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ et $g \in \mathcal{L}^g(\mu)$, alors fg est intégrable et*

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

1. Otto Hölder, mathématicien allemand (1859–1937).

Dans le cas $p = 1$, $q = \infty$ (et le cas symétrique), si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $|g| \leq c$ μ-presque partout, alors d'après les propriétés de l'intégrale,

$$\int_X |fg| d\mu \leq c \int_X |f| d\mu.$$

Le membre de gauche dans l'inégalité de Hölder peut être écrit de façon équivalente $\left| \int_X fg d\mu \right|$, ou même $\int_X fg d\mu$, quitte à remplacer f et g par $|f|$ et $|g|$. L'inégalité de Hölder de la proposition vaut pareillement pour des fonctions f et g à valeurs complexes.

Les démonstrations de l'inégalité de Hölder sont multiples et variées. Par exemple, si $a, b \geq 0$, par concavité de la fonction logarithme, $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ *(inégalité de Young*[2]*)*. Alors, pour tout $t > 0$,

$$\int_X |fg| d\mu = \int_X \left| tf \, \frac{g}{t} \right| d\mu \leq \frac{t^p}{p} \int_X |f|^p d\mu + \frac{1}{t^q q} \int_X |g|^q d\mu.$$

L'optimisation en $t > 0$ fournit la conclusion puisque $pq = p + q$. Il existe aussi une démonstration faisant usage de l'inégalité de Jensen (même si μ n'est pas nécessairement finie), voir Exercice 2.

L'inégalité de la Proposition 2 recouvre des formes rencontrées par ailleurs. Par exemple, si μ est la mesure de comptage sur $\{1, \ldots, n\}$, et si $f(k) = a_k$, $g(k) = b_k$ pour des réels (ou des complexes) a_k, b_k, $k = 1, \ldots, n$,

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

En particulier si $p = q = 2$, c'est une forme de l'inégalité de Cauchy[3]-Schwarz[4]

$$\big| \langle a, b \rangle \big| \leq |a| \, |b|$$

2. Laurence Chisholm Young, mathématicien anglais (1905–2000).
3. Augustin Louis Cauchy, mathématicien français (1789–1857).
4. Hermann Amandus Schwarz, mathématicien allemand (1843–1921).

pour $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

L'inégalité de Hölder conduit simplement à l'inégalité de Minkowski [5] qui fait des espaces $\mathcal{L}^p(\mu)$ des espaces vectoriels.

Proposition 3 (Inégalité de Minkowski)**.** *Si $1 \leq p \leq \infty$ et si $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, alors $f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, et*

$$\left(\int_X |f+g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

La démonstration est un argument d'homogénéité. Supposer $1 < p < \infty$ et écrire par l'inégalité triangulaire $|f+g| \leq |f| + |g|$ que

$$\int_X |f+g|^p d\mu \leq \int_X |f||f+g|^{p-1} d\mu + \int_X |g||f+g|^{p-1} d\mu.$$

L'application de l'inégalité de Hölder aux deux intégrales de droite avec les exposants conjugués p et $\frac{p}{p-1}$ conduit rapidement à la conclusion. Pour $p = 1$ et $p = \infty$, l'inégalité de Minkowski est une conséquence de l'inégalité triangulaire.

2 Espace L^p

Si $f \in \mathcal{L}^p(\mu) = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^p((X, \mathcal{A}, \mu)\,; \mathbb{R})$, poser

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

si $1 \leq p < \infty$, et

$$\|f\|_\infty = \inf \big\{ c \geq 0\,;\, \mu(|f| > c) = 0 \big\}$$

5. Hermann Minkowski, mathématicien et physicien théoricien allemand (1864–1909).

si $p = \infty$. Ainsi que la notation l'indique, l'application $f \to \|f\|_p$ a tout d'une norme : elle est positive, homogène $\|tf\|_p = |t|\|f\|_p$, $t \in \mathbb{R}$, vérifie l'inégalité triangulaire d'après l'inégalité de Minskowski et $\|f\|_p = 0$ si $f = 0$. Sauf que la réciproque de la dernière implication n'a pas pleinement lieu, à savoir si $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = 0$, alors $f = 0$ seulement μ-presque partout (d'après les propriétés de l'intégrale, Leçon 3).

Il est alors naturel d'identifier la fonction nulle presque partout à la fonction nulle partout à travers la relation d'équivalence entre deux fonctions mesurables $f \sim g$ si $f = g$ μ-presque partout (si tel est le cas en effet, $\|f\|_p = \|g\|_p$).

Les espaces $\mathrm{L}^p(\mu) = \mathrm{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, sont alors définis comme les quotients par cette relation d'équivalence des espaces $\mathcal{L}^p(\mu)$. Sur ces quotients $\mathrm{L}^p(\mu)$, l'application $f \to \|f\|_p$ est alors une norme. De plus

Théorème 4 (de Riesz [6]-Fisher [7]). *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $\mathrm{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Banach [8] (espace vectoriel normé complet).*

3 Espace de Hilbert L^2

Lorsque $p = 2$, $\mathrm{L}^2(\mu) = \mathrm{L}^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ est muni du produit scalaire fourni par l'intégrale

$$\langle f, g \rangle_{\mathrm{L}^2(\mu)} = \int_X f g \, d\mu$$

pour deux fonctions f et g de $\mathrm{L}^2(\mu)$, et définit ainsi un espace de Hilbert [9]. L'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\langle f, g \rangle_{\mathrm{L}^2(\mu)} \leq \|f\|_2 \, \|g\|_2$$

6. Frigyes Riesz, mathématicien hongrois (1880–1956).
7. Ernst Sigismund Fischer, mathématicien autrichien (1875–1954).
8. Stefan Banach, mathématicien polonais (1892–1945).
9. David Hilbert, mathématicien allemand (1862–1943).

revient donc à l'inégalité de Hölder pour $p = q = 2$.

Il n'est pas inutile de rappeler la formule de Parseval [10] dans ce cadre. Si $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{L}^2(\mu)$ sont orthogonales deux à deux, au sens où $\langle f_k, f_\ell \rangle_{\mathrm{L}^2(\mu)} = 0$ si $k \neq \ell$, alors

$$\Big\| \sum_{k=1}^n f_k \Big\|_{\mathrm{L}^2(\mu)}^2 = \int_X \Big| \sum_{k=1}^n f_k \Big|^2 d\mu = \sum_{k=1}^n \int_X f_k^2 d\mu = \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{\mathrm{L}^2(\mu)}^2$$

(l'égalité centrale s'obtenant en développant le carré et en faisant usage de l'orthogonalité $\int_X f_k f_\ell d\mu = \langle f_k, f_\ell \rangle_{\mathrm{L}^2(\mu)} = 0$, $k \neq \ell$).

4 Inclusion et densité

Une question naturelle est de savoir si les espaces $\mathrm{L}^p(\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, sont emboîtés (la question est la même concernant $\mathcal{L}^p(\mu)$).

Si la mesure μ est finie, de façon équivalente normalisée en une mesure de probabilité $\mu(X) = 1$, il résulte de l'inégalité de Jensen que si $p \leq p'$, alors $\mathrm{L}^{p'}(\mu) \subset \mathrm{L}^p(\mu)$. En effet, par convexité de la fonction $u \to u^{\frac{p'}{p}}$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$\left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{p'}{p}} \leq \int_X |f|^{p'} d\mu.$$

Cette inégalité découle aussi de l'inégalité de Hölder en décomposant

$$\int_X |f|^p d\mu = \int_X |f|^p \cdot 1 \, d\mu$$

et en appliquant celle-ci au couple de fonctions $(|f|^p, 1)$ pour les exposants conjugués $(\frac{p'}{p}, \frac{p'}{p'-p})$ (en utilisant bien entendu que $\int_X 1 d\mu = \mu(X) = 1$).

10. Marc-Antoine Parseval des Chênes, mathématicien français (1755–1836).

Si μ est la mesure de comptage, les espaces $\mathrm{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ sont les espaces de suites a_n, $n \in \mathbb{N}$, de réels (ou complexes) telles que $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^p < \infty$, traditionnellement désignés par $\ell^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p \leq \infty$ (pour $p = \infty$, les suites sont bornées). Il est classique dans ce cas que l'inclusion inverse est satisfaite, à savoir $\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^{p'}(\mathbb{N})$ si $p \leq p'$ (un moyen mnémotechnique est de souvenir qu'une suite sommable est de carré sommable), conséquence de l'inégalité élémentaire $(a+b)^r \leq a^r + b^r$, $a, b \geq 0$, $0 \leq r \leq 1$.

Bien entendu, pour une mesure finie sur un ensemble fini, tous les espaces L^p, $1 \leq p \leq \infty$, coïncident.

Mais en dehors de ces deux situations, il n'y a pas en général d'inclusions, et un bon exemple illustratif est fourni par les espaces $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour λ la mesure de Lebesgue. En fait, ces espaces rassemblent les deux comportements opposés précédents (à l'origine et à l'infini), et ne peuvent ainsi participer à aucun des deux. Pour simplifier la discussion, prendre $1 = p \leq p' = 2$. La fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$, appartient à $\mathrm{L}^2(\lambda)$ mais pas à $\mathrm{L}^1(\lambda)$; en revanche la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbb{1}_{]0,1[}(x)$ appartient à $\mathrm{L}^1(\lambda)$ mais pas à $\mathrm{L}^2(\lambda)$.

Les espaces $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, pour λ^d la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ sont les espaces fondamentaux de l'analyse réelle. Il est utile de disposer à leur égard de propriétés dites de *densité*. Un théorème fondamental est le suivant.

Théorème 5. *Les fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}^d$ sont denses dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda^d)$, $1 \leq p < \infty$.*

Autrement dit, pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda^d)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue à support compact sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. Il est même possible de considérer les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans cet énoncé.

5 Formule du changement de variable

La formule du changement de variable est une propriété importante permettant la transformation et le calcul d'intégrales par rapport à la mesure de Lebesgue. Sa mise en œuvre requiert un peu de soin et de précision dans les applications. La mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ est désignée par λ $(= \lambda^d)$.

Théorème 6 (Formule du changement de variable)**.** *Soit $h : U \to V$ une application bijective entre deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^d$, de classe C^1, et telle que $\text{dét}(J_h(x)) \neq 0$ en tout point x de U, où $J_h(x)$ est la matrice jacobienne de h en x (h est dite un difféomorphisme) ; alors, si $\phi : V \to \mathbb{R}$ est borélienne, positive ou intégrable par rapport à λ,*

$$\int_V \phi \, d\lambda \,=\, \int_U \phi \circ h \, \big|\text{dét}(J_h)\big| \, d\lambda.$$

Il est utile de bénéficier également de la formule pour $h^{-1} : V \to U$,

$$\int_U \psi \, d\lambda \,=\, \int_V \psi \circ h^{-1} \, \big|\text{dét}(J_{h^{-1}})\big| \, d\lambda \,=\, \int_V \psi \circ h^{-1} \, \frac{1}{|\text{dét}(J_h \circ h^{-1})|} \, d\lambda$$

si $\psi : U \to \mathbb{R}$.

En particulier, si μ est une mesure de densité f par rapport à λ sur l'ouvert U, la mesure image μ_h de μ par h a une densité par rapport à λ sur V donnée par

$$\big|\text{dét}(J_{h^{-1}})\big| f \circ h^{-1} \,=\, \frac{1}{|\text{dét}(J_h \circ h^{-1})|} \, f \circ h^{-1}.$$

En effet, si $\phi : V \to \mathbb{R}$ est intégrable par rapport à λ, ou positive, par intégration par rapport à une mesure image (Proposition 6, Leçon 3),

$$\int_V \phi \, d\mu_h \,=\, \int_U \phi \circ h \, d\mu \,=\, \int_U \phi \circ h \, f \, d\lambda \,=\, \int_V \phi \, \big|\text{dét}(J_{h^{-1}})\big| f \circ h^{-1} \, d\lambda.$$

La démonstration de la formule du changement de variable est une application un peu délicate du fait, plus élémentaire, que si $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est une application linéaire inversible, la mesure image de la mesure de Lebesgue λ par u est le multiple de λ

$$\left|\text{dét}(u^{-1})\right| \lambda = \frac{1}{|\text{dét}(u)|} \lambda.$$

En particulier, la mesure de Lebesgue est invariante par transformation orthogonale (puisque pour celles-ci $|\text{dét}(u)| = 1$).

L'exemple traditionnel de changement de variable dans $\mathbb{R}^2$ est le changement en coordonnées polaires décrit dans le Théorème 3, Leçon 4. Il est étendu en les coordonnées sphériques (voir Exercice 8).

Exercices

(*Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.*)

Exercice 1. Soit μ une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} e^{sx} d\mu < \infty$ pour tout s dans un intervalle I de $\mathbb{R}$; démontrer que la fonction

$$s \in I \mapsto \ln\left(\int_{\mathbb{R}} e^{sx} d\mu\right)$$

est convexe.

Exercice 2 (*Inégalité de Hölder*). Dans cet exercice, $\|\cdot\|_p$ désigne la norme L^p, $1 \leq p \leq \infty$, sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

a) Rappeler l'énoncé de l'inégalité de Jensen, et en déduire l'inégalité de Hölder (pour des fonctions sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$).

b) Démontrer que si $1 \leq r \leq p \leq s \leq \infty$ et $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{r} + \frac{1-\theta}{s}$ avec $\theta \in [0, 1]$, alors pour toute fonction mesurable $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$,

$$\|f\|_p \leq \|f\|_r^\theta \, \|f\|_s^{1-\theta}.$$

c) Si $f_1, \ldots, f_n$ sont des fonctions mesurables positives sur X, et $c_1, \ldots, c_n \geq 0$, $c_1 + \cdots + c_n = 1$, montrer que

$$\int_X f_1^{c_1} \cdots f_n^{c_n} d\mu \leq \left(\int_X f_1 d\mu\right)^{c_1} \cdots \left(\int_X f_n d\mu\right)^{c_n}.$$

Exercice 3* (*Inégalité entropique*). Sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ de probabilité ($\mu(X) = 1$), si $f, g : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sont des fonctions mesurables avec $f \geq 0$, $\int_X f d\mu = 1$, et fg intégrable, alors

$$\int_X fg\, d\mu \;\leq\; \int_X f \ln(f) d\mu + \ln\left(\int_X e^g d\mu\right).$$

(*Indication* : utiliser l'inégalité de Jensen pour la mesure de probabilité $d\nu = f d\mu$.)

Exercice 4* (*Inégalité de Pinsker*[11]). Soit μ une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{A})$, et soit f une densité de probabilité par rapport à μ (autrement dit $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable à valeurs positives et $\int_X f d\mu = 1$). Poser $E = \{f \leq 1\}$, $\mu(E) = t$, $\int_E f d\mu = a$.

a) Vérifier que $a \leq t$ et que $\int_X |f - 1|\, d\mu = 2(t - a)$.

b) Supposer $0 < a \leq t < 1$ et considérer la densité de probabilité g (par rapport à μ) définie par $g = \frac{a}{t}$ sur E et $g = \frac{1-a}{1-t}$ sur le complémentaire de E. Utiliser l'inégalité de Jensen (pour la probabilité de densité g) pour démontrer que $\int_X f \ln(f) d\mu \geq \int_X f \ln(g)\, d\mu$, et en déduire que

$$\int_X f \ln(f) d\mu \;\geq\; a \,\ln\left(\frac{a}{t}\right) + (1 - a) \ln\left(\frac{1 - a}{1 - t}\right).$$

c) Vérifier l'inégalité, pour tous $0 < a \leq t < 1$,

$$2(t - a)^2 - a \ln\left(\frac{a}{t}\right) - (1 - a) \ln\left(\frac{1 - a}{1 - t}\right) \;\leq\; 0.$$

d) Conclure de l'ensemble des questions précédentes que (inégalité de Pinsker)

$$\left(\int_X |f - 1|\, d\mu\right)^2 \;\leq\; 2 \int_X f \ln(f) d\mu.$$

11. Mark Pinsker, mathématicien soviétique et russe (1925–2003).

Exercice 5. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions boréliennes croissantes telles que $\int_{\mathbb{R}} f^2 d\mu < \infty$, $\int_{\mathbb{R}} g^2 d\mu < \infty$, pour une mesure μ finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$; démontrer que

$$\int_{\mathbb{R}} fg \, d\mu \geq \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu \int_{\mathbb{R}} g \, d\mu.$$

Exercice 6*. Démontrer que l'espace des fonctions continues $C([0,1])$ sur $[0,1]$ est dense dans l'espace de Hilbert (réel) $\mathrm{L}^2([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$. (*Indication* : si $\langle f, g \rangle_{\mathrm{L}^2(\lambda)} = 0$ pour toute fonction g de $C([0,1])$, montrer que $\langle f, \mathbb{1}_B \rangle_{\mathrm{L}^2(\lambda)} = 0$ pour tout borélien B de $[0,1]$ en commençant par le cas d'un intervalle.) En utilisant le théorème de Stone[12]-Weierstrass[13], démontrer que la famille $\theta \in \mathbb{S}^1 \to e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$, définit une base orthonormale de l'espace de Hilbert complexe $\mathrm{L}^2(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}(\mathbb{S}^1), \frac{1}{2\pi}\lambda)$ des fonctions complexes sur le cercle unité $\mathbb{S}^1$ de module carré intégrable. En déduire que les fonctions 1, $\sqrt{2}\,\sin(n\theta)$, $\sqrt{2}\,\cos(n\theta)$, $n \in \mathbb{N}$, forment une base orthonormale de l'espace de Hilbert réel $\mathrm{L}^2(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}(\mathbb{S}^1), \frac{1}{2\pi}\lambda)$.

Exercice 7 (*Polynômes de Legendre*[14]). Sur l'intervalle $[-1, +1]$, les monômes $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ sont orthogonalisés par rapport à la mesure de Lebesgue λ pour définir une suite de polynômes orthogonaux $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ (dont le coefficient du terme de plus haut degré est 1), appelés polynômes de Legendre.

a) Calculer P_0, P_1 et P_2.

b) Soit, pour tout entier n, q_n la n-ième dérivée du polynôme $(x^2-1)^n$, et $Q_n = \frac{n!}{(2n)!}\, q_n$ ($Q_0 = 1$). Démontrer que pour tout $k = 0, 1, \ldots, n-1$,

$$\int_{[-1,+1]} x^k Q_n(x) d\lambda = 0$$

12. Marshall Stone, mathématicien américain (1903–1989).
13. Karl Weierstrass, mathématicien allemand (1815–1897).
14. Adrien-Marie Legendre, mathématicien français (1752–1833).

et en déduire que $Q_n = P_n$.

c) En utilisant que les polynômes sont denses dans $\mathrm{L}^2([-1,+1],\mathcal{B}([-1,+1]),\lambda)$ (voir Paragraphe 4, Leçon 10), en conclure que les polynômes de Legendre forment une base orthogonale de $\mathrm{L}^2([-1,+1],\mathcal{B}([-1,+1]),\lambda)$.

Exercice 8 (*Théorème d'Archimède*[15]). Soit la mesure uniforme σ^2 sur la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$ (Théorème 3, Leçon 4) ; soit h l'application de

$$U = \big\{(\theta_1,\theta_2)\,;\,\theta_1 \in \,]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[, \theta_2 \in]0,2\pi[\,\big\}$$

dans $\mathbb{S}^2$ (privée d'un demi-équateur) définie par

$$h(\theta_1,\theta_2) = \big(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2),\cos(\theta_1)\sin(\theta_2),\sin(\theta_1)\big)$$

(coordonnées sphériques). Vérifier que h est bijective sur U de jacobien $\cos(\theta_1)$. Démontrer que la projection de σ^2 sur un diamètre (de la sphère) (par exemple la mesure image de σ^2 par l'application $T : (s_1,s_2,s_3) \to s_3$) est uniforme sur $]-1,+1[$ (i.e. de densité constante par rapport à la mesure de Lebesgue).

Exercice 9* (*Inégalité de Prékopa*[16]*-Leindler*[17]). Soient f,g,h trois fonctions continues strictement positives sur $\mathbb{R}$ telles que f et g sont intégrables et, pour un $\theta \in [0,1]$,

$$h\big(\theta x + (1-\theta)y\big) \geq f(x)^\theta g(y)^{1-\theta}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Définir $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda \int_{]-\infty,T(x)]} g\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g\,d\lambda \int_{]-\infty,x]} f\,d\lambda, \quad x \in \mathbb{R}.$$

15. Archimède de Syracuse, physicien, mathématicien et ingénieur grec de Sicile (287–212 av. J. C.).
16. András Prékopa, mathématicien hongrois (1929–2016).
17. László Leindler, mathématicien hongrois (1935–2020).

Vérifier que T est croissante et différentiable. En utilisant le changement de variable $x \mapsto z(x) = \theta x + (1-\theta)T(x)$, démontrer que

$$\int_{\mathbb{R}} h \, d\lambda \geq \left(\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda \right)^{\theta} \left(\int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda \right)^{1-\theta}.$$

Démontrer par récurrence sur la dimension que le résultat s'étend aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Proposer une extension à toutes les fonctions mesurables positives sur $\mathbb{R}^d$.