# Leçon 8

## Espace de probabilité, variable aléatoire, loi de variable aléatoire

1. Espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
2. Variable aléatoire
3. Loi de variable aléatoire
4. Variable aléatoire définie presque sûrement
5. Vecteur aléatoire

Exercices

Cette leçon introduit la notion fondamentale de *variable aléatoire* et de *loi* de variable aléatoire du calcul des probabilités. Si par définition une variable aléatoire n'est rien d'autre qu'une fonction mesurable, le concept va bien au delà dans son utilisation et sa souplesse à décrire les phénomènes aléatoires et leurs propriétés. Cette description s'appuie sur la notion d'un espace de probabilité, abstrait, rendant compte de l'aléa sous-jacent.

# 1 Espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

Alors que les mesures de probabilité rencontrées dans la leçon précédente sont décrites sur un espace mesurable $(E, \mathcal{B})$ le plus souvent concrètement identifié, et qu'elles sont explicites, la notion de variable aléatoire conduit à changer de paradigme en considérant un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, qui restera le plus souvent abstrait (et qu'en fait, sauf besoin explicite, il n'est pas nécessaire de décrire – il sera toutefois supposé suffisamment riche en un sens à préciser tout au long de la leçon).

Donc $\mathbb{P}$ est une probabilité sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ ; d'une certaine façon, le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ représente l'ensemble des phénomènes aléatoires (pour rendre compte par exemple de l'incertitude dans le lancer d'une pièce – ou si cette illustration paraît encore trop déterministe, la position de l'électron autour du noyau de l'atome). Une sorte d'« univers » donc, sur lequel des fonctions mesurables (les variables aléatoires) vont agir et décrire des phénomènes. Il convient d'observer le caractère universel de la probabilité $\mathbb{P}$ à travers sa notation (distincte donc des $P$ de la Leçon 7). Une partie $A$ de $\mathcal{A}$ sera appelée *événement*.

**Aléa**. Du latin alea qui signifie « dé », « jeu de dés », « jeu de hasard ».

**Hasard**. De l'ancien français hasart, de l'espagnol azar, venant de l'arabe andalou az-zahr, qui signifie « dé, jeu de dés », nommé d'après l'arabe zahr, qui signifie « fleur », car la face gagnante du dé portait une fleur.

**Random**. De l'ancien français randon qui signifie « course rapide » ; plus précisément, en vènerie, course erratique du cerf qui zigzague en essayant d'échapper aux chiens. Le mot a aussi donné « randonnée » en français.

**Stochastique**. Du grec ancien stokhastikos, qui signifie « conjectural », de stokhos, qui signifie « but, cible, conjecture ».

# 2 Variable aléatoire

Soit $(E, \mathcal{B})$ un espace mesurable, par exemple (comme cela sera essentiellement le cas dans ces leçons) $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$ muni de la tribu des boréliens.

**Définition 1** (Variable aléatoire)**.** *Une variable aléatoire, sur* $(\Omega, \mathcal{A})$ *à valeurs dans* $(E, \mathcal{B})$*, est une fonction mesurable*

$$X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{B}).$$

La notation $X$, comme souvent en mathématique, souligne le caractère central de l'objet dans le cadre considéré. La définition de mesurabilité indique donc que, pour tout $B \in \mathcal{B}$,

$$X^{-1}(B) = \big\{\omega \in \Omega \,;\, X(\omega) \in B\big\} \in \mathcal{A}.$$

Il y donc autant de variables aléatoires que de fonctions mesurables, et elles vérifient les diverses propriétés rappelées dans la Leçon 1. En particulier, une fonction $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est une variable aléatoire si

$$X^{-1}\big(\,]-\infty, t]\big) = \{X \leq t\} \in \mathcal{A}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Lorsque $(E, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, les variables aléatoires sont qualifiées de *réelles*. Dans ce cadre, il n'est pas inutile de rappeler au moins les fonctions indicatrices $X = \mathbb{1}_A$, $A \in \mathcal{A}$, et les fonctions étagées $X = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbb{1}_{A_k}$, $c_k \in \mathbb{R}^*$ et $A_k \in \mathcal{A}$, $k = 1, \ldots, n$, disjoints.

Il est aussi important de rappeler que la propriété de mesurabilité est stable par composition. Ainsi, par exemple, si $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est une variable aléatoire réelle et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne (donc mesurable pour les tribus boréliennes sur l'espace de départ et celui d'arrivée), alors $\phi(X)$ est encore une variable aléatoire (sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs réelles). Ainsi $\cos(X)$, $e^X$, $X^5$... sont des variables aléatoires réelles.

Pour la clarté et la souplesse de la réflexion à venir, il vaut la peine de souligner, étant donné une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{B})$ et $B \in \mathcal{B}$, l'identité

$$\mathbb{1}_{\{X \in B\}} \, = \, \mathbb{1}_B(X) \, = \, \mathbb{1}_B \circ X$$

au sens où, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\mathbb{1}_{\{X \in B\}}(\omega) \, = \, \mathbb{1}_B\big(X(\omega)\big)$$

(puisque $\omega \in \{X \in B\}$ signifie $X(\omega) \in B$).

# 3 Loi de variable aléatoire

Ce paragraphe constitue l'un des cœurs de la pensée probabiliste. Il présente comment une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (abstrait) induit une probabilité (concrète) sur un espace mesurable $(E, \mathcal{B})$ à travers l'opération de mesure image.

**Définition 2** (Loi de variable aléatoire)**.** *La loi d'une variable aléatoire $X$, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{B})$,*

$$X \; : \; (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \; \to \; (E, \mathcal{B}),$$

*est la mesure image de $\mathbb{P}$ par $X$, notée $\mathbb{P}_X$, définie par*

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}\big(X^{-1}(B)\big) = \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega\,;\, X(\omega) \in B\}\big), \quad B \in \mathcal{B}.$$

La loi d'une variable aléatoire pourra aussi être appelée *distribution*. D'autres notations pour $\mathbb{P}_X$ incluent $\mathbb{P} \circ X^{-1}$ ou $X\#P$, mais il sera plus simple d'en rester à l'écriture $\mathbb{P}_X$ (même si elle n'est pas optimale pour toutes les opérations envisagées).

La notation de la définition sera souvent allégée

$$\mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega\,;\, X(\omega) \in B\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X \in B\}\big) = \mathbb{P}(X \in B),$$

la disparition de $\omega$ et des accolades n'étant pas toujours bienvenue, mais l'assimiler participe à la compréhension de la définition d'une loi, en particulier du rôle à la fois fondamental et discret (au sens de « discrétion ») de l'espace probabilisé sous-jacent $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

La loi d'une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{B})$ est donc une mesure de probabilité $\mathbb{P}_X$ sur un espace « concret » $(E, \mathcal{B})$, comme par exemple $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. En tant que mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, elle pourra par exemple être discrète, ou à densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Ce point de vue conduit à reconsidérer les exemples classiques (Leçon 7) de mesures de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ comme des lois de variables aléatoires. Il sera ainsi question de variables aléatoires de Bernoulli, binomiale, de Poisson, géométrique, uniforme, exponentielle ou encore normale. La terminologie conduit en outre à transformer « mesure de probabilité » en *loi de probabilité*, et à parler de variables aléatoires de loi de Bernoulli, de Poisson, exponentielle etc., voire simplement variables de Bernoulli, de Poisson, exponentielle etc. Il sera dit en corollaire qu'une variable aléatoire « suit » une loi donnée, de Bernoulli, de Poisson, exponentielle etc.

Par exemple, une variable aléatoire $X$ sera dite de Bernoulli sur $\{0, 1\}$ de paramètre $p \in ]0, 1[$ si sa loi $\mathbb{P}_X$ est la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ (sur $\{0, 1\}$, de paramètre $p \in ]0,1[$). De plus, il sera suggestif de la décrire simplement sous la forme

$$\mathbb{P}(X=1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X=0) = 1-p$$

(puisque $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}_X(\{1\})$ et $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}_X(\{0\})$) qui concentre d'un même coup toutes les caractéristiques. De façon alternative, et tout aussi suggestive,

$$X = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité} \quad p, \\ 0 & \text{avec probabilité} \quad 1-p. \end{cases}$$

Ce petit exemple est l'occasion de deux remarques importantes. La première, déjà mentionnée dans la Leçon 7, est qu'une variable de Bernoulli est à valeurs dans $\{0,1\}$ (muni de la $\sigma$-algèbre des parties) et qu'il n'est pas besoin de la considérer à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ce dernier ensemble ayant simplement l'avantage de pouvoir placer dans le même cadre une foule d'exemples).

La seconde est plus fondamentale. Tout d'abord, l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ n'est donc pas précisé dans cette définition de variable de Bernoulli, et l'esprit mathématique en éprouvera quelque frustration. Mais qu'à cela ne tienne : prendre $\Omega = \{0,1\}$ muni de la $\sigma$-algèbre $\mathcal{A}$ des parties et de la probabilité $\mathbb{P} = p\delta_1 + (1-p)\delta_0$ de Bernoulli. Alors, la variable identité

$$\omega \in \Omega = \{0,1\} \mapsto X(\omega) = \omega$$

a nécessairement pour loi $p\delta_1 + (1-p)\delta_0$ puisque pour tout $B \in \mathcal{A}$,

$$\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega\,;\, X(\omega) \in B\}\big) = \mathbb{P}(B).$$

Mais cette observation va au delà. En effet, rien n'empêche de considérer un « autre » espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, comme par exemple $\Omega = [0,1]$ muni de la tribu des boréliens (restriction de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ à $[0,1]$) et de la probabilité $\mathbb{P} = \lambda$ mesure de Lebesgue. Alors, la variable aléatoire

$$\omega \in \Omega = [0,1] \mapsto X(\omega) = \mathbb{1}_{[0,p]}(\omega)$$

sur cet espace (et à valeurs dans $\{0,1\}$) aura aussi pour loi la probabilité de Bernoulli $p\delta_1 + (1-p)\delta_0$. En effet,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in 1) &= \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega\,;\, X(\omega) = 1\}\big) \\ &= \lambda\big(\{\omega \in [0,1]\,;\, \mathbb{1}_{[0,p]}(\omega) = 1\}\big) \\ &= \lambda\big([0,p]\big) \,=\, p\end{aligned}$$

et de la même façon

$$\mathbb{P}(X = 0) \,=\, \lambda\big(\,]p,1]\big) \,=\, 1-p,$$

de sorte que $X$ suit bien la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

En conclusion, des variables aléatoires différentes, construites sur des espaces différents et donc sans comparaison, peuvent avoir la même loi, leur trait commun étant l'espace de leurs valeurs $(E,\mathcal{B})$ et le fait qu'elle pousse la probabilité abstraite $\mathbb{P}$ en la loi donnée. Il sera souvent question de variables aléatoires $X$, à valeurs dans $(E,\mathcal{B})$, de loi donnée, sans que l'espace probabilisé sous-jacent $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ soit même mentionné. Si $X$ est une variable aléatoire de loi $P$ sur $(E,\mathcal{B})$, il est en fait toujours possible de la réaliser sur $\Omega = E$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\mathbb{P} = P$, comme la variable identité de $E$ dans $E$ pour laquelle clairement $\mathbb{P}_X = P$. (En conséquence, l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ devra avoir au moins cette richesse.)

Des variables aléatoires de même loi pourront être dites « équidistribuées ».

## 4 Variable aléatoire définie presque sûrement

Pour commencer ce paragraphe, il peut être rappeler que la loi d'une variable aléatoire réelle, en tant que mesure sur un espace métrique, a un support, qui est une partie fermée de $\mathbb{R}$ (Exercice 5, Leçon 2). Par exemple, la loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha)$ a pour support $[0,\infty[$.

Il peut aussi être signalé que si $B$ est une partie mesurable d'un espace $(E,\mathcal{B})$, toute variable aléatoire $X : (\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) \to (E,\mathcal{B})$ à valeurs presque sûrement dans $B$, i.e. $\mathbb{P}(X \in B) = 1$, est aussi une variable aléatoire à valeurs dans $B$ muni de la tribu trace $\mathcal{B} \cap B$. Sa loi $\mathbb{P}_X$ définit donc une mesure de probabilité sur $(B, \mathcal{B} \cap B)$. Réciproquement, si $X$ est à valeurs dans $B \in \mathcal{B}$, elle est aussi à valeurs dans $E$, et sa loi est aussi une mesure de probabilité sur $(E, \mathcal{B})$. Par exemple, une variable aléatoire à valeurs entières est aussi une variable aléatoire réelle. Ces observations traduisent simplement, dans le langage des variables aléatoires, les opérations de restriction et d'extension de mesures décrites dans la Leçon 2.

Une situation concrète de restriction intervient souvent lorsqu'une variable aléatoire, réelle par exemple, sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ n'est pas définie pour tous les $\omega \in \Omega$, mais seulement en dehors d'un ensemble de mesure nulle.

Un premier exemple, un peu extrême, consiste à examiner $Y = \frac{1}{X+1}$ pour $X$ une variable aléatoire de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ sur $\{0, 1\}$ vue comme variable aléatoire réelle. Bien entendu, $Y(\omega)$ n'est pas défini si $X(\omega) = -1$, mais cette situation est improbable car $\mathbb{P}(X \in \{0, 1\}) = 1$. En fait

$$\mathbb{P}\big(Y = \tfrac{1}{2}\big) \,=\, p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y = 1) \,=\, 1 - p,$$

et il n'y a donc aucune difficulté à considérer $Y$ (à valeurs dans $\{\frac{1}{2}, 1\}$) et à déterminer sa loi.

Une autre situation, fréquente, a trait à une variable aléatoire réelle $X$ de loi $\mathbb{P}_X$ de densité $f$ par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda$ sur $\mathbb{R}$, donc telle que

$$\mathbb{P}(X \in B) \,=\, \mathbb{P}_X(B) \,=\, \int_B f\, d\lambda, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

pour laquelle se pose la question de savoir si $Y = \frac{1}{X}$ a un sens ? La variable aléatoire $Y$ est a priori à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, mais comme la loi de $X$ a une densité,

$$\mathbb{P}(X = 0) \,=\, \int_{\{0\}} f\, d\lambda \,=\, 0$$

(car $\lambda(\{0\}) = 0$). Ainsi $Y$ est en fait presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{R}$ puisque $\mathbb{P}(Y = \pm\infty) = \mathbb{P}(X = 0) = 0$. De façon rigoureuse, il conviendrait de travailler avec la variable aléatoire $Y' = \frac{1}{X}\,\mathbb{1}_{\{X\neq 0\}}$, définie pour tout $\omega \in \Omega$, pour laquelle, pour tout borélien $B$ de $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(Y' \in B) \,=\, \mathbb{P}\Big(\frac{1}{X} \in B, X \neq 0\Big) \,=\, \mathbb{P}(Y \in B)$$

puisque $\mathbb{P}(X = 0) = 0$. Autrement dit, la variable aléatoire $Y'$, bien définie, est égale presque sûrement à $Y$.

En résumé, ce type de raisonnements et d'extensions sera employé assez librement dans l'ensemble des leçons. Il s'étend à toute sorte de situations. Une variable aléatoire réelle pourra être dite presque sûrement positive, signifiant $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$, et donc considérée en fait positive partout. Réciproquement, positive ou bornée pourra signifier positive presque sûrement ou bornée presque sûrement. Ou encore une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha)$ sera considérée indifféremment sur $]0, \infty[$ ou $[0, \infty[$ (même si son support est $[0, \infty[$), tout comme les lois uniformes $\mathcal{U}(a, b)$ sur l'intervalle $(a, b)$ ouvert, fermé, semi-ouvert.

# 5 Vecteur aléatoire

La définition de variable aléatoire présentée dans les paragraphes précédents couvre la situation générale de variables à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{B})$ quelconque. Le cas de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est bien entendu un exemple particulier privilégié, couvert par la terminologie de variable aléatoire réelle. Ce paragraphe décrit la situation de $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, $d \geq 1$. Une variable aléatoire à valeurs complexes s'interprète de façon mesurable comme un « couple aléatoire » à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

**Définition 3** (Vecteur aléatoire)**.** *Un vecteur aléatoire est une variable aléatoire*

$$X \,:\, (\Omega, \mathcal{A}) \,\to\, (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$$

*à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. À ce titre, il a des composantes (coordonnées) $X = (X_1, \dots, X_d)$, et $X$ est mesurable (est une variable aléatoire) si et seulement si chacune des applications coordonnées $X_1, \dots, X_d$ est une variable aléatoire réelle.*

L'équivalence de la définition est une conséquence de la forme produit $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ des tribus boréliennes. En effet, si $B = B_1 \times \cdots \times B_d$ est un pavé mesurable de $\mathbb{R}^d$,

$$X^{-1}(B) \,=\, X_1^{-1}(B_1) \cap \cdots \cap X_d^{-1}(B_d).$$

Si $X$ est mesurable, il suffit de choisir $B_2 = \cdots = B_d = \mathbb{R}$ pour vérifier que $X_1$ est mesurable, et de la même façon les autres coordonnées. Si chaque $X_k$, $k = 1, \dots, d$, est mesurable, $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ pour tout pavé $B$, ce qui suffit à assurer la mesurabilité de $X$ d'après la Proposition 7, Leçon 1, puisque $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les pavés.

La loi $\mathbb{P}_X$ d'un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_d)$ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Le schéma précédent montre que la connaissance de $\mathbb{P}_X$ détermine les lois de toutes les applications coordonnées, appelées *lois marginales*. En effet, si $B = B_1 \times \cdots \times B_d$ est un pavé mesurable de $\mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in B) \,&=\, \mathbb{P}\big((X_1, \dots, X_d) \in B_1 \times \cdots \times B_d\big)\\ &=\, \mathbb{P}\big(\{X_1 \in B_1\} \cap \cdots \cap \{X_d \in B_d\}\big),\end{aligned}$$

expression pour laquelle la notation simplifiée

$$\mathbb{P}(X \in B) \,=\, \mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_d \in B_d)$$

sera privilégiée. Si $B_2 = \cdots = B_d = \mathbb{R}$, il découle que $\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1)$, déterminant donc la loi de $X_1$, et de même pour les autres coordonnées. En conclusion

**Proposition 4.** *La loi d'un vecteur aléatoire détermine les lois marginales. (La réciproque est fausse en général.)*

Par opposition avec les lois marginales, la loi du vecteur $X = (X_1, \ldots, X_d)$ sera parfois appelée « loi jointe » des variables $X_1, \ldots, X_d$.

Dans la pratique, comment décrire les lois marginales à partir de la loi du vecteur ? Cette question est l'occasion de décrire les lois de quelques vecteurs aléatoires, et d'opérer avec elles.

Supposer par exemple que $X = (X_1, X_2)$ est un vecteur (couple) aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que

$$\mathbb{P}\big((X_1, X_2) = (n_1, n_2)\big) \,=\, \mathbb{P}(X_1 = n_1, X_2 = n_2) \,=\, p_{n_1,n_2}$$

avec donc $(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $p_{n_1,n_2} \geq 0$, $\sum_{(n_1,n_2) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}} p_{n_1,n_2} = 1$. La loi de $X_1$ (à valeurs dans $\mathbb{N}$) s'obtient alors simplement en sommant les probabilités $p_{n_1,n_2}$ suivant la seconde coordonnée $n_2$ puisque, pour tout $n_1 \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = n_1) \,&=\, \mathbb{P}\bigg(\{X_1 = n_1\} \cap \bigcup_{n_2 \in \mathbb{N}} \{X_2 = n_2\}\bigg) \\
&=\, \mathbb{P}\bigg(\bigcup_{n_2 \in \mathbb{N}} \{X_1 = n_1\} \cap \{X_2 = n_2\}\bigg) \\
&=\, \sum_{n_2 \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X_1 = n_1, X_2 = n_2) \\
&=\, \sum_{n_2 \in \mathbb{N}} p_{n_1,n_2}.
\end{aligned}$$

En effet, $X_2$ étant à valeurs dans $\mathbb{N}$, la famille $\{X_2 = n_2\}$, $n_2 \in \mathbb{N}$, forme un système complet d'événements, les identités précédentes découlant alors de la définition d'une mesure. Par symétrie,

$$\mathbb{P}(X_2 = n_2) \,=\, \sum_{n_1 \in \mathbb{N}} p_{n_1,n_2}, \quad n_2 \in \mathbb{N}.$$

De la même manière, si la loi $\mathbb{P}_X$ du couple aléatoire $X = (X_1, X_2)$ a une densité $f = f(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, par rapport à la mesure de Lebesgue (sur

$\mathbb{R}^2$), la loi de $X_1$ a pour densité

$$f_1(x_1) = \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2) d\lambda(x_2), \quad x_1 \in \mathbb{R},$$

et de façon symétrique pour la loi de $X_2$.

Comme annoncé dans l'énoncé de la proposition, si la loi d'un vecteur aléatoire détermine les lois marginales, la réciproque est fausse en général, et de nombreux exemples seront mis en évidence dans les prochaines leçons. À ce stade, il est possible de mentionner l'exemple élémentaire des couples $X = (X_1, X_2)$ et $Y = (Y_1, Y_2)$ de densités respectives (et différentes !) $f(x_1, x_2) = \frac{3}{4}(x_1 + x_2)^2$ et $g(x_1, x_2) = \frac{3}{4}(x_1^2 + x_2^2)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[-1, +1]^2$ pour lesquels il est immédiat de vérifier, sur les formules précédentes, que $X_1$ et $Y_1$ ont même loi et $X_2$ et $Y_2$ ont même loi.

# Exercices corrigés

(*Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.*)

**Exercice 1.** Un jet de deux dés est modélisé par l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{36}\,\mathrm{Card}(A)$. Le premier dé sera la variable aléatoire $X : \Omega \to E$, $E = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{B} = \mathcal{P}(E)$, définie par $X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1$.

a) Quelle la mesure image $\mathbb{P}_X$ de $\mathbb{P}$ par $X$ ?

b) Si $\phi : E \to \mathbb{R}$, expliciter les deux intégrales $\int_\Omega \phi \circ X d\mathbb{P}$ et $\int_E \phi \, d\mathbb{P}_X$.

**Exercice 2.** Soit $X$ une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\big(X \geq m + n \,|\, X \geq n\big) \;=\; \mathbb{P}(X \geq m).$$

(On dit que $X$ est « sans mémoire ».) En supposant que $\mathbb{P}(X = 1) = a$, déterminer la loi de $X$. Même question si $X$ est une variable aléatoire à valeurs réelles positives telle que

$$\mathbb{P}\big(X > s + t \,|\, X > t\big) \;=\; \mathbb{P}(X > s), \quad s, t > 0.$$

**Exercice 3.** Soit $Y$ une variable aléatoire de loi uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 5]$. Quelle est la probabilité que les racines de l'équation

$$x^2 + (Y + 2)x + Y + 3 \;=\; 0$$

en la variable $x \in \mathbb{R}$ soient réelles ?

**Exercice 4.** Soit $X$ une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(2n, \frac{1}{2})$ ; déterminer la loi de $Y = |X - n|$.

**Exercice 5.** Soit $X$ une variable aléatoire, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ de paramètre $p \in ]0,1[$ ; calculer $p_n(t) = \mathbb{P}(X > nt)$, $t \geq 0$, $n \geq 1$. Pour $p = \frac{1}{n}$, $n \geq 2$, $t \geq 0$, étudier la limite de $p_n(t)$ lorsque $n \to \infty$.

**Exercice 6.** Soit la fonction

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0, \\ \frac{t}{1+t} & \text{si} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

a) Tracer $F$ et démontrer que c'est une fonction de répartition.

b) Expliquer pourquoi $F$ est la fonction de répartition d'une unique mesure de probabilité $P$ sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$.

On désigne par $X$ une variable aléatoire réelle, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de loi $P$.

c) Décrire un espace probabilisé possible.

d) Soit $Y = X \mathbb{1}_{\{X \leq 3\}}$ ; justifier que $Y$ est une variable aléatoire ; dans quel ensemble prend-elle ses valeurs ? Décrire et tracer la fonction de répartition $F_Y(t) = \mathbb{P}_Y(]-\infty, t]) = \mathbb{P}(Y \leq t)$, $t \in \mathbb{R}$, de la loi $\mathbb{P}_Y$ de $Y$.

e) Exprimer $\mathbb{P}_Y$ sous la forme d'une combinaison d'une mesure discrète et d'une mesure admettant une densité.

**Exercice 7.** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi jointe du couple $(X, Y)$ est donnée par

$$\mathbb{P}\big((X,Y) = (k,\ell)\big) = \frac{c}{k!\,\ell!}\,, \quad (k,\ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

où $c \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer la valeur de $c$. Reconnaître les lois marginales de $X$ et $Y$.

b) Mêmes questions si à présent $\mathbb{P}((X,Y) = (k,\ell)) = \frac{c(k+\ell)}{2^{k+\ell}}$, $(k,\ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

**Exercice 8.** Le couple aléatoire $(X, Y)$ défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suit la loi uniforme sur le carré $[-1, +1]^2$. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(\frac{1}{2} < X^2 + Y^2 < 1)$.

**Exercice 9** (*Loi du demi-cercle*). Un couple aléatoire $(X, Y)$ est uniformément réparti sur le disque unité

$$\mathcal{D} \,=\, \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + y^2 \leq 1\big\}$$

de $\mathbb{R}^2$.

a) Décrire la densité de la loi de $(X, Y)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

b) Calculer $\mathbb{P}(X \geq \frac{1}{\sqrt{2}})$. (*Indications* : faire un dessin ; $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.)

c) Démontrer que la loi de $X$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue que l'on identifiera.

**Exercice 10*.** Pour un entier $n \geq 1$, et pour $1 \leq k \leq n$, soit

$$\Omega \,=\, \Omega_k \,=\, \bigg\{x \in \{0, 1\}^n\,;\, \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell = k\bigg\}.$$

L'espace $\Omega$ est muni de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ des parties de $\Omega$ et de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. Le vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_n)$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ réprésente les composantes d'un élément de $\Omega$.

Vérifier que, pour tout $\ell = 1, \ldots, n$, $X_\ell$ suit une loi de Bernoulli. Démontrer que, pour tous $j, \ell = 1, \ldots, n$ distincts, $(X_j, X_\ell)$ a même loi que $(X_1, X_2)$. (*Indication* : observer que $\sum_{\ell=1}^{n} X_\ell = k$.)