Une démonstration de la Loi du Logarithme Itéré

La Loi du Logarithme Itéré (LLI) est l'une des trois lois limites fondamentales du calcul des probabilités classiques après la Loi des Grands Nombres et le Théorème Central Limite.

La LLI exprime, avec une précision étonnante, le comportement presque sûr le plus proche de la convergence en loi du Théorème Central Limite. L'apparition du logarithme itéré est dû à la conjonction d'un argument de blocs le long de sous-suites géométriques et d'inégalités exponentielles de type gaussien pour des sommes de variables aléatoires indépendantes.

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de copies indépendantes de X (sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$) ; poser $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \geq 1$. La Loi des Grands Nombres dans sa forme standard indique que si X est intégrable,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}(X) \qquad \text{presque sûrement,}$$

alors que le Théorème Central Limite quantifie les fluctuation sous la forme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = G \qquad \text{en loi}$$

dès que $\sigma^2 = \mathbb{E}(X^2) < \infty$ et $\mathbb{E}(X) = 0$, où G est une variable aléatoire de loi normale centrée de variance σ^2.

Entre ces deux normalisations, la LLI formule que si $\sigma = \sqrt{\mathbb{E}(X^2)} < \infty$ et $\mathbb{E}(X) = 0$,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \log\log(n)}} = \sigma \qquad \text{presque sûrement.} \tag{1}$$

La suite $\sqrt{2n\log\log(n)} = \sqrt{2n\log(\log(n))}$ n'est définie rigoureusement que pour $n \geq 3$, mais pour ne pas trop compliquer les notations il sera écrit que $\log\log(n) = 1$ pour $n = 1, 2$.

En considérant $-X$ à la place de X, il est aussi vrai que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log(n)}} = -\sigma \qquad \text{presque sûrement.} \tag{2}$$

En conséquence de (1) et (2),

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n\log\log(n)}} = \sigma \qquad \text{presque sûrement,} \tag{3}$$

et la suite $\left(\frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log(n)}}\right)_{n\geq 1}$ est en particulier bornée presque sûrement.

Cet énoncé a été établi par P. Hartman et A. Wintner [4] après les travaux fondateurs de A. Khintchine [6] et A. Kolmogorov [7], surprenants de technique et de modernité pour l'époque. La plupart des démonstrations plus récentes, dont celle-ci, reprennent en fait pour l'essentiel leur schéma.

Une forme plus précise de la LLI, due à V. Strassen [10], exprime que

$$\lim_{n\to\infty} d\left(\frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log(n)}}, [-\sigma,+\sigma]\right) = 0 \tag{4}$$

et

$$C\left(\left(\frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log(n)}}\right)_{n\geq 1}\right) = [-\sigma,+\sigma] \tag{5}$$

presque sûrement. Dans (4), $d(\cdot,[-\sigma,+\sigma]) = \inf_{a\in[-\sigma,+\sigma]} |\cdot - a|$ est la distance à l'ensemble $[-\sigma,+\sigma]$, alors que dans (5), pour une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels, $C((a_n)_{n\geq 1})$ désigne l'ensemble de ses valeurs d'adhérence. V. Strassen établit ce résultat par un plongement d'une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi dans les trajectoires browniennes et une version de la LLI pour ce processus gaussien spécifique.

La propriété (4) est en fait une conséquence immédiate de (3) (il suffit même de la majoration de la limsup, sous la forme de (6) ci-dessous). Si (1) et (2) assurent que $+\sigma$ et $-\sigma$ sont presque sûrement des valeurs d'adhérence de la suite $\left(\frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log(n)}}\right)_{n\geq 1}$, la force de (5) réside dans le fait que tous les points de l'intervalle $[-\sigma,+\sigma]$ le sont aussi.

L'objet de cette courte note est de présenter une démonstration simple et complète des propriétés (1) et (5). Les différents arguments sont issus des démonstrations classiques de la LLI, tirées de divers ouvrages et articles comme [7, 5, 9, 8, 2, 1] parmi (beaucoup) d'autres. La démonstration, sans être difficile, nécessite néanmoins un peu de soin et de précision.

Les deux premières parties sont consacrées à la démonstration de (1), décomposée en majoration et minoration. La dernière partie établit la forme de Strassen (5) à partir de l'extension multi-dimensionelle.

Pour des raisons d'homogénéité (travailler avec $\frac{X}{\sigma}$), il peut être supposé que $\sigma = 1$ (le cas $\sigma = 0$ ne présente pas d'intérêt).

1 Démonstration de la majoration dans (1)

L'objet de cette partie est d'établir que, pour X centrée de variance 1,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log(n)}} \leq 1 \qquad \text{presque sûrement.} \tag{6}$$

La démonstration va s'appuyer sur le lemme de Borel-Cantelli à travers une décomposition en blocs le long de sous-suites géométriques et une inégalité exponentielle pour sommes de variables aléatoires indépendantes.

1.1 Troncation et lemme de Borel-Cantelli

Le principe de la démonstration va coupler un argument de troncation et l'outil du lemme de Borel-Cantelli. Le résultat sera obtenu s'il est possible d'établir que, pour tous $\varepsilon > 0$ et $\rho > 1$,

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{P}\Big(\max_{1\leq n\leq n_\ell} T_n^\varepsilon \geq (1+2\varepsilon)\sqrt{2n_\ell \log\log(n_\ell)} \Big) < \infty \tag{7}$$

n_ℓ désignant la partie entière de ρ^ℓ, $\ell \geq 0$, et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - T_n^\varepsilon}{\sqrt{2n\log\log(n)}} = 0 \qquad \text{presque sûrement,} \tag{8}$$

où

$$T_n^\varepsilon = Y_1^\varepsilon + \cdots + Y_n^\varepsilon, \quad n \geq 1,$$

et

$$Y_k^\varepsilon = X_k \, \mathbb{1}_{\left\{|X_k| \leq c\sqrt{k/\log\log(k)}\right\}} - \mathbb{E}\Big(X_k \, \mathbb{1}_{\left\{|X_k| \leq c\sqrt{k/\log\log(k)}\right\}} \Big), \quad k \geq 1,$$

où $c = c(\varepsilon) > 0$ sera à déterminer plus loin dans la preuve (voir la condition (10)).

En effet, d'après le lemme de Borel-Cantelli, la convergence de la série (7) assure que pour presque tout $\omega \in \Omega$, à partir d'un entier $\ell_0 = \ell_0(\omega)$, pour tout $\ell \geq \ell_0$,

$$\max_{1\leq n\leq n_\ell} T_n^\varepsilon(\omega) \leq (1+2\varepsilon)\sqrt{2n_\ell\log\log(n_\ell)}.$$

Donc

$$\max_{n_{\ell-1}<n\leq n_\ell} \frac{T_n^\varepsilon(\omega)}{\sqrt{2n\log\log(n)}} \leq (1+2\varepsilon)\rho$$

puisque $\sqrt{2n_\ell \log\log(n_\ell)} \leq \rho \sqrt{2n \log\log(n)}$ lorsque $n_{\ell-1} < n \leq n_\ell$, au moins pour ℓ suffisamment grand, de sorte que, presque sûrement,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{T_n^\varepsilon}{\sqrt{2n \log\log(n)}} \leq (1+2\varepsilon)\rho.$$

D'après (8), il vaut aussi que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \log\log(n)}} \leq (1+2\varepsilon)\rho \qquad \text{presque sûrement.}$$

En choisissant ε et ρ sous la forme $\frac{1}{p}$ et $1+\frac{1}{q}$ où p et q sont entiers afin d'assurer une réunion dénombrable d'ensembles négligeables, la propriété (6) sera démontrée.

1.2 Utilisation du lemme de Kronecker

Ce paragraphe établit la convergence (8) à travers une application du lemme classique de Kronecker. Celui-ci va en effet assurer la conclusion si $\sum_{k=1}^\infty \frac{X_k - Y_k^\varepsilon}{\sqrt{2k \log\log(k)}} < \infty$ presque sûrement. Par définition des Y_k^ε et centrage des X_k, cela sera le cas si

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{2k \log\log(k)}} \, \mathbb{E}\Big(|X_k| \, \mathbb{1}_{\{|X_k| > c\sqrt{k/\log\log(k)}\}}\Big) < \infty.$$

D'après Fubini-Tonelli et équidistribution des X_k,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{2k \log\log(k)}} \, \mathbb{E}\Big(|X_k| \, \mathbb{1}_{\{|X_k| > c\sqrt{k/\log\log(k)}\}}\Big) \\ &\qquad\qquad = \mathbb{E}\bigg(|X| \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{2k \log\log(k)}} \, \mathbb{1}_{\{|X| > c\sqrt{k/\log\log(k)}\}}\bigg). \end{aligned}$$

Une majoration aisée montre que pour tout entier $N \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{2k \log\log(k)}} \leq C \sqrt{\frac{N}{\log\log(N)}}$$

pour une certaine constante numérique $C > 0$. Comme $|X| > c\sqrt{k/\log\log(k)}$ revient à dire que $k < c' X^2 \log\log(X^2)$ pour un certain c' ne dépendant que de c, pour N de l'ordre de $X^2 \log\log(X^2)$, il s'ensuit que

$$\mathbb{E}\bigg(|X| \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{2k \log\log(k)}} \, \mathbb{1}_{\{|X| > c\sqrt{k/\log\log(k)}\}}\bigg) \leq C' \, \mathbb{E}(X^2) < \infty.$$

La conclusion annoncée en résulte.

1.3 Une inégalité maximale

Afin de traiter (7) du lemme de Borel-Cantelli, il convient de se débarrasser du maximum dans la probabilité à l'aide d'une inégalité maximale. Plusieurs outils sont à disposition, par exemple l'inégalité dite d'Ottaviani.

Lemme 1. *Soient $Y_1, \dots, Y_n$ des variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et soient $T_k = Y_1 + \cdots + Y_k$, $k = 1, \dots, n$. Pour tous $s, t > 0$,*

$$\mathbb{P}(T_n \geq t) \;\geq\; \min_{1 \leq k \leq n} \mathbb{P}\big(|T_n - T_k| < s\big)\, \mathbb{P}\big(\max_{1 \leq k \leq n} T_k \geq s + t\big).$$

Démonstration. Considérer les parties de $\mathcal{A}$ définies par

$$A_k \;=\; \big\{T_1 < s + t, \dots, T_{k-1} < s + t, T_k \geq s + t\big\}, \quad k = 1, \dots, n,$$

qui forment une partition de réunion $\{\max_{1 \leq k \leq n} T_k \geq s + t\}$. Alors

$$\mathbb{P}\big(T_n \geq t\big) \;\geq\; \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(T_n \geq t, A_k\big) \;\geq\; \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(|T_n - T_k| < s, A_k\big)$$

puisque $T_n = (T_n - T_k) + T_k$ et que $T_k \geq s + t$ sur A_k. Par indépendance, l'événement A_k ne dépendant que des variables $Y_1, \dots, Y_k$ et $T_n - T_k = Y_{k+1} + \cdots + Y_n$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(T_n \geq t\big) \;&\geq\; \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(|T_n - T_k| < s\big)\, \mathbb{P}(A_k) \\
&\geq\; \min_{1 \leq k \leq n} \mathbb{P}\big(|T_n - T_k| < s\big) \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \\
&\geq\; \min_{1 \leq k \leq n} \mathbb{P}\big(|T_n - T_k| < s\big)\, \mathbb{P}\big(\max_{1 \leq k \leq n} T_k \geq s + t\big).
\end{aligned}$$

La conclusion s'ensuit. □

Ce lemme peut être appliqué aux variables $T_1^\varepsilon, \dots, T_{n_\ell}^\varepsilon$ intervenant dans (7). D'après l'inégalité de Tchebychev, pour tout $n = 1, \dots, n_\ell$,

$$\mathbb{P}\big(|T_{n_\ell}^\varepsilon - T_n^\varepsilon| \geq s\big) \;\leq\; \frac{1}{s^2} \sum_{k=n+1}^{n_\ell} \mathbb{E}\big((Y_k^\varepsilon)^2\big) \;\leq\; \frac{n_\ell}{s^2}$$

puisque $\mathbb{E}((Y_k^\varepsilon)^2) \leq \mathbb{E}(X_k^2) = 1$. Ainsi, si $s = \varepsilon\sqrt{2n_\ell \log\log(n_\ell)}$, ces probabilités seront, par exemple, plus petites que $\frac{1}{2}$ pour tout $\ell \geq 1$ assez grand, de sorte que

$$\min_{1 \leq n \leq n_\ell} \mathbb{P}\big(|T_{n_\ell}^\varepsilon - T_n^\varepsilon| < s\big) \;\geq\; \frac{1}{2}\,.$$

Donc, d'après le lemme, pour ℓ assez grand,

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1 \le n \le n_\ell} T_n^\varepsilon \ge (1+2\varepsilon)\sqrt{2n_\ell \log\log(n_\ell)}\Big) \\ \le \; 2\,\mathbb{P}\Big(T_{n_\ell}^\varepsilon \ge (1+\varepsilon)\sqrt{2n_\ell \log\log(n_\ell)}\Big).$$

En conclusion, (7) aura lieu, pour $\varepsilon > 0$, $\rho > 1$, dès que

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{P}\Big(T_{n_\ell}^\varepsilon \ge (1+\varepsilon)\sqrt{2n_\ell \log\log(n_\ell)}\Big) \; < \; \infty. \tag{9}$$

1.4 Inégalité exponentielle

Les démonstrations de la LLI reposent en essence sur des inégalités exponentielles de type gaussien pour sommes de variables aléatoires indépendantes, à la source du logarithme itéré. Il en existe de nombreuses et variées (cf. [7, 9, 8]...). Celle-ci, tirée de [1], est d'un accès relativement aisé.

Lemme 2. *Soient $Y_1, \dots, Y_n$ des variables aléatoires centrées indépendantes telles que $|Y_k| \le C$ presque sûrement pour tout $k = 1, \dots, n$, où $C > 0$ est une constante positive fixée. Poser $T_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Alors, pour tout $\alpha^2 \ge \max_{1\le k \le n} \mathbb{E}(Y_k^2)$ et tout $t > 0$,*

$$\mathbb{P}(T_n \ge t) \; \le \; \exp\Big(- \frac{t^2}{2\alpha^2 n}\big[2 - e^{Ct/\alpha^2 n}\big]\Big).$$

Démonstration. Pour tout réel x, $e^x \le 1 + x + \frac{x^2}{2}\, e^{|x|}$ de sorte que, par centrage, pour tout $\lambda > 0$ et tout $k = 1, \dots, n$,

$$\mathbb{E}(e^{\lambda Y_k}) \; \le \; 1 + \frac{\lambda^2}{2}\,\mathbb{E}\big(Y_k^2 e^{\lambda |Y_k|}\big) \; \le \; 1 + \frac{\alpha^2\lambda^2}{2}\, e^{\lambda C} \; \le \; \exp\Big(\frac{\alpha^2\lambda^2}{2}\, e^{\lambda C}\Big)$$

d'après les hypothèses. En conséquence, par indépendance,

$$\mathbb{E}(e^{\lambda T_n}) \; = \; \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(e^{\lambda Y_k}) \; \le \; \exp\Big(\frac{\alpha^2\lambda^2 n}{2}\, e^{\lambda C}\Big),$$

et d'après l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(T_n \ge t) \; \le \; \exp\Big(- \lambda t + \frac{\alpha^2\lambda^2 n}{2}\, e^{\lambda C}\Big).$$

Le choix de $\lambda = \frac{t}{\alpha^2 n}$ conduit à la conclusion annoncée. $\square$

1.5 Fin de la démonstration de (6)

Sur la base de l'inégalité exponentielle du paragraphe précédent, la démonstration de (9) est presque immédiate. L'inégalité du Lemme 2 appliquée à l'échantillon de variables aléatoires centrées indépendantes $Y_1^\varepsilon, \ldots, Y_{n_\ell}^\varepsilon$ (pour chaque $\ell \geq 1$ fixé) pour lesquelles

$$|Y_k^\varepsilon| \leq C \,=\, 2c\sqrt{\frac{n_\ell}{\log\log(n_\ell)}}\,, \qquad \mathbb{E}\big((Y_k^\varepsilon)^2\big) \,\leq\, \mathbb{E}(X_k^2) \,=\, 1, \quad k = 1, \ldots, n_\ell,$$

fournit pour $t = (1+\varepsilon)\sqrt{2n_\ell \log\log(n_\ell)}$,

$$\mathbb{P}\Big(T_{n_\ell}^\varepsilon \geq (1+\varepsilon)\sqrt{2n_\ell \log\log(n_\ell)}\,\Big) \,\leq\, \exp\Big(-(1+\varepsilon)^2\left[2 - e^{2\sqrt{2}c(1+\varepsilon)}\right]\log\log(n_\ell)\Big).$$

Choisir alors $c = c(\varepsilon) > 0$ suffisamment petit pour que

$$(1+\varepsilon)^2\left[2 - e^{2\sqrt{2}c(1+\varepsilon)}\right] \,>\, 1, \tag{10}$$

de sorte que le membre de droite de l'inégalité précédente définit le terme général d'une série convergente en $\ell \geq 1$ puisque $\log\log(n_\ell) \sim \log(\ell)$.

La démonstration de la convergence de la série (9), et donc de la majoration (6) de la limite supérieure (1), est ainsi terminée.

2 Démonstration de la minoration dans (1)

L'objet de cette partie est d'établir que, pour X centrée de variance 1,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log(n)}} \,\geq\, 1 \qquad \text{presque sûrement.} \tag{11}$$

La démonstration va s'appuyer sur le lemme de Borel-Cantelli dans sa partie indépendante et une inégalité de déviation modérée.

2.1 Utilisation du lemme de Borel-Cantelli

Il va suffire de démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une sous-suite $(n_\ell)_{\ell\geq 1}$ d'entiers croissant vers l'infini telle que

$$\limsup_{\ell\to\infty} \frac{S_{n_\ell}}{\sqrt{2n_\ell\log\log(n_\ell)}} \,\geq\, 1-\varepsilon \qquad \text{presque sûrement.} \tag{12}$$

Ainsi $\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log(n)}} \geq 1-\varepsilon$ presque sûrement, puis considérer une réunion dénombrable d'ensembles négligeables avec $\varepsilon = \frac{1}{p}$, $p \geq 1$ entier.

Si la sous-suite choisie est telle que $\lim_{\ell\to\infty} \frac{n_{\ell-1}}{n_\ell} = 0$, il suffira de démontrer que

$$\limsup_{\ell\to\infty} \frac{S_{n_\ell} - S_{n_{\ell-1}}}{\sqrt{2n_\ell \log\log(n_\ell)}} \;\geq\; 1-\varepsilon \qquad \text{presque sûrement} \tag{13}$$

puisque d'après (6) la suite $\big(\frac{S_{n_{\ell-1}}}{\sqrt{2n_{\ell-1}\log\log(n_{\ell-1})}}\big)_{\ell\geq 1}$ est presque sûrement bornée.

Par indépendance des variables $S_{n_\ell} - S_{n_{\ell-1}}$, $\ell \geq 1$, la propriété (13) aura lieu si

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{P}\bigg(\frac{S_{n_\ell} - S_{n_{\ell-1}}}{\sqrt{2n_\ell \log\log(n_\ell)}} \geq 1-\varepsilon\bigg) \;=\; \infty \tag{14}$$

d'après le lemme de Borel-Cantelli (dans sa version indépendante donc).

2.2 Une inégalité de déviation modérée

La démonstration de (14) va s'appuyer sur une inégalité de minoration présentée ici sous la forme d'une asymptotique de déviations modérées (issue du théorème central limite).

Rappeler que $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \geq 1$, où $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, centrées réduites.

Considérer un réel $u > 0$ et des entiers $p, q \geq 1$. Alors, par indépendance et équidistribution,

$$\mathbb{P}\bigg(\frac{S_{pq}}{pq} \geq u\bigg) \;\geq\; \bigg[\mathbb{P}\bigg(\frac{S_p}{p} \geq u\bigg)\bigg]^q$$

puisque

$$S_{pq} \;=\; (X_1 + \cdots + X_p) + (X_{p+1} + \cdots + X_{2p}) + \cdots + (X_{p(q-1)+1} + \cdots + X_{pq}).$$

Si $p = p_\ell$, $q = q_\ell$, $\ell \geq 1$, sont des suites d'entiers tendant vers l'infini, alors, pour $u = \frac{t}{\sqrt{p}}$ où $t > 0$ est fixé, par le théorème central limite,

$$\liminf_{\ell\to\infty} \frac{1}{q_\ell} \log \mathbb{P}\bigg(\frac{S_{p_\ell q_\ell}}{\sqrt{p_\ell} q_\ell} \geq t\bigg) \;\geq\; \log \mathbb{P}\big(G \geq t\big) \tag{15}$$

où G suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Soit donc ε fixé, $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$. Pour un $\alpha > 0$ à déterminer plus loin en fonction de ε, poser, pour chaque $\ell \geq 1$,

$$p_\ell \;=\; \bigg[\frac{\alpha\, \ell^\ell}{2\log\log(\ell^\ell)}\bigg], \qquad q_\ell \;=\; \bigg[\frac{2}{\alpha}\, \log\log(\ell^\ell)\bigg]$$

(parties entières). Définir alors une suite $(n_\ell)_{\ell\geq 1}$ par la relation de récurrence

$$n_\ell \,=\, p_\ell\, q_\ell + n_{\ell-1}, \quad \ell \geq 2, \quad n_1 \,=\, 1.$$

Il est aisé de constater que $n_\ell \sim \ell^\ell$ quand $\ell \to \infty$. En effet, en posant $v_\ell = \frac{n_\ell}{\ell^\ell}$, $\ell \geq 1$,

$$v_\ell \,=\, u_\ell + \frac{(\ell-1)^{\ell-1}}{\ell^\ell}\, v_{\ell-1}$$

où la suite $u_\ell = \frac{p_\ell q_\ell}{\ell^\ell}$, $\ell \geq 1$, tend vers 1. La suite $(v_\ell)_{\ell\geq 1}$ est donc bornée, et tend ainsi également vers 1. En particulier

$$\sqrt{p_\ell}\, q_\ell \,\sim\, \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{2n_\ell \log\log(n_\ell)} \qquad \text{et} \qquad q_\ell \,\sim\, \frac{2}{\alpha}\, \log\log(n_\ell).$$

Fort de ces observations, en application de (15) pour $t = (1-2\varepsilon)\sqrt{\alpha}$,

$$\begin{aligned}
\liminf_{\ell\to\infty} \frac{1}{\log\log(n_\ell)}\, &\log \mathbb{P}\bigg(\frac{S_{n_\ell} - S_{n_{\ell-1}}}{\sqrt{2n_\ell \log\log(n_\ell)}} \geq 1 - 3\varepsilon \bigg) \\
&\geq\, \frac{2}{\alpha}\, \liminf_{\ell\to\infty} \frac{1}{q_\ell}\, \log\mathbb{P}\bigg(\frac{S_{p_\ell q_\ell}}{\sqrt{p_\ell} q_\ell} \geq (1-2\varepsilon)\sqrt{\alpha} \bigg) \\
&\geq\, \frac{2}{\alpha} \log \mathbb{P}\big(G \geq (1-2\varepsilon)\sqrt{\alpha}\, \big).
\end{aligned}$$

La minoration traditionnelle

$$\mathbb{P}(G \geq u) \,\geq\, \Big(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^3} \Big) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{2}}, \quad u > 0,$$

conduit à constater que pour α suffisamment grand (dépendant de $\varepsilon < \frac{1}{3}$),

$$\frac{2}{\alpha} \log \mathbb{P}\big(G \geq (1-2\varepsilon)\sqrt{\alpha}\, \big) \,\geq\, -(1-2\varepsilon),$$

de sorte que

$$\liminf_{\ell\to\infty} \frac{1}{\log\log(n_\ell)}\, \log \mathbb{P}\bigg(\frac{S_{n_\ell} - S_{n_{\ell-1}}}{\sqrt{2n_\ell \log\log(n_\ell)}} \geq 1 - 3\varepsilon \bigg) \,\geq\, -(1-2\varepsilon). \tag{16}$$

2.3 Fin de la démonstration de (11)

La minoration (16) du paragraphe précédent va assurer simplement la divergence des séries (14), et conclure ainsi la démonstration de (11). En effet, pour tout ℓ assez grand,

$$\mathbb{P}\bigg(\frac{S_{n_\ell} - S_{n_{\ell-1}}}{\sqrt{2n_\ell \log\log(n_\ell}} \geq 1 - 3\varepsilon \bigg) \,\geq\, e^{-(1-\varepsilon)\log\log(n_\ell))}.$$

Comme $n_\ell \sim \ell^\ell$, le membre de droite définit le terme général d'une série divergente, de sorte que, $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, la propriété (14) est satisfaite.

Par ailleurs $\frac{n_{\ell-1}}{n_\ell} \to 0$ comme souhaité pour conclure la démonstration. L'inégalité presque sûre (12) est établie, et ainsi (11).

3 Extension multi-dimensionnelle et forme de Strassen

Le résultat de Strassen (5) sur l'ensemble d'adhérence

$$C\Bigg(\bigg(\frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log(n)}}\bigg)_{n\geq 1}\Bigg) \,=\, [-1,+1] \qquad \text{presque sûrement,}$$

est présentée ici à travers l'extension à des vecteurs aléatoires de la LLI réelle (1). Il est possible d'en donner une démonstration directe sur la base de l'argument de déviation modérée du paragraphe précédent ainsi que développé dans [1].

La LLI s'étend assez simplement au cas multi-dimensionnel sous la forme suivante. Soit $X = (X^{(1)}, \ldots, X^{(d)})$ un vecteur aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, tel que $\mathbb{E}(\|X\|^2) < \infty$ et $\mathbb{E}(X) = 0$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^d$. Il est supposé que la matrice de covariance $\Gamma = \big(\mathbb{E}((X^{(i)}(X^{(j)})\big)_{1\leq i,j\leq d}$ est non-dégénérée, de racine carrée $\Gamma = M\,{}^tM$.

Soit comme précédemment, sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de copies indépendantes de X, et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \geq 1$. Alors, avec

$$K \,=\, M(B^d) \,=\, \big\{Mx\,;\|x\| \leq 1\big\}$$

où B^d est la boule euclidienne unité fermée dans $\mathbb{R}^d$, la forme de Strassen (4) et (5) dans $\mathbb{R}^d$ exprime que

$$\lim_{n\to\infty} d\bigg(\frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log(n)}}\,, K\bigg) \,=\, 0 \tag{17}$$

et

$$C\Bigg(\bigg(\frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log(n)}}\bigg)_{n\geq 1}\Bigg) \,=\, K \tag{18}$$

presque sûrement (avec les notations correspondantes au cas réel).

La démonstration de ces propriétés, tirée de [3], va résulter du cas uni-dimensionnel à travers des arguments de compacité et de projection. Quitte à travailler avec $M^{-1}X$, il peut être supposé que la matrice de covariance de X est l'identité et que $K = B^d$.

Il est utile, et sera librement employé ci-dessous, de noter au départ que $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ où $\Omega_1 = \big\{\sup_{n\geq 1} \frac{\|S_n\|}{\sqrt{2n\log\log(n)}} < \infty\big\}$ (d'après la LLI coordonnée par coordonnée).

Toujours d'après la LLI réelle, pour chaque $y \in \mathbb{R}^d$,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\langle y, S_n\rangle}{\sqrt{2n\log\log(n)}} \,=\, \sqrt{\mathbb{E}(\langle y, X\rangle^2)} \,=\, \|y\| \qquad \text{presque sûrement.} \tag{19}$$

Par densité dénombrable dans $\mathbb{R}^d$, il existe ainsi un ensemble mesurable Ω_2 avec $\mathbb{P}(\Omega_2) = 1$ sur lequel cette propriété a lieu pour tout $y \in \mathbb{R}^d$.

Comme dans le cas uni-dimensionnel, la propriété (17) sera acquise dès que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|S_n\|}{\sqrt{2n\log\log(n)}} \leq 1 \qquad \text{presque sûrement.} \tag{20}$$

Si ceci n'est pas le cas, il existe un ensemble de probabilité positive Ω_0 sur lequel la limite supérieure est strictement plus grande que 1. Soit alors $\omega_0 \in \Omega_0 \cap \Omega_1 \cap \Omega_1$; il existe $\eta > 0$ et une sous-suite infinie d'entiers $(n_k)_{k\geq 1}$ tels que, pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{\|S_{n_k}(\omega_0)\|}{\sqrt{2n_k\log\log(n_k)}} \geq 1 + 3\eta.$$

Il existe ensuite une suite $(z_{n_k})_{k\geq 1}$ d'éléments de norme 1 dans $\mathbb{R}^d$ telle que

$$\frac{\langle z_{n_k}, S_{n_k}(\omega_0)\rangle}{\sqrt{2n_k\log\log(n_k)}} \geq 1 + 2\eta$$

pour tout $k \geq 1$. Par compacité, la suite $(z_{n_k})_{k\geq 1}$ admet un point limite $z = z(\omega_0) \in \mathbb{R}^d$ de norme 1, et donc, pour une infinité d'entiers k,

$$\frac{\langle z(\omega_0), S_{n_k}(\omega_0)\rangle}{\sqrt{2n_k\log\log(n_k)}} \geq 1 + \eta.$$

Ceci entre toutefois en contradiction avec (19) appliqué à $y = z(\omega_0)$. L'assertion (20) s'ensuit. En vertu de (19), cette limite supérieure est en fait égale à 1.

En ce qui concerne (18), si y est de norme 1 dans $\mathbb{R}^d$,

$$\left\| \frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log(n)}} - y \right\|^2 = \left\| \frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log(n)}} \right\|^2 + 1 - 2\,\frac{\langle y, S_n\rangle}{\sqrt{2n\log\log(n)}}$$

de sorte que, d'après (20) et (19),

$$\liminf_{n\to\infty} \left\| \frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log(n)}} - y \right\| = 0 \qquad \text{presque sûrement.}$$

Ainsi, tout point de la sphère unité S^{d-1} de $\mathbb{R}^d$ est presque sûrement un point limite de la suite $\left(\frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log(n)}}\right)_{n\geq 1}$. Par densité dénombrable,

$$C\left(\left(\frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log(n)}}\right)_{n\geq 1}\right) \supset S^{d-1} \qquad \text{presque sûrement.} \tag{21}$$

Mais ce résultat est vrai en toute dimension d. Il peut être ainsi appliqué à un vecteur aléatoire $\widetilde{X} = (X, Z)$ dans $\mathbb{R}^{d+1}$ où Z est réelle centrée réduite indépendante de X. Comme, par la projection

$$\pi_{d+1,d} : (x, z) \in \mathbb{R}^{d+1} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \mapsto x \in \mathbb{R}^d,$$

$\pi_{d+1,d}(S^d) = B^d$ et, avec les notations correspondantes, $\pi_{d+1,d}(\widetilde{S_n}) = S_n$, l'inclusion (21) dans $\mathbb{R}^{d+1}$ ainsi projetée sur $\mathbb{R}^d$ donne lieu à la conclusion avec B^d en lieu et place de S^{d-1}. L'inégalité presque sûre (20) entraînant l'inclusion inverse, la conclusion (18) s'ensuit.

L'application de ce résultat dans $\mathbb{R}^2$ projeté sur $\mathbb{R}$ donne en particulier lieu à la partie (5) de Strassen sur l'ensemble d'adhérence de la LLI réelle.

L'ensemble de ces conclusions termine donc une démonstration complète de la LLI.

Références

[1] A. de Acosta. A new proof of the Hartman-Wintner law of the iterated logarithm. *Ann. Probab.* 11, 270–276 (1983).

[2] Y. S. Chow, H. Teicher. *Probability Theory.* Springer (1978).

[3] H. Finkelstein. The law of the iterated logarithm for empirical distributions. *Ann. Math. Stat.* 42, 607–615 (1971).

[4] P. Hartman, A. Winter. On the law of the iterated logarithm. *Amer. J. Math.* 63, 169–176 (1941).

[5] C. Heyde. Some properties of metrics in a study on convergence to normality. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* 11, 181–193 (1969).

[6] A. Khinchine. Über einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Fund. Math.* 6, 9–20 (1924).

[7] A. Kolmogorov. Über das Gesetz des iterieten Logarithmus. *Math. Ann.* 101, 126–135 (1929).

[8] V. Petrov. *Sums of independent random variables.* Springer (1975).

[9] W. Stout. *Almost sure convergence.* Academic Press (1974).

[10] V. Strassen. An invariance principle for the law of the iterated logarithm. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* 3, 211–226 (1964).