Sur l'inégalité de Sobolev logarithmique des opérateurs de Laguerre à petit paramètre

Laurent Miclo

Résumé : Le but de cette note est de montrer que la constante de Sobolev logarithmique associée à l'opérateur de Laguerre de paramètre $p > 0$ admet un comportement de la forme $\ln(1/p) + \mathcal{O}(1)$ quand p tend vers 0_+.

Mots clés : distribution gamma, opérateur de Laguerre, inégalité de Sobolev logarithmique, entropie.

MCS 2000 : 60E15, 60J60, 46E35, 37A25, 34L40.

1 Introduction

L'objectif de cette courte note est de prouver une estimée sur la constante de Sobolev logarithmique associée aux opérateurs de Laguerre de petit paramètre, ce qui permet de conclure à une conjecture présentée dans [3].

Plus précisément, pour $p > 0$, soit L_p l'opérateur de Laguerre défini par

$$\forall\, f \in C_{\mathrm{p}}^{\infty}(\mathbb{R}_+),\ \forall\, s \geq 0, \qquad \widetilde{L}_p[f](s) \;:=\; sf''(s) + (p-s)f'(s)$$

où $C_{\mathrm{p}}^{\infty}(\mathbb{R}_+)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ dont les dérivées ne croissent pas plus vite qu'une puissance en l'infini. Ce pré-générateur est symétrique pour la probabilité gamma donnée par

$$\forall\, s > 0, \qquad \mu_p(ds) \;:=\; \frac{1}{\Gamma(p)} s^{p-1} \exp(-s)\, ds$$

ce qui nous amène à leur associer la pré-forme de Dirichlet

$$\begin{aligned}\forall\, f, g \in C_{\mathrm{p}}^{\infty}(\mathbb{R}_+), \qquad \mathcal{E}_p(f,g) \;&:=\; -\mu_p(fL_p[g]) \\ &=\; \int sf'(s)g'(s)\,\mu_p(ds)\end{aligned}$$

et à considérer la constante de Sobolev logarithmique correspondante

$$\alpha(p) \;:=\; \sup_{f \in C_{\mathrm{p}}^{\infty}(\mathbb{R}_+)} \frac{\operatorname{Ent}(f^2, \mu_p)}{\mathcal{E}_p(f,f)} \tag{1}$$

(attention, il s'agit là de la définition "inverse" de celle présentée dans [3] qui se trouve plus commode à utiliser ici !), où rappelons que l'entropie d'une fonction $f \in \mathbb{L}^2(\mu)$ par rapport à une probabilité μ est la quantité $\operatorname{Ent}(f^2, \nu_q) = \nu_q[f^2 \ln(f^2/\nu_q[f^2])]$ (positive mais valant éventuellement $+\infty$).

Notre principal résultat ici sera l'obtention de l'estimée suivante.

J. Azéma, M. Émery, M. Ledoux, and M. Yor (Eds.): LNM 1801, pp. 222–229, 2003.

Proposition 1.1 *On est assuré de*

$$\limsup_{p\to 0_+} |\alpha(p)+\ln(p)| \;<\; +\infty$$

Ainsi le comportement de $\alpha(p)$ pour p petit se distingue de celui observé pour les "grandes" valeurs, puisque Bakry [1] a montré, en utilisant son fameux critère Γ_2 (qui n'est plus vérifié pour p petit, cette forme perdant alors sa positivité), que

$$\forall\, p \geq 1/2, \qquad \alpha(p) \;=\; 4$$

Notons aussi la différence avec la bornitude du trou spectral correspondant, qui vaut 1 pour toutes valeurs du paramètre $p > 0$ et notamment n'explose pas en 0_+.

Mais notre motivation provient de [3], où à la suite d'un article récent de Stannat [5], nous nous sommes intéressé à la constante de Sobolev logarithmique d'opérateurs de Fleming-Viot dont les mutations par sauts sont indépendantes des parents, qui n'ont ni sélection ni recombinaison et qui admettent un ensemble fini pour espace des types.

Plus spécifiquement, sur le simplexe de dimension $d \in \mathbb{N}^*$,

$$\triangle_d \;=\; \{x=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}_+^d \;:\; |x|\leq 1\}$$

où $|\cdot|$ désignera toujours une norme l^1, on considère pour tout paramètre $q=(q_1,\dots,q_{d+1})\in(\mathbb{R}_+^*)^{d+1}$, la probabilité ν_q définie par

$$\nu_q(dx) \;:=\; \frac{\Gamma(|q|)}{\prod_{1\leq i\leq d}\Gamma(q_i)}(1-|x|)^{q_{d+1}-1}\prod_{1\leq i\leq d} x_i^{q_i-1}\,dx_1\cdots dx_d$$

la pré-forme de Dirichlet

$$\forall\, f\in C^\infty(\triangle_d), \qquad \widetilde{\mathcal{E}}_q(f,f) \;:=\; \frac{1}{2}\int_{\triangle_d}\sum_{1\leq i,j\leq d} x_i(\delta_{i,j}-x_j)\partial_i f(x)\partial_j f(x)\,\nu_q(dx)$$

puis la constante de Sobolev logarithmique associée

$$\widetilde{\alpha}(q) \;:=\; \sup_{f\in C^\infty(\triangle_d)} \frac{\mathrm{Ent}(f^2,\nu_q)}{\widetilde{\mathcal{E}}_q(f,f)}$$

Comme nous l'avons annoncé et justifié dans [3], la validité d'un résultat tel que la proposition 1.1 permet de conclure à l'estimée ci-dessous, qui aux facteurs universels près, améliore la borne obtenue par Stannat [5] :

$$\forall\, d\geq 1,\ \forall\, q=(q_1,\dots,q_{d+1})\in(\mathbb{R}_+^*)^{d+1}, \qquad \widetilde{\alpha}(q) \;\leq\; \frac{320}{q_*}$$

avec $q_* := \min\{q_1,\dots,q_{d+1}\}$.

Théorème 1.2 *Il existe deux constantes* $0 < c_1 \leq c_2 < +\infty$ *telles que* $\forall\, d\geq 1,\ \forall\, q=(q_1,\dots,q_{d+1})\in(\mathbb{R}_+^*)^{d+1}$,

$$\frac{c_1}{|q|}\ln\left(\frac{|q|\wedge 1}{q_*\wedge e^{-1}}\right) \;\leq\; \widetilde{\alpha}(q) \;\leq\; \frac{c_2}{|q|}\ln\left(\frac{|q|\wedge 1}{q_*\wedge e^{-1}}\right)$$

Nous n'avions pas pu obtenir exactement la majoration précédente dans [3], car nous y utilisions des inégalités de Hardy, qui ne fournissent des estimées des constantes de Sobolev logarithmique $\alpha(p)$ valables qu'à des facteurs près.

2 Preuve de l'estimée annoncée

Pour aboutir à la proposition 1.1, nous allons essentiellement procéder à deux changements de fonction f dans la définition (1). Du moins pour montrer la majoration

$$\limsup_{p\to 0_+} \alpha(p) + \ln(p) \quad < \quad +\infty \tag{2}$$

car la minoration

$$\liminf_{p\to 0_+} \alpha(p) + \ln(p) \quad > \quad -\infty$$

est beaucoup plus immédiate. En effet, notant s l'application identité sur $\mathbb{R}_+$, on a par définition, pour tout $p > 0$,

$$\alpha(p) \geq \frac{\mathrm{Ent}(s^2, \mu_p)}{\mathcal{E}_p(s,s)} = \frac{\mathrm{Ent}(s^2, \mu_p)}{\mu_p(s)} = \frac{\mathrm{Ent}(s^2, \mu_p)}{p}$$

Or on calcule que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ent}(s^2, \mu_p) &= \int s^2 \ln(s^2)\, \mu_p(ds) - \int s^2\, \mu_p(ds) \ln\left[\int s^2\, \mu_p(ds)\right] \\
&= 2\frac{\Gamma'(2+p)}{\Gamma(p)} - p(p+1)\ln[p(p+1)] \\
&= p(p+1)\left(2\frac{\Gamma'(2+p)}{p(p+1)\Gamma(p)} - \ln[p(p+1)]\right) \\
&= p(p+1)\,(2(\ln[\Gamma(2+p)])' - \ln[p(p+1)])
\end{aligned}$$

d'où il resort que

$$\lim_{p\to 0_+} \frac{\mathrm{Ent}(s^2, \mu_p)}{\mathcal{E}_p(s,s)} + (1+p)\ln(p) \quad = \quad 2[\ln(\Gamma(2))]'$$

puis en fin de compte

$$\liminf_{p\to 0_+} \alpha(p) + \ln(p) \quad \geq \quad 2[\ln(\Gamma(2))]'$$

Venons-en donc maintenant au véritable problème, la démonstration de (2).

Notre première tâche est de nous ramener à des fonctions qui s'annulent en 0 : sur

$$C_0^\infty(\mathbb{R}_+) \quad := \quad \{f \in C_{\mathrm{p}}^\infty(\mathbb{R}_+) \ : \ f(0) = 0\}$$

on considère pour $p > 0$,

$$\widehat{\alpha}(p) \quad := \quad \sup_{f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)} \frac{\mathrm{Ent}(f^2, \mu_p)}{\mathcal{E}_p(f,f)}$$

Cette nouvelle constante est clairement plus petite que $\alpha(p)$ et pour vérifier qu'elle ne l'est pas trop, du moins pour p petit, nous allons nous inspirer d'un résultat dû à Deuschel.

Lemme 2.1 *Pour toute probabilité μ, toute fonction $f \in \mathbb{L}^2(\mu)$ et tout nombre $x \in \mathbb{R}$, on est assuré de*

$$\mathrm{Ent}(f^2, \mu) \leq \mathrm{Ent}((f-x)^2, \mu) + 2\mu[(f-x)^2]$$

Dans [2], Holley et Stroock présentent cette inégalité dans le cas particulier où $x = \mu(f)$ et ils en attribuent la preuve à Deuschel (voir leur lemme 3.7). Mais sa démarche s'adapte facilement pour traiter l'extension précédente :

Preuve :

Soit donc $f \in \mathbb{L}^2(\mu)$ donnée telle que $\mathrm{Ent}(f^2, \mu) < +\infty$, sinon on vérifie aisément que les deux membres de l'inégalité du lemme ci-dessus sont infinis. Quitte à effectuer une renormalisation (sauf dans le cas trivial où $f \equiv 0$), on peut supposer que $\mu(f^2) = 1$ et on notera $a = \mu(f)$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\begin{aligned} F_{\mu,f}(x) &= \mathrm{Ent}((f+x)^2, \mu) - \mathrm{Ent}(f^2, \mu) \\ &= \int (f+x)^2 \ln\left(\frac{(f+x)^2}{x^2+2ax+1}\right) d\mu - \mathrm{Ent}(f^2, \mu) \end{aligned}$$

qui est bien une quantité finie. La dérivation par rapport à x ne pose pas non plus de problème et on obtient

$$F'_{\mu,f}(x) = 2\int (f+x) \ln\left(\frac{(f+x)^2}{x^2+2ax+1}\right) d\mu$$

puis

$$F''_{\mu,f}(x) = 2\int \ln\left(\frac{(f+x)^2}{x^2+2ax+1}\right) d\mu + 4\frac{1-a^2}{x^2+2ax+1}$$

En utilisant l'inégalité de Jensen vis-à-vis de la fonction concave $\ln(\cdot)$ pour le premier terme et en réécrivant le second sous la forme

$$4\frac{1-a^2}{1-a^2+(a+x)^2}$$

on réalise que l'on a toujours $F''_{\mu,f}(x) \leq 4$, d'où par développement limité,

$$F_{\mu,f}(x) \leq 2x\int f \ln\left(f^2\right) d\mu + 2x^2$$

Cependant, notons que $1/f \in \mathbb{L}^2(f^2\mu)$, que $\mu[f^2/f] = a$ et que $\mu[f^2/f^2] = 1$, ainsi il apparaît que dans le cas non-trivial où $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} F_{\mu,f}(x) &= x^2 F_{f^2\mu,1/f}(1/x) + 2x\int f \ln(f^2)\, d\mu \\ &\leq x^2\left(\frac{2}{x}\int f^{-1}\ln\left(f^{-2}\right) f^2 d\mu + 2x^{-2}\right) + 2x\int f\ln(f^2)\, d\mu \\ &= 4 \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure que sous la généralité du lemme 2.1,

$$\mathrm{Ent}((f+x)^2,\mu) \quad \leq \quad \mathrm{Ent}(f^2,\mu)+2\mu[f^2]$$

■

Ainsi en choisissant $x=f(0)$, on obtient que pour tout $p>0$,

$$\alpha(p) \quad \leq \quad \widehat{\alpha}(p)+\sup_{f\in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)}\frac{\mu_p(f^2)}{\mathcal{E}_p(f,f)}$$

or en utilisant des inégalités de Hardy, on a vérifié dans [3] que le dernier terme était uniformément borné pour $0<p\leq 1/2$, bien qu'il soit infini dès que $p\geq 1$.

On est donc amené à s'intéresser à $\widehat{\alpha}(p)$ et notons que par des procédés d'approximation traditionnels, on a en fait

$$\widehat{\alpha}(p) \quad = \quad \sup_{f\in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)}\frac{\mathrm{Ent}(f^2,\mu_p)}{\mathcal{E}_p(f,f)}$$

où $C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^∞ qui sont à support compact dans $]0,+\infty[$.

Cependant, si $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, on peut l'écrire, disons pour $0<p\leq 1$ fixé, sous la forme $f=s^{1-p}g$, avec $g\in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$. Il s'agit là de notre second changement de fonction et l'entropie et l'énergie se transforment de la manière suivante.

Lemme 2.2 *Avec les notations précédentes, on a*

$$\begin{aligned}\mathrm{Ent}(f^2,\mu_p) &= \frac{\Gamma(2-p)}{\Gamma(p)}\left[\mathrm{Ent}(g^2,\mu_{2-p})+\mu_{2-p}\left[g^2\ln\left(\frac{s^{2-2p}}{\mu_p(s^{2-2p})}\right)\right]\right]\\ \mathcal{E}_p(f,f) &= \frac{\Gamma(2-p)}{\Gamma(p)}\left[(1-p)\mu_{2-p}[g^2]+\mathcal{E}_{2-p}(g,g)\right]\end{aligned}$$

Preuve :

Pour tenter de justifier le choix de la transformation précédente, commençons par considérer le cas plus général où $f=s^a g$, avec $0<a\leq 1$ quelconque.

On obtient alors immédiatement pour l'entropie

$$\begin{aligned}\mathrm{Ent}(f^2,\mu_p) &= \int s^{2a}g^2\ln\left(\frac{s^{2a}g^2}{\mu_p(s^{2a}g^2)}\right)d\mu_p\\ &= \frac{\Gamma(2a-p)}{\Gamma(p)}\int g^2\ln\left(\frac{g^2}{\mu_{2a-p}(g^2)}\frac{s^{2a}}{\mu_p(s^{2a})}\right)d\mu_{2a-p}\end{aligned}$$

ce qui se réécrit sous la forme annoncée en développant le logarithme.

Pour l'énergie, on calcule que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_p(f,f) &= \int(as^{a-1}g+s^a g')^2 s\,d\mu_p\\ &= a^2\int s^{2a-2}g^2 s\,d\mu_p+2a\int s^{2a-1}gg's\,d\mu_p+\int s^{2a}(g')^2 s\,d\mu_p\end{aligned}$$

Pour traiter le terme intermédiaire, on refait intervenir l'opérateur de Laguerre, en disant qu'il est égal à

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int (s^{2a})'(g^2)'\, sd\mu_p &= -\frac{1}{2}\int L_p[s^{2a}]g^2\, d\mu_p \\ &= -\frac{1}{2}\int [s2a(2a-1)s^{2a-2}+(p-s)2as^{2a-1}]g^2\, d\mu_p \\ &= a\int s^{2a}g^2\, d\mu_p - a(2a-1+p)\int s^{2a-1}g^2\, d\mu_p\end{aligned}$$

d'où finalement

$$\mathcal{E}_p(f,f) \;=\; \int s^{2a}(g')^2 s\, d\mu_p + a\int s^{2a}g^2\, d\mu_p - a(a-1+p)\int s^{2a-1}g^2\, d\mu_p$$

puis le choix $a = 1-p$ qui permet de se débarrasser du dernier terme.

■

Pour exploiter ceci, nous allons avoir besoin d'une autre petite majoration technique.

Lemme 2.3 *Pour tout* $0 < p \leq 1/2$, *soit*

$$M_p \;=\; \frac{\int_1^{+\infty} \ln^2(s)\, d\mu_{2-p}}{\int_1^{+\infty} \ln(s)\, d\mu_{2-p}}$$

On est assuré de

$$\sup_{0<p\leq 1/2}\ \sup_{g\in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)} \frac{\mu_{2-p}[g^2\ln_+(s)] - M_p\mu_{2-p}[g^2]}{\mathcal{E}_{2-p}(g,g)} < +\infty$$

Preuve :

En effet, commençons par introduire pour $0 < p \leq 1/2$, la probabilité m_p définie sur $[1,+\infty[$ par

$$\forall\ s\geq 1, \qquad m_p(ds) \;=\; Z_p^{-1}\ln(s)\,\mu_{2-p}(ds)$$

avec Z_p la constante de renormalisation adéquate. On peut alors écrire

$$\begin{aligned}\mu_{2-p}[g^2\ln_+(s)] &= Z_p m_p(g^2) \\ &= Z_p m_p[(g-m_p(g))^2] + Z_p m_p^2[g]\end{aligned}$$

Cependant par Cauchy-Schwartz, on a

$$\begin{aligned}Z_p m_p^2[g] &= \frac{1}{Z_p}\left(\mu_{2-p}[g\ln_+(s)]\right)^2 \\ &\leq M_p\mu_{2-p}[g^2]\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\mu_{2-p}[g^2 \ln_+(s)] - M_p\mu_{2-p}[g^2]}{\mathcal{E}_{2-p}(g,g)} &\leq \frac{Z_p m_p[(g-m_p(g))^2]}{\int_1^{+\infty}(g')^2 s\,\mu_{2-p}(ds)} \\
&\leq \frac{\int_1^{+\infty}(g-g(1))^2\ln(s)\,\mu_{2-p}(ds)}{\int_1^{+\infty}(g')^2 s\,\mu_{2-p}(ds)}
\end{aligned}$$

Utilisant à nouveau des inégalités de Hardy (voir par exemple Muckenhoupt [4]), on majore ce dernier terme par

$$\sup_{t\geq 1}\int_1^t s^{p-2}\exp(s)\,ds\int_t^{+\infty}\ln(s)s^{1-p}\exp(-s)\,ds$$

lequel est lui-même dominé uniformément en $0<p\leq 1/2$ par

$$\sup_{t\geq 1}\int_1^t s^{-3/2}\exp(s)\,ds\int_t^{+\infty}\ln(s)s\exp(-s)\,ds$$

dont on se convainc facilement de la finitude en considérant le comportement de chacun des termes pour t grand.

■

Notons que M_p reste uniformément borné pour $0<p\leq 1/2$, on peut par exemple le majorer brutalement par

$$\begin{aligned}
\frac{\int_0^{+\infty}s^2\,d\mu_{2-p}}{\int_0^{+\infty}\ln(s)\,d\mu_{2-p}} &= \frac{\Gamma(4-p)}{\int_0^{+\infty}\ln(s)s^{1-p}\exp(-s)\,ds} \\
&\leq \frac{\Gamma(4)}{\int_0^{+\infty}\ln(s)s^{1/2}\exp(-s)\,ds}
\end{aligned}$$

et posons donc

$$M \;:=\; \sup_{0<p\leq 1/2} M_p \;<\; +\infty$$

Soit $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)\setminus\{0\}$, à partir des expressions obtenues dans le lemme 2.2, on écrit alors que pour $0<p\leq 1/2$,

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{Ent}(g^2,\mu_{2-p}) + \mu_{2-p}\left[g^2\ln\left(s^{2-2p}/\mu_p(s^{2-2p})\right)\right]}{(1-p)\mu_{2-p}[g^2]+\mathcal{E}_{2-p}(g,g)} \\
&\leq\; 2\frac{\mathrm{Ent}(g^2,\mu_{2-p})}{\mathcal{E}_{2-p}(g,g)} + 2(1-p)\frac{\mu_{2-p}[g^2\ln_+(s)] - M\mu_{2-p}[g^2]}{\mathcal{E}_{2-p}(g,g)} \\
&\quad +[2(1-p)M - \ln(\mu_p[s^{2-2p}])]\frac{\mu_{2-p}[g^2]}{(1-p)\mu_{2-p}[g^2]} \\
&\leq\; 2\widehat{\alpha}(2-p) + 2(1-p)R + 2M - \ln(\mu_p[s^{2-2p}])/(1-p)
\end{aligned}$$

où $R \in \mathbb{R}_+$ est le supremum intervenant dans le lemme 2.3. Ainsi vu que $\widehat{\alpha}(2-p) \leq \alpha(2-p) = 4$ pour $0<p\leq 1/2$ d'après Bakry [1] (mais la bornitude de $\alpha(p)$ pour

$p \geq 1/2$ peut aussi s'obtenir directement, cf [3]), pour terminer de se convaincre de la validité de la proposition 1.1, il suffit de noter que

$$\begin{aligned}
-\ln(\mu_p[s^{2-2p}])/(1-p) &= \ln[\Gamma(p)/\Gamma(2-p)]/(1-p) \\
&= \frac{1}{1-p}\left[\ln\left(\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(1+p)}\right) + \ln\left(\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(2-p)}\right)\right] \\
&= \frac{\ln(p)}{1-p} + \frac{1}{1-p}\ln\left(\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(2-p)}\right) \\
&= \ln(p) - \frac{p\ln(p)}{1-p} + \frac{1}{1-p}\ln\left(\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(2-p)}\right)
\end{aligned}$$

et que les deux derniers termes sont uniformément majorés pour $0 < p \leq 1/2$.

Références

[1] D. Bakry. Remarques sur les semigroupes de Jacobi. *Astérisque*, (236) :23–39, 1996. Hommage à P. A. Meyer et J. Neveu.

[2] R. Holley and D. Stroock. Simulated annealing via Sobolev inequalities. *Communications in Mathematical Physics*, 115 :553–569, 1988.

[3] L. Miclo. About projections of logarithmic Sobolev inequalities. Préprint, 2001.

[4] B. Muckenhoupt. Hardy's inequality with weights. *Studia Mathematica*, XLIV :31–38, 1972.

[5] W. Stannat. On the validity of the log-Sobolev inequality for symmetric Fleming-Viot operators. *Ann. Probab.*, 28(2) :667–684, 2000.

miclo@cict.fr
Laboratoire de Statistique et Probabilités, UMR 5583
CNRS et Université Paul Sabatier
118, route de Narbonne
31062 Toulouse cedex 4, France