# Leçons de Probabilité

*Une introduction au calcul des probabilités :*
*de la théorie de la mesure et de l'intégration de Lebesgue*
*à l'axiomatique de Kolmogorov*

niveau L3

Ces leçons forment une introduction au calcul des probabilités fondée sur la théorie de la mesure et de l'intégration de Lebesgue [1] suivant l'axiomatique de Kolmogorov [2]. La présentation reste à un niveau élémentaire, sans développements plus approfondis, se concentrant sur les points essentiels de la théorie.

Après des rappels (essentiellement sans démonstration) des éléments essentiels de la théorie de la mesure et de l'intégration, les leçons présentent, de façon concise et synthétique, les bases de la théorie des probabilités, couvrant les notions de variable aléatoire et de loi de variable aléatoire, d'indépendance, de vecteur gaussien, ainsi que la loi des grands nombres et, brièvement, le théorème central limite. La convergence en loi est à peine effleurée, et le conditionnement n'est pas abordé. De petits compléments et sujets de découvertes sont proposés à la fin de quelques leçons.

Ces leçons couvrent le programme générique d'un enseignement de cette matière en L3.

Les énoncés sont présentés en couleur verte.

Des remarques importantes et pratiques sont en bleu.

Les corrigés d'exercices sont en rouge.

1. Henri Lebesgue, mathématicien français (1875–1941).
2. Andreï Kolmogorov, mathématicien russe et soviétique (1903–1987).

Quelques notations utilisées au fil des leçons.

L'ensemble des entiers naturels $n \geq 1$ sera noté $\mathbb{N}$. Lorsque 0 est compris, la notation l'indiquera sous la forme $\mathbb{N} \cup \{0\}$. L'ensemble des entiers relatifs est $\mathbb{Z}$, celui des rationnels $\mathbb{Q}$.

Le corps des nombres réels est désigné par $\mathbb{R}$, celui des complexes par $\mathbb{C}$. Les réels positifs (ou nuls) sont représentés par $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$. Sauf si une précision semble nécessaire, $+\infty$ sera noté $\infty$. $\mathbb{R}^*$ pourra être utilisé pour représenter $\mathbb{R}$ privé de 0.

Il arrivera qu'un intervalle générique de $\mathbb{R}$ soit noté pour plus de commodité $(a, b)$, sans précision sur la nature fermée ou ouverte (voire infinie) des extrémités. Cette notation, propre à ces leçons, ne doit pas être confondue avec la notation anglo-saxonne pour l'intervalle ouvert $]a, b[$.

Si $x$ est un réel, $x_+ = \max(x, 0)$ et $x_- = -\min(x, 0)$ de sorte que $x_+, x_- \geq 0$, $x = x_+ - x_-$ et $|x| = x_+ + x_-$.

Si $x$ est un réel, $\lfloor x \rfloor$ est sa partie entière, donc l'unique entier relatif $k$ tel que $k \leq x < k + 1$.

L'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) est muni du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{d} x_k y_k,$$

$x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$, et du carré scalaire associé

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left( \sum_{k=1}^{d} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La formule « théorie de la mesure et de l'intégration de Lebesgue » sera souvent abrégée en « théorie de la mesure et de l'intégration », voire même « théorie de la mesure » ou « théorie de l'intégration » suivant le contexte.

## Table des matières

Ce texte aura pillé nombre d'ouvrages et d'auteurs, et bénéficié de leur propre vision et présentation de la matière, qui reconnaîtront des énoncés ou des exercices que le temps a fait bien commun. Si ce texte en abuse, l'auteur présente ses excuses. Parmi eux : X. Fernique, G. Letac, D. Bakry, Ph. Barbe, H. Carrieu, Fr. Barthe, M. Benaïm, Ph. Carmona, D. Michel, Dj. Chafaï, I. Gentil, W. Internet, Th. Delmotte, L. Coutin, Ol. Garet, A. Kurtzmann, D. Revuz...

Ces leçons se sont aussi enrichies des questions et observations de tous les étudiants qui ont subi cet enseignement au fil des années !

Les corrections sont toujours bienvenues, et seront incorporées le plus rapidement possible.

*Jeune homme, prends et lis. Si tu peux aller jusqu'à la fin de cet ouvrage, tu ne seras pas incapable d'en entendre un meilleur. Comme je me suis moins proposé de t'instruire que de t'exercer, il m'importe peu que tu adoptes mes idées ou que tu les rejettes, pourvu qu'elles emploient toute ton attention. Un plus habile t'apprendra à connaître les forces de la nature ; il me suffira de t'avoir fait essayer les tiennes.* Denis Diderot (1713–1784)