Leçon 3 Exercices corrigés

(*Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.*)

Exercice 1. Démontrer que si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré et $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable positive, l'application

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu = \int_X (\mathbb{1}_A f) d\mu, \quad A \in \mathcal{A},$$

est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$. Elle vérifie en outre que $\nu(A) = 0$ si $\mu(A) = 0$.

Corrigé. Soit une famille A_n, $n \in \mathbb{N}$, d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints ; pour tout $N \geq 1$, par disjonction et linéarité (relation de Chasles),

$$\int_X \left(\mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^N A_n} f\right) d\mu = \int_X \left(\sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{A_n}\right) f \, d\mu = \sum_{n=1}^N \int_X (\mathbb{1}_{A_n} f) d\mu.$$

Lorsque $N \to \infty$, le théorème de convergence monotone permet d'affirmer que $\lim_{N\to\infty} \int_X \left(\mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^N A_n} f\right) d\mu = \int_X \left(\mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} f\right) d\mu$ de sorte que

$$\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n),$$

ce qu'il fallait démontrer. (Le dernier argument ne fait que développer ceux conduisant au Corollaire 4 sur le théorème de convergence monotone pour les séries.) Si $\mu(A) = 0$, la fonction $\mathbb{1}_A f$ est nulle μ-presque partout (l'ensemble où f n'est pas nulle est contenue dans A). Donc $\nu(A) = \int_X (\mathbb{1}_A f) d\mu = 0$.

Exercice 2 (*Continuité de l'intégrale au voisinage de la partie vide.*) Soit f une fonction intégrable sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $A \in \mathcal{A}$ vérifie $\mu(A) \leq \eta$, alors $\int_A |f| d\mu \leq \varepsilon$.

Corrigé. Par convergence monotone ou dominée, il existe $t > 0$ tel que $\int_{\{|f|>t\}} |f| d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, par la relation de Chasles et la conservation de l'ordre,

$$\begin{aligned}\int_A |f| d\mu &= \int_{A \cap \{|f| \leq t\}} |f| d\mu + \int_{A \cap \{|f|>t\}} |f| d\mu \\ &\leq t\, \mu\big(A \cap \{|f| \leq t\}\big) + \int_{\{|f|>t\}} |f| d\mu \\ &\leq t\, \mu(A) + \int_{\{|f|>t\}} |f| d\mu \\ &\leq t\, \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2}\,.\end{aligned}$$

Si $\eta = \frac{\varepsilon}{2t}$, l'affirmation s'ensuit.

Exercice 3. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré fini, et soit $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable ; démontrer que les quatre assertions suivantes sont équivalentes : (i) f est intégrable par rapport à μ ; (ii) $\lim_{n\to\infty} \int_{\{|f|\geq n\}} |f| d\mu = 0$; (iii) $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\, \mu(n \leq |f| < n+1) < \infty$; (iv)* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(|f| \geq n) < \infty$.

Corrigé. Si f est intégrable, d'après les théorèmes de convergence monotone ou dominée, $\lim_{n\to\infty} \int_{\{|f|\geq n\}} |f| d\mu = 0$. Réciproquement, si cette limite est nulle, il existe n tel que $\int_{\{|f|\geq n\}} |f| d\mu \leq 1$ (par exemple). Mais alors, par la relation de Chasles,

$$\int_X |f| d\mu = \int_{\{|f|<n\}} |f| d\mu + \int_{\{|f|\geq n\}} |f| d\mu \leq n\mu\big(|f| < n\big) + 1$$

qui est fini car μ est finie. L'équivalence entre (i) et (iii) est une comparaison entre intégrale et série, à nouveau à travers l'identité de Chasles :

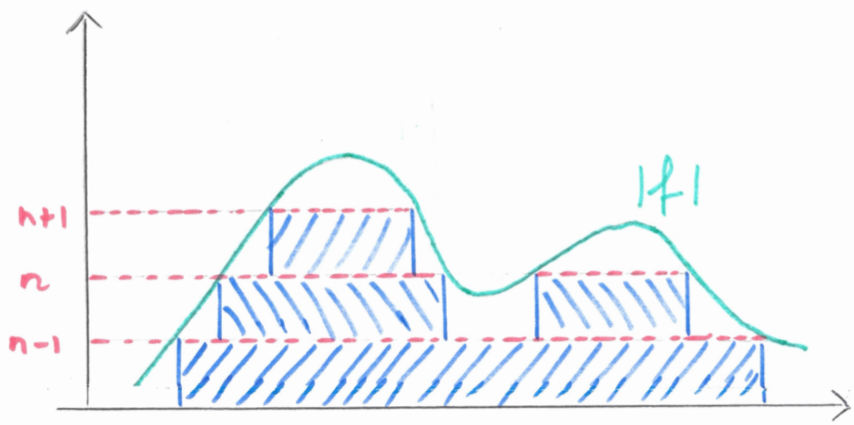
$$\begin{aligned}
\int_X |f| d\mu &= \sum_{n\geq 0} \int_{\{n\leq |f|<n+1\}} |f| d\mu \\
&\leq \sum_{n\geq 0} (n+1)\,\mu\big(n \leq |f| < n+1\big) \\
&\leq \mu\big(\{|f|<1\}\big) + 2\sum_{n\geq 1} n\,\mu\big(n\leq |f| < n+1\big)
\end{aligned}$$

Donc si la série converge, f est intégrable, et la réciproque est identique par comparaison inférieure. Pour l'équivalence avec (iv), pour tout $N \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \mu\big(|f| \geq n\big) &= \sum_{n=1}^{N} \sum_{k\geq n} \mu\big(k \leq |f| < k+1\big) \\
&= \sum_{k\geq 1} \sum_{n=1}^{\min(N,k)} \mu\big(k\leq |f| < k+1\big) \\
&= \sum_{k\geq 1} \min(N,k)\,\mu\big(k \leq |f| < k+1\big).
\end{aligned}$$

Quand $N \to \infty$, l'équivalence (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) en découle.

Les séries du type (iv) approchent l'intégrale $\int_X |f| d\mu$ suivant un schéma horizontal qui s'oppose à la sommation de rectangles verticaux dans l'intégrale de Riemann. Plutôt en effet que d'additionner des surfaces de rectangles dont les bases sont définies à l'aide d'une subdivision initiale et les hauteurs réprésentant les valeurs successives de $|f|$, une sommation $\sum_{n=1}^{\infty} \mu\big(|f| \geq n\big)$ collecte les rectangles suivant des hauteurs pré-déterminées et des bases correspondant aux ensembles où $|f|$ est de plus en plus grande.



Exercice 4 (*Lemme de Scheffé*[1]). Soient f_n, $n \in N$, f des fonctions positives intégrables sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$ telles que $f_n \to f$ μ-presque partout et $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$. Démontrer que

$$\lim_{n \to 0} \int_X |f_n - f| d\mu = 0.$$

(Il pourra être établi pour commencer que $\lim_{n\to\infty} \int_X (f - f_n)^+ d\mu = 0$.)

Corrigé. Comme, par continuité, $(f - f_n)^+ \to 0$ μ-presque partout, et $(f - f_n)^+ \leq f$, $n \in \mathbb{N}$, le théorème de convergence dominée indique que $\lim_{n\to\infty} \int_X (f - f_n)^+ d\mu = 0$. Pour tout nombre réel a, $|a| = 2a^+ - a$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_X |f - f_n| d\mu = 2 \int_X (f - f_n)^+ d\mu - \int_X (f - f_n) d\mu.$$

La conclusion s'ensuit d'après ce qui précède et les hypothèses.

1. Henry Scheffé, statisticien américain (1907–1977).

Exercice 5. Démontrer à l'aide du théorème de convergence dominée que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n = e^z.$$

Indications : utiliser la mesure de comptage sur $\mathbb{N} \cup \{0\}$; développer $\big(1 + \frac{z}{n}\big)^n$ par la formule du binôme, et identifier une suite de fonctions f_n (sur $\mathbb{N} \cup \{0\}$) et sa limite f.)

Corrigé. Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé dans la suite ; en suivant les indications,

$$\Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!n^k} \, \frac{z^k}{k!} \, .$$

Soit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n la fonction sur $\mathbb{N} \cup \{0\}$ définie par

$$f_n(k) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!n^k} \, \frac{z^k}{k!} & \text{si} \quad 0 \leq k \leq n, \\ \qquad 0 & \text{si} \quad k > n, \end{cases}$$

de sorte que, si μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n = \int_{\mathbb{N}\cup\{0\}} f_n \, d\mu.$$

Pour chaque k fixé, $\lim_{n\to\infty} f_n(k) = \frac{z^k}{k!} = f(k)$. Par ailleurs, $|f_n(k)| \leq \frac{|z|^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, en module, de sorte que la suite f_n, $n \in \mathbb{N}$, est uniformément dominée par la fonction $\frac{|z|^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, intégrable par rapport à la mesure de comptage sur $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Par application du théorème de convergence dominée pour des fonctions à valeurs complexes (c'est-à-dire simplement ce théorème sur les parties réelle et imaginaire),

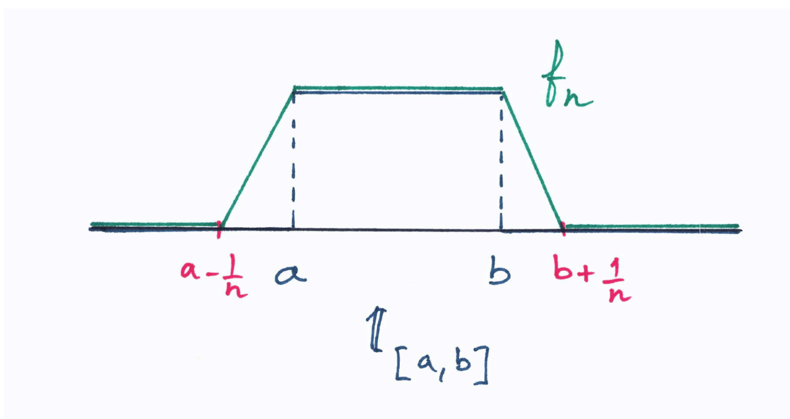
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}\cup\{0\}} f_n \, d\mu = \int_{\mathbb{N}\cup\{0\}} f \, d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

C'est la conclusion annoncée.

Exercice 6. Soient μ et ν deux mesures finies sur la σ-algèbre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boréliens de $\mathbb{R}$; démontrer que si $\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \int_{\mathbb{R}} f d\nu$ pour toute fonction continue bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors $\mu = \nu$. (*Indication* : approcher l'indicatrice $\mathbb{1}_{[a,b]}$ par une fonction continue bornée.)

Corrigé. Si $a < b$, poser pour tout $n \geq 1$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq a - \frac{1}{n}, \\ n(x-a)+1 & \text{si} \quad a - \frac{1}{n} < x < a, \\ 1 & \text{si} \quad a \leq x \leq b, \\ -n(x-b)+1 & \text{si} \quad b < x < b + \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{si} \quad x \geq b + \frac{1}{n}. \end{cases}$$



La fonction f_n est continue et bornée (par 1). Par construction,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu = \mu\big([a,b]\big) + \int_{]a-\frac{1}{n},a[} \big[n(x-a)+1\big] d\mu + \int_{]b,b+\frac{1}{n}[} \big[-n(x-b)+1\big] d\mu.$$

Or

$$\left| \int_{]a-\frac{1}{n},a[} \big[n(x-a)+1\big] d\mu \right| \leq \int_{]a-\frac{1}{n},a[} \big|n(x-a)+1\big| d\mu \leq \mu\big(\,]a-\tfrac{1}{n},a[\big)$$

qui tend vers 0 quand $n \to \infty$ (car la famille d'intervalles $]a - \frac{1}{n}, a[$, $n \geq 1$, décroît vers la partie vide et μ est finie). Par le même raisonnement sur les intervalles $]b, b + \frac{1}{n}[$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu \;=\; \mu\big([a,b]\big).$$

Avec la propriété correspondante le long de la mesure ν, il s'ensuit que $\mu([a,b]) = \nu([a,b])$ pour tout intervalle $[a,b]$, $a < b$. La tribu borélienne étant engendrée par les intervalles, la propriété d'unicité dans le théorème de Carathéodory (Théorème 5, Leçon 2) assure que $\mu = \nu$.

Exercice 7. Soient les fonctions $u(x) = \mathbb{1}_{\{\frac{1}{n};\, n\geq 1\}}(x)$ et $v(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$; discuter de la véracité des assertions suivantes :

(i) La fonction u est continue partout sauf sur un ensemble dénombrable de points. Comme ce dernier est de mesure de Lebesgue nulle, u est presque partout continue, et donc intégrable au sens de Riemann.

(ii) La fonction v est continue partout sauf sur l'ensemble $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Comme ce dernier est de mesure de Lebesgue nulle, v est presque partout continue, et donc intégrable au sens de Riemann.

(iii) Les fonctions u et v sont intégrables au sens de Lebesgue et $\int_{\mathbb{R}} u d\lambda = \int_{\mathbb{R}} v d\lambda = 0$.

(iv) La fonction v n'est pas intégrable au sens de Riemann.

Indications. Appliquer les propriétés et théorèmes de la leçon.

Exercice 8. Soit $f_n = \frac{1}{n^3} \mathbb{1}_{[1,n]}$, $n \geq 1$; existe-t-il une fonction intégrable positive h (pour la mesure de Lebesgue sur $[1, \infty[$) telle que $f_n \leq h$, $n \geq 1$? Même question pour $f_n = \frac{1}{n \ln(n)} \mathbb{1}_{[1,n]}$, $n \geq 2$.

Exercice 9. Étudier les limites quand n tend vers l'infini de

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n}\, e^{-x}\cos(x)dx\,; \qquad \int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n}\, dx\,; \qquad \int_1^\infty \frac{1+nx}{(1+x)^n}\, dx.$$

Exercice 10 (*Fonction Gamma*). Soit $\Gamma(p) = \int_{]0,\infty[} x^{p-1}e^{-x}d\lambda(x)$, $p > 0$, la fonction Gamma. Démontrer que Γ est continue, indéfiniment dérivable, et calculer sa dérivée n-ième. Montrer que l'on a $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$ pour tout $p > 0$, et en déduire l'expression de $\Gamma(n+1)$ lorsque $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. Dans cet exercice, $(X, \mathcal{B}, \lambda)$ est l'espace mesuré défini par $X =]0,\infty[$, $\mathcal{B}$ la tribu borélienne sur X et λ la mesure de Lebesgue. Soit la fonction

$$f(t) = \int_X e^{-x^2-\frac{t}{x^2}}d\lambda(x).$$

Quel est le domaine de définition de f ? Démontrer que f est continue sur $[0,\infty[$, dérivable sur $]0,\infty[$. Établir que pour tout $t > 0$, $f'(t) = -\frac{1}{\sqrt{t}}\, f(t)$. En déduire l'expression de $f(t)$.

Exercice 12. Soit la fonction $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\,]0,\infty[, \mathcal{B}(]0,\infty[))$ définie par $f(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Décrire l'image de la mesure de Lebesgue λ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par la fonction $f(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Corrigé. La mesure image λ_f est portée par $]0,\infty[$ (car f y prend ses valeurs). Soit $]a,b]$ un intervalle de $]0,\infty[$; par définition de mesure image,

$$\lambda_f\big(]a,b]\big) = \lambda\big(\{x \in X\,;\, a < e^{-x} \le b\}\big) = \ln(b) - \ln(a).$$

Comme

$$\ln(b) - \ln(a) = \int_a^b \frac{1}{x}\, dx = \int_{]a,b]} \frac{1}{x}\, d\lambda$$

(au sens de Riemann ou de Lebesgue), la mesure λ_f coïncide, sur tous les intervalles $]a,b]$, $0 < a < b < \infty$, avec la mesure de densité $\frac{1}{x}$, $x \in]0,\infty[$, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Par l'unicité dans le théorème de Carathéodory (Théorème 4, Leçon 2), ces deux mesures sont identiques.

Exercice 13* (*Méthode de Laplace*[2]). Soit f une fonction positive de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,+1]$ dont le maximum (global) est atteint uniquement en 0, et telle que $f(0)=1$ et $f''(0)<0$.

a) En utilisant une formule de Taylor, démontrer que pour tout $0<\varepsilon<-f''(0)$, il existe $\eta>0$ tel que pour tout $x\in[-\eta,+\eta]$,

$$1+\Big(f''(0)-\frac{\varepsilon}{2}\Big)\frac{x^2}{2} \;\le\; f(x) \;\le\; 1+\Big(f''(0)+\frac{\varepsilon}{2}\Big)\frac{x^2}{2}$$

b) En faisant usage des inégalités élémentaires $e^{u-u^2}\le 1+u\le e^u$ pour $u\ge -\frac{1}{2}$, en déduire que pour tout $x\in[-\eta,+\eta]$,

$$e^{\frac{1}{2}(f''(0)-\varepsilon)x^2} \;\le\; f(x) \;\le\; e^{\frac{1}{2}(f''(0)+\varepsilon)x^2}.$$

c) Démontrer l'équivalence, pour $r\to\infty$,

$$\int_{[-1,+1]} f^r d\lambda \;\sim\; \sqrt{\frac{2\pi}{-rf''(0)}}\,.$$

(Décomposer l'intégrale sur $[-\eta,+\eta]$ et son complémentaire.)

d) Application à la fonction Gamma d'Euler Γ. Démontrer que, pour tout $p>0$,

$$\Gamma(p+1) \;=\; p^{p+1}e^{-p}\int_{[-1,\infty[}(x+1)^p e^{-px}d\lambda.$$

En appliquant c) (étendu à $[-1,\infty[$), déduire l'équivalent quand $p\to\infty$ (*formule de Stirling*[3])

$$\Gamma(p+1) \;\sim\; \sqrt{2\pi p}\,p^p\,e^{-p}.$$

2. Pierre-Simon de Laplace, mathématicien, astronome, physicien et homme politique français (1749–1827).

3. James Stirling, mathématicien écossais (1692–1770).

Corrigé. a) Comme f'' est continue sur $[-1,+1]$, il existe $\eta > 0$ tel que $|f''(x) - f''(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $x \in [-\eta, +\eta]$. D'après la formule de Taylor à l'ordre 2 avec reste intégral,

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \int_0^x (x-u) f''(u) du \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} f''(0) + \int_0^x (x-u)\big[f''(u) - f''(0)\big] du \end{aligned}$$

(où il a été utilisé que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$). Ainsi

$$1 + \Big(f''(0) - \frac{\varepsilon}{2}\Big)\frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq 1 + \Big(f''(0) + \frac{\varepsilon}{2}\Big)\frac{x^2}{2}$$

pour tout $x \in [-\eta, +\eta]$. b) Pour utiliser les inégalités élémentaires $e^{u-u^2} \leq 1+u \leq e^u$ pour $u \geq -\frac{1}{2}$, choisir également $\eta > 0$ de sorte que $(f''(0) - \frac{\varepsilon}{2})\frac{x^2}{2} \geq -\frac{1}{2}$ et

$$\Big(f''(0) - \frac{\varepsilon}{2}\Big)\frac{x^2}{2} - \Big(f''(0) - \frac{\varepsilon}{2}\Big)^2 \frac{x^4}{4} \geq \big(f''(0) - \varepsilon\big)\frac{x^2}{2}$$

pour tout $x \in [-\eta, +\eta]$. c) En suivant l'indication, pour tout $r > 0$,

$$\int_{[-1,+1]} f^r d\lambda = \int_{[-\eta,+\eta]} f^r d\lambda + \int_{[-\eta,+\eta]^c} f^r d\lambda.$$

D'après b),

$$\int_{[-\eta,+\eta]} f^r d\lambda \leq \int_{[-\eta,+\eta]} e^{\frac{r}{2}(f''(0)+\varepsilon)x^2} d\lambda.$$

En posant $\alpha = -r(f''(0) + \varepsilon) > 0$, après un changement de variable,

$$\int_{[-\eta,+\eta]} e^{\frac{r}{2}(f''(0)+\varepsilon)x^2} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{[-\eta\sqrt{\alpha},+\eta\sqrt{\alpha}]} e^{-\frac{1}{2}y^2} d\lambda.$$

En observant que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}y^2} d\lambda = \sqrt{2\pi}$ (voir Exercice 4, Leçon 4), il s'ensuit que

$$\limsup_{r\to\infty} \sqrt{r} \int_{[-\eta,+\eta]} f^r d\lambda \leq \sqrt{\frac{2\pi}{-(f''(0)+\varepsilon)}}\,.$$

Par ailleurs, comme $f(0) = 1$ est un maximum global unique, si $x \notin [-\eta, +\eta]$, $f(x) \leq a < 1$, et donc

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r} \int_{[-\eta,+\eta]^c} f^r d\lambda \;=\; 0.$$

En conclusion

$$\limsup_{r\to\infty} \sqrt{r} \int_{[-1,+1]} f^r d\lambda \;\leq\; \sqrt{\frac{2\pi}{-(f''(0)+\varepsilon)}}\,.$$

Un raisonnement similaire fournit

$$\liminf_{r\to\infty} \sqrt{r} \int_{[-1,+1]} f^r d\lambda \;\geq\; \sqrt{\frac{2\pi}{-(f''(0)-\varepsilon)}}\,.$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre ε vers 0 pour atteindre l'affirmation demandée.
d) Par définition

$$\begin{aligned}\Gamma(p+1) \;&=\; \int_{[0,\infty[} x^p e^{-x} d\lambda \\ &=\; p^{p+1} \int_{[0,\infty[} y^p e^{-py} d\lambda \\ &=\; p^{p+1} e^{-p} \int_{[-1,\infty[} (z+1)^p e^{-pz} d\lambda\end{aligned}$$

après deux changements de variables élémentaires. La fonction $f(x) = (x+1)e^{-x}$, $x \in [-1,\infty[$, est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,\infty[$, avec un maximum global en 0, telle que $f(0) = 1$ et $f''(0) = -1$. Comme elle tend vers 0 à l'infini, le raisonnement mené en c) s'étend, pour conclure donc que

$$\int_{[-1,\infty[} f^p d\lambda \;\sim\; \sqrt{\frac{2\pi}{p}}\,.$$

Puisque $\Gamma(p+1) = p^{p+1}e^{-p} \int_{[-1,\infty[} f^p d\lambda$, la formule de Stirling en découle.

Exercice 14. Soit μ une mesure de probabilité sur $[0,1]$, et soient $m = \int_{[0,1]} x d\mu$, $v = \int_{[0,1]} (x-m)^2 d\mu$, $a = \int_{[0,1]} x^2 d\mu - m^2$ et $b = (\frac{1}{2} - m)^2 + \int_{[0,1]} x(1-x) d\mu$. Exprimer v et b en fonction de a. En déduire que $a \leq \frac{1}{4}$ et que $a = \frac{1}{4}$ pour une unique mesure μ que l'on déterminera.

Indications. $0 \leq v = a$ et $0 \leq b = \frac{1}{4} - a$. Si $b = 0$, nécessairement $m = \frac{1}{2}$ et $x(1-x) = 0$ μ-presque partout.

Exercice 15 (*Distance en variation totale*). Si μ et ν sont deux mesures de probabilité sur un ensemble fini ou dénombrable X (muni de la tribu des parties $\mathcal{P}(X)$), on définit leur distance en variation totale

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu) \, = \, \sup_{A \subset X} \big| \mu(A) - \nu(A) \big| .$$

a) Vérifier que d_{TV} est une distance sur l'espace des mesures de probabilité sur $(X, \mathcal{P}(X))$.

b) Démontrer que

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu) \, = \, \frac{1}{2} \sup \left| \int_X f \, d\mu - \int_X f \, d\nu \right| \, = \, \frac{1}{2} \sum_{x \in X} \big| \mu(\{x\}) - \nu(\{x\}) \big|$$

où le supremum dans l'expression du milieu porte sur toutes les fonctions $f : X \to [-1, +1]$. (*Indication* : considérer $A_* = \{x \in X; \mu(\{x\}) \geq \nu(\{x\})\}$.)

Corrigé. b) Par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \left| \int_X f \, d\mu - \int_X f \, d\nu \right| \, &= \, \left| \sum_{x \in X} f(x) \big[\mu(\{x\}) - \nu(\{x\}) \big] \right| \\ &\leq \, \sum_{x \in X} \big| \mu(\{x\}) - \nu(\{x\}) \big| \end{aligned}$$

si $|f| \leq 1$. Par ailleurs, si $A \subset X$ et $f = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A^c} \in [-1, +1]$,

$$\int_X f \, d\mu - \int_X f \, d\nu \, = \, 2 \big[\mu(A) - \nu(A) \big]$$

de sorte que $d_{\mathrm{TV}}(\mu,\nu) \leq \frac{1}{2} \sup \big| \int_X f\,d\mu - \int_X f\,d\nu \big|$. Ainsi

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu,\nu) \leq \frac{1}{2} \sup \bigg| \int_X f\,d\mu - \int_X f\,d\nu \bigg| \leq \frac{1}{2} \sum_{x\in X} \big|\mu(\{x\}) - \nu(\{x\})\big|$$

Pour réaliser les égalités, observer que, avec $A_* = \{x \in X; \mu(\{x\}) \geq \nu(\{x\})\}$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{x\in X} \big|\mu(\{x\}) - \nu(\{x\})\big| \\
&\qquad = \sum_{x\in A_*} \big[\mu(\{x\}) - \nu(\{x\})\big] - \sum_{x\in A_*^c} \big[\mu(\{x\}) - \nu(\{x\})\big] \\
&\qquad = \big[\mu(A_*) - \nu(A_*)\big] - \big[\mu(A_*^c) - \nu(A_*^c)\big] \\
&\qquad = 2\big[\mu(A_*) - \nu(A_*)\big] \\
&\qquad \leq 2\, d_{\mathrm{TV}}(\mu,\nu).
\end{aligned}$$

Il peut être noté alors que la fonction $f = \mathbb{1}_{A_*} - \mathbb{1}_{A_*^c}$ réalise l'optimum dans le supremum sur les fonctions f à valeurs dans $[-1,+1]$.

Exercice 16* (*Mesure de Cantor*). Rappeler la construction de l'ensemble de Cantor dans l'Exercice 9, Leçon 2.

a) Poser, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in [0,1]$, $F_n(x) = \big(\frac{3}{2}\big)^n \lambda([0,x] \cap E_n)$. Représenter F_0, F_1, F_2. Démontrer que

$$\big|F_n(x) - F_{n-1}(x)\big| \leq \frac{1}{2^{n-2}}\,, \quad x \in [0,1],\ n \geq 1.$$

En déduire que la fonction $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$, $x \in [0,1]$, existe, est croissante et continue.

b) Soit λ^F la mesure de Stieltjes sur $[0,1]$ associée à la fonction croissante F ; la mesure λ^F comporte-t-elle une partie atomique ? Est-elle absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ ? Lui est-elle étrangère ?

Corrigé. a) La fonction F_n est constante sur E_n^c de sorte que, comme $E_n \subset E_{n-1}$, F_n et F_{n-1} coïncident sur E_{n-1}^c. Si $x \in E_{n-1}$, il appartient à l'une des cellules triadiques, qui se décompose en trois cellules au rang n. Sur cette cellule, la différence $|F_n(x) - F_{n-1}(x)|$ est au plus $\frac{2}{2^{n-1}}$. Comme

$$\sum_{n \geq 1} \sup_{x \in [0,1]} \big| F_n(x) - F_{n-1}(x) \big| < \infty,$$

la suite F_n, $n \in \mathbb{N}$, est de Cauchy dans l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme uniforme, donc y converge vers une limite continue F. La fonction F est croissante puisque toutes les F_n le sont. b) La fonction F étant continue, la mesure de Stieltjes λ^F n'admet pas d'atomes. Sur l'ouvert E_n^c, $F = F_n$ est constante. Tout ouvert de $\mathbb{R}$ étant une réunion disjointe d'intervalles ouverts, et la mesure λ^F d'un intervalle étant nulle si F est constante sur cet intervalle, il s'ensuit que $\lambda^F(E_n^c) = 0$. Donc, si $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$ est l'ensemble de Cantor, $\lambda^F(C^c) = 0$ et $\lambda^F(C) = 1$. Rappeler que $\lambda(C) = 0$. La mesure λ^F est donc étrangère à la mesure de Lebesgue.