Trous spectraux à basse température : un contre-exemple à un comportement asymptotique escompté

Laurent Miclo
CNRS, UMR C5583
E-mail : miclo@cict.fr

Summary : On a general separable state space, let P be a Markovian kernel, reversible with respect to a probability μ, such that there is a spectral gap for the operator $\mathrm{Id} - P$ in $\mathbb{L}^2(\mu)$. Let P_β be the Metropolis kernel associated to P and to a potential βU, where U is a measurable bounded function and $\beta \geq 0$ is the inverse temperature. We are interested in its spectral gap $\lambda(\beta)$ and specially in the behaviour for large β of the quantity $-\beta^{-1}\ln(\lambda(\beta))$. By analogy with some classical cases, we have conjectured that it should converge to c, the largest secondary well exit height, but as we will see on a counter-example, this is not true, since $-\beta^{-1}\ln(\lambda(\beta))$ can asymptotically oscillate, and even if it converges, the limit can be different from c. We also get similar results for the asymptotical behaviour at small temperature of the isoperimetric constants $I(\beta)$, but for them the study is a little more satisfactory, as we can conclude to the convergence of $-\beta^{-1}\ln(I(\beta))$ to c, if it is equal to $\mathrm{ess\,sup}_\mu U - \mathrm{ess\,inf}_\mu U$.

Résumé : Sur un espace mesurable et séparable quelconque, soit P un noyau markovien réversible par rapport à une probabilité μ, tel que $\mathrm{Id} - P$ admette un trou spectral dans $\mathbb{L}^2(\mu)$. Considérons le noyau de Métropolis P_β associé à P et au potentiel βU, où U est une fonction mesurable bornée et où $\beta \geq 0$ est l'inverse de la température, et notons $\lambda(\beta)$ son trou spectral. On s'intéresse au comportement pour β grand de la quantité $-\beta^{-1}\ln(\lambda(\beta))$, car par analogie avec des cas classiques connus, on aurait voulu montrer qu'elle converge vers c, la plus grande hauteur de sortie de puits secondaires associée à (P, μ, U). Mais on verra sur un contre-exemple que ceci est faux, $-\beta^{-1}\ln(\lambda(\beta))$ pouvant asymptotiquement toujours osciller, et même si elle converge, la limite n'est pas nécessairement c. On obtiendra également des résultats similaires pour le comportement asymptotique à basse température des constantes isopérimétriques $I(\beta)$, cependant pour elles l'étude sera un peu plus satisfaisante, car on pourra conclure à la convergence de $-\beta^{-1}\ln(I(\beta))$ vers c, si cette constante vaut $\mathrm{ess\,sup}_\mu U - \mathrm{ess\,inf}_\mu U$.

1 Une conjecture fausse

Soit P un noyau markovien défini sur un espace mesurable et séparable $(S, \mathcal{S})$. Supposons que P admette une probabilité réversible μ, i.e. qui satisfait pour toutes fonctions mesurables et bornées f, g définies sur S,

$$\int_{S\times S} f(x)g(y)\,\mu(dx)P(x,dy) = \int_{S\times S} g(x)f(y)\,\mu(dx)P(x,dy)$$

De manière usuelle, on peut alors considérer P comme un opérateur auto-adjoint sur l'espace de Hilbert $\mathbb{L}^2(\mu)$, positif et de norme égale à 1. Notons I l'opérateur identité et faisons l'hypothèse supplémentaire (de type ergodicité forte pour le processus de Markov homogène qui admet P pour noyau d'intensités de transitions et qui part d'une probabilité initiale absolument continue par rapport à μ) que $I-P$ admet un trou spectral, c'est-à-dire que la quantité suivante est strictement positive :

$$\lambda(I-P) \stackrel{\text{déf.}}{=} \inf_{f\in\mathbb{L}^2(\mu),\,\mu(f)=0} \frac{\mathcal{E}_{I-P}(f,f)}{\mathcal{E}_{I-E_\mu}(f,f)}$$

où pour tout opérateur borné Q, on a noté

$$\forall\, f \in \mathbb{L}^2(\mu), \qquad \mathcal{E}_Q(f,f) = \int fQf\,d\mu$$

et où E_μ est l'opérateur d'espérance par rapport à μ

$$\forall\, f \in \mathbb{L}^2(\mu), \qquad E_\mu f = \mu(f)\mathbf{I}$$

$\mathbf{I}$ désignant la fonction prenant toujours la valeur 1.

Rappelons comment on peut approcher P (puis surtout $\lambda(I-P)$) par des noyaux markoviens définis sur des ensembles finis : si $\mathcal{A}$ est une sous-tribu de $\mathcal{S}$, notons $Q_\mathcal{A}$ la projection orthogonale sur $\mathbb{L}^2(S,\mathcal{A},\mu_\mathcal{A})$ (qui n'est autre que l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{A}$), où $\mu_\mathcal{A}$ est la restriction de μ à $\mathcal{A}$, et $P_\mathcal{A}$ l'opérateur sur $\mathbb{L}^2(S,\mathcal{A},\mu_\mathcal{A})$ défini par $P_\mathcal{A} = Q_\mathcal{A}P$. Il est clair que $P_\mathcal{A}$ est encore auto-adjoint (ainsi que positif et de norme égale à 1), i.e. $\mu_\mathcal{A}$ est réversible pour le noyau de Markov généralisé $P_\mathcal{A}$ sur $(S,\mathcal{A})$. De plus le trou spectral de $P_\mathcal{A}$ est alors plus grand que celui de P. En effet,

$$\begin{aligned}
\lambda(I-P_\mathcal{A}) &= 1 - \sup_{f\in\mathbb{L}^2(\mathcal{A},\mu_\mathcal{A}),\,\mu_\mathcal{A}(f)=0,\,\mu_\mathcal{A}(f^2)=1} \int fQ_\mathcal{A}Pf\,d\mu_\mathcal{A} \\
&= 1 - \sup_{f\in\mathbb{L}^2(\mathcal{A},\mu_\mathcal{A}),\,\mu(f)=0,\,\mu(f^2)=1} \int fPf\,d\mu \\
&\geq \lambda(I-P)
\end{aligned}$$

Si la sous-tribu $\mathcal{A}$ est finie, disons si elle est engendrée par une partition $S = \sqcup_{1\leq i\leq N} A_i$, indexée de telle sorte que pour un $1 \leq N_0 \leq N$, on a pour tout $1 \leq i \leq N_0$, $\mu(A_i) > 0$ et pour tout $i > N_0$, $\mu(A_i) = 0$, on peut interpréter $P_\mathcal{A}$ comme un noyau de probabilités de transitions sur l'ensemble fini $\{A_1, \cdots, A_{N_0}\}$ donné par

$$\forall\, 1 \leq i,j \leq N_0, \qquad P_\mathcal{A}(A_i,A_j) = \frac{1}{\mu(A_i)}\int \mu(dx)P(x,dy)\mathbf{I}_{A_i}(x)\mathbf{I}_{A_j}(y)$$

qui admet pour probabilité réversible celle donnant le poids $\mu(A_i)$ à A_i, pour $1 \leq i \leq N_0$.

Du fait que $\mathcal{S}$ est séparable, il existe au moins une suite croissante $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-tribus finies telle que $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{A}_n\,;\, n \in \mathbb{N})$ (on notera désormais Υ l'ensemble des telles suites $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Par la procédure précédente, on en déduit alors une suite $(P_{\mathcal{A}_n})_{n\in\mathbb{N}}$ de noyaux markoviens finis telle que $(\lambda(I-P_{\mathcal{A}_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite décroissante dont la limite est au moins supérieure à $\lambda(I-P)$. Vérifions qu'en fait

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(I-P_{\mathcal{A}_n}) = \lambda(I-P)$$

Pour ceci soit $\epsilon > 0$ et $f \in \mathbb{L}^2(\mu)$ tels que $\mu(f) = 0$ et

$$1 - \frac{\mu(fPf)}{\mu(f^2)} \leq \lambda(I - P) + \epsilon$$

il suffit de considérer pour $n \in \mathbb{N}$, f_n la projection orthogonale de f sur $\mathbb{L}^2(S, \mathcal{A}_n, \mu_{\mathcal{A}_n})$ et d'utiliser le fait que f_n converge pour n grand vers f dans $\mathbb{L}^2(\mu)$ (théorème de convergence des martingales $\mathbb{L}^2$) pour se rendre compte qu'à la limite $\lambda(I - P) + \epsilon \geq \lim_{n\to\infty} \lambda(I - P_{\mathcal{A}_n})$, puis obtenir le résultat annoncé.

Soit maintenant U un potentiel, qui sera simplement une fonction mesurable et bornée sur S, et $\beta \geq 0$ qui représentera l'inverse de la température. On peut leur associer un nouveau noyau markovien P_β défini par

$$\forall\, x \in S, \forall\, A \in \mathcal{S}, \quad P_\beta(x, A) = \int \exp(-\beta(U(y) - U(x))_+)\mathbf{1}_A(y)P(x, dy) + d_\beta(x)\delta_x(A)$$

où $d_\beta(x) = 1 - \int \exp(-\beta(U(y) - U(x))_+)P(x, dy)$.

On vérifie immédiatement que la probabilité μ_β qui admet la densité

$$S \ni x \mapsto \frac{\exp(-\beta U(x))}{Z_\beta}$$

par rapport à μ, avec $Z_\beta = \mu(\exp(-\beta U))$, est réversible pour P_β. On conviendra de poser

$$\lambda(\beta) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lambda(I - P_\beta)$$

En remarquant que pour $f \in \mathbb{L}^2(\mu_\beta)$ (qui n'est autre que $\mathbb{L}^2(\mu)$, car pour $\beta \geq 0$ fixé, les normes $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^2(\mu_\beta)}$ et $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^2(\mu)}$ sont équivalentes), on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{I-P_\beta}(f, f) &= Z_\beta^{-1} \int \mu(dx)P(x, dy) \exp(-\beta(U(x) \vee U(y)))(f(y) - f(x))^2/2 \\
\mathcal{E}_{I-E_{\mu_\beta}}(f, f) &= Z_\beta^{-2} \int \mu(dx)\mu(dy) \exp(-\beta(U(x) + U(y)))(f(y) - f(x))^2/2
\end{aligned}$$

il apparaît que l'on a l'encadrement pour tout $\beta \geq 0$,

$$\lambda(0) \exp(-2\beta(\operatorname*{ess\,sup}_\mu U - \operatorname*{ess\,inf}_\mu U)) \leq \lambda(\beta) \leq 2 \vee [\lambda(0) \exp(2\beta(\operatorname*{ess\,sup}_\mu U - \operatorname*{ess\,inf}_\mu U))]$$

et on peut se demander si la limite suivante

$$\lim_{\beta\to+\infty} \beta^{-1} \ln(\lambda(\beta))$$

existe?

Plus précisément, soit $\mathcal{A}$ une sous-tribu finie de $\mathcal{S}$, que l'on suppose à nouveau engendrée par une partition $S = \sqcup_{1\leq i\leq N} A_i$, avec pour tout $1 \leq i \leq N$, $\mu(A_i) > 0$. On peut considérer comme précédemment le noyau de probabilités de transitions $P_{\beta,\mathcal{A}}$ sur l'ensemble fini $\{A_1, \cdots, A_N\}$ associé à P_β. On a clairement

$$\begin{aligned}
\forall\, 1 \leq i \leq N, \quad \lim_{\beta\to+\infty} -\beta^{-1} \ln(\mu_\beta(A_i)) &= \operatorname*{ess\,inf}_{\mathbf{1}_{A_i}\mu} U \\
\forall\, 1 \leq i, j \leq N, \quad \lim_{\beta\to+\infty} -\beta^{-1} \ln(P_{\beta,\mathcal{A}}(A_i, A_j)) &= \operatorname*{ess\,inf}_{\mathbf{1}_{A_i\times A_j} m} W - \operatorname*{ess\,inf}_{\mathbf{1}_{A_i}\mu} U
\end{aligned}$$

où $\mathbf{I}_{A_i}\mu$ désigne la mesure admettant $\mathbf{I}_{A_i}$ pour densité par rapport à μ, où $m(dx, dy)$ est la probabilité sur $S \times S$ donnée par $\mu(x)P(x, dy)$ et où W est défini sur $S \times S$ par $W(x, y) = U(y) \vee U(x)$.

Remarquons que la dernière limite, que l'on appelera désormais $V(A_i, A_j)$ et qui est à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}_+}$, est infinie si et seulement si $m(A_i \times A_j) = 0$. On notera aussi pour $1 \leq i \leq N$, $U(A_i) = \operatorname{ess\,inf}_{\mathbf{I}_{A_i}\mu} U$. Des résultats classiques (voir Holley et Stroock [3] et la généralisation donnée dans [5], car ici on n'a pas nécessairement $V(A_i, A_j) = (U(A_j) - U(A_i))_+$ pour $1 \leq j \neq i \leq N$, que l'on peut encore étendre pour traiter notre situation actuelle, grâce à des résultats de comparaisons comme par exemple celui décrit dans le lemme 2.2.12 de [8]) permettent alors de déduire des convergences précédentes que la limite suivante existe

$$(1) \qquad c(\mathcal{A}) \stackrel{\text{déf.}}{=} -\lim_{\beta \to +\infty} \beta^{-1} \ln(\lambda(I - P_{\beta,\mathcal{A}})) \geq 0$$

et on peut décrire cette quantité uniquement en termes des $(V(A_i, A_j))_{1 \leq i \neq j \leq N}$.

Il est clair que l'application $c(\cdot)$ est croissante sur l'ensemble des sous-tribus finies de $\mathcal{S}$, ce qui nous conduit ensuite à poser

$$c \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{\mathcal{A} \text{ sous-tribu finie de } \mathcal{S}} c(\mathcal{A})$$

Si on se donne une suite croissante $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-tribus finies convergeante vers $\mathcal{S}$, la suite croissante des constantes associées $c(\mathcal{A}_n)$ ne satisfait pas nécessairement

$$\lim_{n \to \infty} \uparrow c(\mathcal{A}_n) = c$$

comme le montre le contre-exemple suivant :

L'espace des états S sera ici le cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ que l'on munit de sa tribu borélienne $\mathcal{S}$. Soit $0 < h \leq 1/2$, on considère le noyau markovien P donné par

$$\forall\, x \in S, \qquad P(x, dy) = \mathbf{I}_{]x-h, x+h[}(y) \frac{dy}{2h}$$

Il est clair que P admet pour unique probabilité invariante la mesure de Lebesgue μ qui de plus est bien réversible. Pour vérifier que $I - P$ admet un trou spectral, on utilise l'analyse de Fourier : soit $f \in \mathbb{L}^2(\mu)$ telle que $\mu(f) = 0$, on peut l'écrire dans $\mathbb{L}^2(\mu)$ sous la forme

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} a_n e_n$$

où pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, e_n est la fonction trigonométrique $S \ni x \mapsto \exp(i2\pi n x)$ et où $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^*}$ est une suite de complexes satisfaisant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{-n} = \overline{a_n}$ (car on suppose f à valeurs réelles).

On vérifie immédiatement que Pf est alors donné par

$$Pf = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \tilde{a}_n e_n$$

où pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$\tilde{a}_n = a_n \frac{\sin(2\pi n h)}{2\pi n h}$$

En utilisant le fait que

$$\begin{aligned}|2\sin(2\pi nh)| &\leq |\exp(i2\pi nh) - \exp(-i2\pi nh)| \\ &\leq \sum_{0\leq j\leq n-1} |\exp(i2\pi(n-2j)h) - \exp(-i2\pi(n-2j-2)h)| \\ &= n\,|\exp(i4\pi h) - 1|\end{aligned}$$

il apparaît que

$$\begin{aligned}\int fPf\,d\mu &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} a_n\tilde{a}_{-n} \\ &\leq \frac{|\exp(i4\pi h)-1|}{4\pi h}\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}|a_n|^2 \\ &= \frac{|\exp(i4\pi h)-1|}{4\pi h}\int f^2\,d\mu\end{aligned}$$

ce qui entraîne que

$$\lambda(I-P) \geq 1 - \frac{|\exp(i4\pi h)-1|}{4\pi h} > 0$$

Introduisons ensuite le potentiel U donné par

$$\forall\, x\in S, \qquad U(x) = -\cos(4\pi x)$$

dont les minima globaux sont 0 et 1/2. Il n'est pas très difficile de se convaincre que $c = (1+\cos(4\pi h))_+$, qui est donc strictement positif si $h < 1/4$, or on peut construire une suite $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Upsilon$ satisfaisant de plus

$$\forall\, n\in\mathbb{N}, \qquad c(\mathcal{A}_n) = 0$$

de la manière suivante :

Pour $n \geq 1$ et $0 \leq k < 2^n$, on note $A_{n,k}$ l'ensemble $]k2^{-n} - 2^{-2n}, k2^{-n} + 2^{-2n}]$ et $\mathcal{A}_n$ est alors la tribu engendrée par les ensembles $\{0\}$, $(A_{n,0} \cup A_{n,2^{n-1}}) \setminus \{0\}$ et $A_{n,k}$, pour $0 < k < 2^{n-1}$ et $2^{n-1} < k < 2^n$.

De manière plus générale, on aurait pu penser qu'il suffit que μ soit diffuse pour qu'il existe toujours une suite $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Upsilon$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c(\mathcal{A}_n) = 0$, mais ceci n'est pas vrai. En effet, considérons $S = [0,1]\times\{0,1,2\}$ que l'on munit de sa tribu naturelle $\mathcal{B}([0,1])\otimes\mathcal{P}(\{0,1,2\})$. Pour $i \in \{0,1,2\}$, soit la probabilité $\mu_i = m\otimes\delta_i$ sur $\mathcal{S}$, où m est la mesure de Lebesgue. On définit alors un noyau markovien en posant

$$\forall\, x\in S, \qquad P(x,\cdot) = \begin{cases}\mu_1(\cdot) & \text{, si } x\in[0,1]\times\{0\} \\ [\mu_0(\cdot)+\mu_2(\cdot)]/2 & \text{, si } x\in[0,1]\times\{1\} \\ \mu_1(\cdot) & \text{, si } x\in[0,1]\times\{2\}\end{cases}$$

Il est clair que P est réversible par rapport à la probabilité diffuse $\mu = (\mu_0+\mu_1+\mu_2)/3$ et que $I-P$ admet un trou spectral : en effet, soit $\mathcal{A}$ la tribu finie engendrée par la partition $S = \sqcup_{i=0}^{3}[0,1]\times\{i\}$. Pour tout $f \in \mathbb{L}^2(\mu)$, Pf est $\mathcal{A}$-mesurable, ainsi

$$\mu(fPf) \;=\; \mu(Q_{\mathcal{A}}(f)Pf) = \mu(P(Q_{\mathcal{A}}(f))f) = \mu(Q_{\mathcal{A}}(f)P(Q_{\mathcal{A}}(f)))$$

ce qui montre que

$$\begin{aligned}
\lambda(I-P) &= 1-\sup_{f\in\mathbb{L}^2(\mu),\,\mu(f)=0}\frac{\mu(fPf)}{\mu(f^2)}\\
&= 1-\sup_{f\in\mathbb{L}^2(\mu),\,\mu(f)=0}\frac{\mu(Q_{\mathcal{A}}(f)P(Q_{\mathcal{A}}(f)))}{\mu(f^2)}\\
&\geq 1-\sup_{f\in\mathbb{L}^2(\mu),\,\mu(f)=0}\frac{\mu(Q_{\mathcal{A}}(f)P(Q_{\mathcal{A}}(f)))}{\mu((Q_{\mathcal{A}}(f))^2)}\\
&= \lambda(I-P_{\mathcal{A}})
\end{aligned}$$

d'où en fin de compte $\lambda(I-P)=\lambda(I-P_{\mathcal{A}})=1$.

Introduisons ensuite le potentiel U donné par

$$\forall\, x\in S,\qquad U(x)=\begin{cases}0 & \text{, si } x\in[0,1]\times\{0\}\\ 1 & \text{, si } x\in[0,1]\times\{1\}\\ 0 & \text{, si } x\in[0,1]\times\{2\}\end{cases}$$

de sorte que dès que la sous-tribu $\mathcal{B}$ est non μ-p.s. triviale, $c(\mathcal{B})=1$.

Cependant il est évidemment toujours possible de trouver une suite $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\Upsilon$ telle que la suite croissante des constantes associées $c(\mathcal{A}_n)$ admette c pour limite, et de telles suites seraient donc d'honnêtes candidats pour fournir de relativement « bonnes » approximations de P_β à basse température. On remarque également que

$$(2)\qquad \begin{cases}\liminf_{\beta\to+\infty}-\beta^{-1}\ln(\lambda(\beta)) &\geq\; c\\ \limsup_{\beta\to+\infty}-\beta^{-1}\ln(\lambda(\beta)) &\leq\; 2(\operatorname{ess\,sup}_\mu U-\operatorname{ess\,inf}_\mu U)\end{cases}$$

Tout naturellement, on est donc amené à se demander si le résultat suivant est juste :

Conjecture (fausse) 1

Pour β grand, la quantité $-\beta^{-1}\ln(\lambda(\beta))$ converge et sa limite vaut c.

Le fait que même la seule convergence ci-dessus n'est pas toujours vérifiée implique en quelque sorte qu'il n'y a pas de « comportements canoniques agréables » pour $\mathbb{R}_+\ni\beta\mapsto\beta^{-1}\ln(\lambda(\beta))$, ou pour des quantités proches, qui en assurerait la convergence en l'infini par des arguments généraux (de type sous-additivité). Ainsi par exemple on ne peut pas avoir pour tout noyau irréductible et réversible fini P et pour tout potentiel U,

$$\lim_{\beta\to+\infty}\beta^{-1}\ln(\lambda(\beta)/\lambda(0))=\inf_{\beta\geq0}\beta^{-1}\ln(\lambda(\beta)/\lambda(0))$$

mais ce dernier point peut se voir directement sur un ensemble à deux points, où c'est d'ailleurs le comportement contraire qui apparaît :

Soit $0<a,b<1$ et pour $\beta\geq0$ posons (ce qui correspond au cas générique)

$$P_\beta=\begin{pmatrix}1-a\exp(-\beta) & a\exp(-\beta)\\ b & 1-b\end{pmatrix}$$

on a alors par la formule de la trace $\lambda(\beta)=a\exp(-\beta)+b$. Une application classique de l'inégalité de Hölder permet de voir sans effort que $]0,+\infty[\ni t\mapsto t\ln(\lambda(1/t)/\lambda(0))$

est convexe, et comme elle admet une limite en $+\infty$ (car λ est dérivable en 0), elle est nécessairement décroissante, d'où la croissance de $\mathbb{R}_+ \ni \beta \mapsto \beta^{-1}\ln(\lambda(\beta)/\lambda(0))$.

Cependant dès que l'espace à plus de trois points, même cette croissance (qui si elle s'était généralisée aurait été utile pour l'existence d'une limite, mais en l'occurence aurait été insuffisante pour son identification avec c, contrairement à une décroissance) n'est plus assurée.

Il reste toutefois à se demander s'il n'existerait pas des critères naturels (voir la dernière remarque de la section suivante) qui assurent que la conjecture précédente soit satisfaite. La motivation provient de l'étude du recuit simulé sur des espaces généraux, où il est très important de bien connaître $\limsup_{\beta\to+\infty} -\beta^{-1}\ln(\lambda(\beta))$ (voir par exemple le corollaire 14 de [6]), notamment on voudrait savoir si l'on peut l'exprimer simplement en termes des données (P,μ,U) ou du moins comment l'approximer par des quantités plus maniables pour en avoir des estimées moins grossières que la majoration par $2(\operatorname{ess\,sup}_\mu U - \operatorname{ess\,inf}_\mu U)$.

On peut considérer des questions similaires pour la constante isopérimétrique $I(P,\mu)$ relative au couple (P,μ), qui est définie de la manière suivante : à tout $A \in \mathcal{S}$, on associe la quantité

$$Q_P(A) = \int \mu(dx)P(x,dy)\,\mathbf{I}_A(x)\mathbf{I}_{S\setminus A}(y)$$

ce qui permet de poser

$$I(P,\mu) = \inf_{A\in\mathcal{S},\,\mu(A)\leq 1/2} \frac{Q_P(A)}{\mu(A)}$$

(avec la convention que le quotient ci-dessus vaut 1 si $\mu(A)=0$), qui est une constante appartenant a priori à $[0,1]$.

Notons que l'on a la même propriété d'approximation par des sous-tribus finies que pour le trou spectral. En effet, si $\mathcal{A}$ est une sous-tribu de $\mathcal{S}$, on vérifie immédiatement que

$$I(P_{\mathcal{A}},\mu_{\mathcal{A}}) = \inf_{A\in\mathcal{A},\,\mu(A)\leq 1/2} \frac{Q_P(A)}{\mu(A)}$$

ce qui montre que cette quantité est décroissante sur l'ensemble des sous-tribus de $\mathcal{S}$, et comme précédemment on montre en fait que si $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Upsilon$, alors

$$\lim_{n\to\infty} I(P_{\mathcal{A}_n},\mu_{\mathcal{A}_n}) = I(P,\mu)$$

En effet, soit $A \in \mathcal{S}$ avec $\mu(A) \leq 1/2$, il suffit de se rappeler que par un théorème de classes monotones, il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_n$ telle que $\mathbf{I}_{A_n}$ converge vers $\mathbf{I}_A$ dans $\mathbb{L}^1(\mu)$ et donc aussi dans $\mathbb{L}^2(\mu)$, et de noter que par réversibilité, $Q_P(A_n) = Q_P(S\setminus A_n)$, ce qui montre qu'en posant

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\qquad B_n = \begin{cases} A_n & ,\ \text{si } \mu(A_n)\leq 1/2 \\ S\setminus A_n & ,\ \text{sinon} \end{cases}$$

on obtient une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\{B \in \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_n \,/\, \mu(B)\leq 1/2\}$ telle que $\lim_{n\to\infty} Q_P(B_n)/\mu(B_n) = Q_P(A)/\mu(A)$, d'où découle le résultat annoncé.

Ceci permet d'ailleurs d'étendre l'inégalité de Cheeger (originellement prouvée dans un cadre de géométrie riemannienne [1]) pour les noyaux markoviens finis (voir par exemple [2] ou [8] et les références qui y sont données), qui dit que pour toute tribu finie $\mathcal{A}$,

$$\frac{I(P_{\mathcal{A}},\mu_{\mathcal{A}})^2}{2} \leq \lambda(I-P_{\mathcal{A}}) \leq 2I(P_{\mathcal{A}},\mu_{\mathcal{A}})$$

(dans cet encadrement seule la première inégalité est non-triviale) au cadre général (mais la preuve de [8] peut aussi s'adapter directement sans difficulté, voir également [4]) :

$$\frac{I(P,\mu)^2}{2} \leq \lambda(I-P) \leq 2I(P,\mu)$$

Notamment il apparaît que l'hypothèse d'existence d'un trou spectral est équivalente au fait que la constante isopérimétrique est strictement positive.

Le potentiel U étant toujours donné, on reconsidère pour tout $\beta \geq 0$ les noyaux markoviens P_β, et on se rend compte que l'on a l'encadrement

$$I(0)\exp(-\beta(\operatorname*{ess\,sup}_{\mu} U - \operatorname*{ess\,inf}_{\mu} U)) \leq I(\beta) \leq 1 \vee [I(0)\exp(\beta(\operatorname*{ess\,sup}_{\mu} U - \operatorname*{ess\,inf}_{\mu} U))]$$

où on a convenu de noter $I(\beta) = I(P_\beta,\mu(\beta))$

Par ailleurs, soit $\mathcal{A}$ une sous-tribu de $\mathcal{S}$ finie, en utilisant d'une part l'inégalité facile

$$\lambda(I-P_{\beta,\mathcal{A}}) \leq 2I(P_{\beta,\mathcal{A}},\mu_{\beta,\mathcal{A}})$$

(plus simplement, on peut montrer directement que $\limsup_{\beta\to+\infty} -\beta^{-1}\ln(I(P_{\beta,\mathcal{A}},\mu_{\beta,\mathcal{A}})) \leq c(\mathcal{A})$ en se servant du théorème 3.3.6 de [8], qui est une version isopérimétrique de l'inégalité de Poincaré que l'on utilise pour la minoration de $\lambda(I-P_{\beta,\mathcal{A}})$ intervenant dans la preuve de (1)) et d'autre part le fait que pour la majoration de $\lambda(I-P_{\beta,\mathcal{A}})$ dans la preuve de (1), on fait seulement intervenir la fonction indicatrice d'un bon « cycle » (voir la démonstration donnée dans [3], qui se généralise facilement aux cas décrits dans [5]), qui est donc aussi utilisable pour une majoration de $I(P_{\beta,\mathcal{A}},\mu_{\beta,\mathcal{A}})$, car on peut s'arranger pour en prendre un de masse plus petite que $1/2$ pour $\mu_{\beta,\mathcal{A}}$ (du moins pour β assez grand), on prouve facilement que l'on a aussi

$$c(\mathcal{A}) = -\lim_{\beta\to+\infty} \beta^{-1}\ln(I(P_{\beta,\mathcal{A}},\mu_{\beta,\mathcal{A}}))$$

Ce résultat et la remarque qui précède permettent en fait de voir que

$$c = \sup_{A\in\mathcal{S}} c(\mathcal{A}_A)$$

où $\mathcal{A}_A$ est la tribu $\{S,\emptyset,A,S\setminus A\}$. Or la quantité $c(\mathcal{A}_A)$ est facile à décrire, car elle vaut

$$\min(V(A,S\setminus A);V(S\setminus A,A)) = \operatorname*{ess\,inf}_{\mathbf{1}_{A\times(S\setminus A)}m} W - \max(\operatorname*{ess\,inf}_{\mathbf{1}_A\mu} U;\operatorname*{ess\,inf}_{\mathbf{1}_{S\setminus A}\mu} U)$$

et on retrouve donc bien l'interprétation usuelle de c en terme de « hauteurs de puits secondaires ».

Si S est dénombrable, on pourrait croire que dans le sup précédent on peut également imposer que A soit fini, mais ceci est faux, comme on le voit sur l'exemple suivant : on prend $S = \{0\} \sqcup (\mathbb{N} \times \{0,1,2\})$ muni de sa tribu naturelle $\mathcal{S}$. Soit $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une probabilité sur $\mathbb{N}$ qui en charge tous les points avec $q_0 = 1/2$, et posons

$$\forall\, x \in S, \qquad \mu(x) = \begin{cases} 2/3 & , \text{si } x = 0 \\ q_i/9 & , \text{si } x = (i,j) \in \mathbb{N} \times \{0,1,2\} \end{cases}$$

On définit ensuite pour tout $x \in S$,

$\forall\, i \in \mathbb{N}^*, \forall\, j \in \{0,2\}$,

$$\begin{aligned} P((i,j),x) &= \begin{cases} 1/3 & , \text{si } x = 0 \text{ ou } x = (0,j) \text{ ou } x = (i,1) \\ 0 & , \text{sinon} \end{cases} \\ P((0,j),x) &= \begin{cases} 2q_i/3 & , \text{si } x = (i,j) \\ 1/3 & , \text{si } x = 0 \text{ ou } x = (0,1) \\ 0 & , \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

$\forall\, i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P((i,1),x) &= \begin{cases} 1/3 & , \text{si } x = 0 \text{ ou } x = (i,0) \text{ ou } x = (i,2) \\ 0 & , \text{sinon} \end{cases} \\ P(0,x) &= \begin{cases} q_i/18 & , \text{si } x = (i,0) \text{ ou } x = (i,1) \text{ ou } x = (i,2) \\ 5/6 & , \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

et il est clair que ce noyau est réversible par rapport à μ.

De plus, puisque $\mu(0) > 1/2$ et que pour tout $x \in S$, $P(x,0) = 1/3$, il apparaît que $I(P,\mu) = 1/3$ et toutes nos hypothèses sont donc bien satisfaites. Soit U le potentiel défini par

$$\forall\, x \in S, \qquad U(x) = \begin{cases} 0 & , \text{si } x = (i,0) \text{ ou } x = (i,2), \text{ avec } i \in \mathbb{N} \\ 1 & , \text{sinon} \end{cases}$$

on vérifie que $c = 1$, mais que si $A \subset S$ est fini, alors $c(\mathcal{A}_A) = 0$. Ceci permet aussi de voir que même si S est dénombrable, on n'a pas nécessairement

$$\forall\, (\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Upsilon, \qquad \lim_{n\to\infty} \uparrow c(\mathcal{A}_n) = c$$

car ceci implique notamment que $c = \sup_{A\in\mathcal{S},\, \mathrm{card}(A)<\infty} c(\mathcal{A}_A)$ (par contre la réciproque est fausse, car il est possible de construire un exemple vérifiant nos hypothèses sur $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tel que tout élément de $\mathbb{N}$ soit relié à ses quatre plus proches voisins, tel que ∞ soit relié seulement aux entiers pairs et tel que U prenne la valeur 1 sur $2\mathbb{N}$ et 0 ailleurs).

On peut se demander si l'analogue de la conjecture précédente est satisfaite pour les constantes isopérimétriques :

Conjecture (fausse) 2

> Pour β grand, la quantité $-\beta^{-1}\ln(I(\beta))$ converge et sa limite vaut c.

Posons $b = \operatorname{ess\,sup}_\mu U - \operatorname{ess\,inf}_\mu U$, et remarquons que du moins on a toujours clairement

$$(3) \qquad \begin{cases} \liminf_{\beta\to+\infty} -\beta^{-1}\ln(I(\beta)) & \geq \; c \\ \limsup_{\beta\to+\infty} -\beta^{-1}\ln(I(\beta)) & \leq \; b \end{cases}$$

Or on peut avoir égalité entre b et c (si on reprend l'exemple précédent sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, ceci est satisfait pour le potentiel défini par $\forall\, x \in S$, $U(x) = \mathrm{I}_{\cos(4\pi x)\geq 0}$, si $0 < h \leq 1/4$, et on a aussi $b = c = 1$ pour l'exemple ci-dessus sur $\{0\} \sqcup \mathbb{N} \times \{0,1,2\}$) et (3) permet alors de conclure que dans ce cas la conjecture 2 est vérifiée, par contre, on ne peut jamais utiliser (2) (sauf dans le cas sans intérêt où U est μ-p.s. constant) pour en déduire la validité de la conjecture 1, c'est d'ailleurs ce qui a motivé notre présentation des inégalités isopérimétriques (voir également la remarque (a) de la fin de la section suivante).

Notre but dans la section suivante est de décrire un exemple relativement simple avec $b > c$ et pour lequel les deux inégalités dans (3) sont en fait des égalités. En nous servant de la majoration du trou spectral par deux fois la constante isopérimétrique, ceci nous fournira déjà un contre-exemple à la première conjecture, mais on verra aussi directement que la quantité $\beta^{-1}\ln(\lambda(\beta))$ ne converge pas non plus nécessairement pour β grand.

2 La preuve

Nous allons donner ici deux exemples construits suivant un même principe, pour le premier $-\beta^{-1}\ln(I(\beta))$ va converger pour β grand vers $b > c$, et pour le second cette quantité oscillera asymptotiquement entre b et c.

Dans un premier temps l'espace des états S sera l'ensemble dénombrable $\{0\} \sqcup (\mathbb{N} \times \{0,1,2\})$, que l'on munit tout naturellement de la tribu $\mathcal{S}$ formée de toutes ses sous-parties. On identifiera donc un noyau markovien P sur $(S, \mathcal{S})$ avec une matrice infinie $P = (P(x,y))_{x,y\in S}$. Avant de décrire celui que l'on va considérer, on va présenter la probabilité $\mu = (\mu(x))_{x\in S}$. Soit $q = (q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une probabilité sur $\mathbb{N}$ qui en charge tous les points et soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]0,1[$.

On prend

$$\forall\, x \in S, \qquad \mu(x) = \begin{cases} 2/3 & \text{, si } x = 0 \\ q_i/6 & \text{, si } x = (i,0) \text{, pour un } i \in \mathbb{N} \\ a_i q_i/6 & \text{, si } x = (i,1) \text{, pour un } i \in \mathbb{N} \\ (1-a_i)q_i/6 & \text{, si } x = (i,2) \text{, pour un } i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Les seules transitions permises pour P seront celles qui lient (dans les deux sens) 0 à des éléments de la forme $(i,1)$ ou $(i,2)$, pour $i \in \mathbb{N}$, et $(i,0)$ à $(i,1)$ ou $(i,2)$, plus éventuellement des boucles d'un élément de S vers lui même (le graphe associé est donc relativement « trapu » puisque son diamètre vaut 4, qui est aussi la plus grande longueur de ses chemins ne se recoupant pas, on aurait ainsi pu espérer être proche du cas fini). Le noyau P est alors uniquement déterminé par l'imposition que

$$\forall\, (i,j) \in \mathbb{N} \times \{1,2\}, \qquad P((i,j),0) = \frac{1}{2} = P((i,j),(i,0))$$

du fait de la réversibilité demandée par rapport à μ.

Ainsi on obtient que pour tout $(i,j) \in \mathbb{N} \times \{1,2\}$,

$$P(0,(i,j)) \;=\; \frac{3}{4}\mu((i,j))$$

$$\begin{aligned} P((i,0),(i,j)) &= \begin{cases} a_i/2 & , \text{si } j=1 \\ (1-a_i)/2 & , \text{si } j=2 \end{cases} \\ P((i,j),(i,j)) &= 0 \end{aligned}$$

puis les boucles, pour $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P(0,0) &= 7/8 \\ P((i,0),(i,0)) &= 1/2 \end{aligned}$$

toutes les probabilités de transitions non décrites étant nulles.

Nous allons dans un premier temps montrer que la constante isopérimétrique $I(0) \stackrel{\text{déf.}}{=} I(P,\mu)$ se calcule facilement et vaut en fait 1/4. Par le biais de l'inégalité de Cheeger $\lambda(I-P) \geq I(0)^2/8$, on sera alors rassuré de savoir que toutes nos conditions sont bien remplies.

Pour calculer $I(0)$, commençons par remarquer que $\mu(A) \leq 1/2$ équivaut au fait que $0 \notin A$. Ensuite considérons d'abord le cas d'un ensemble A inclus dans $\{i\} \times \{0,1,2\}$, pour un $i \in \mathbb{N}$ fixé, et notons $J = \{j \in \{1,2\} \,/\, (i,j) \in A\}$ et $J' = \{1,2\} \setminus J$.

• Si $(i,0) \in A$, on a

$$\begin{aligned} Q_P(A) &= \sum_{j \in J'} \mu((i,0))P((i,0),(i,j)) + \sum_{j \in J} \mu((i,j))P((i,j),0) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j \in J'} \mu((i,j)) + \frac{1}{2} \sum_{j \in J} \mu((i,j)) \\ &= \frac{1}{2} \mu((i,0)) \end{aligned}$$

et

$$\mu(A) = \mu((i,0)) + \sum_{j \in J} \mu((i,j)) \leq 2\mu((i,0))$$

ce qui fait apparaître que

$$\inf_{(i,0) \in A \subset \{i\} \times \{0,1,2\}} \frac{Q_P(A)}{\mu(A)} = \frac{1}{4}$$

• Si $(i,0) \notin A$, on a

$$\begin{aligned} Q_P(A) &= \sum_{j \in J} [\mu((i,j))P((i,j),0) + \mu((i,j))P((i,j),(i,0))] \\ &= \sum_{j \in J} \mu((i,j)) \\ &= \mu(A) \end{aligned}$$

Il resort de ces considérations que

$$\inf_{A \subset \{i\} \times \{0,1,2\}} \frac{Q_P(A)}{\mu(A)} = \frac{1}{4}$$

puis en fin de compte que

$$I(0) = \frac{1}{4}$$

Introduisons maintenant le potentiel U défini très simplement par

$$\forall\, x \in S, \qquad U(x) = \begin{cases} 0 & \text{, si } x = 0 \text{ ou si } x = (i,0) \text{ pour un } i \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{, si } x = (i,1) \text{ pour un } i \in \mathbb{N} \\ 2 & \text{, si } x = (i,2) \text{ pour un } i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Soit $\mathcal{A}$ une sous-tribu finie de $\mathcal{S}$, disons engendrée par une partition $S = \sqcup_{k=1}^{N} A_k$, on vérifie immédiatement que

$$c(\mathcal{A}) = \begin{cases} 0 & \text{, s'il existe } 1 \leq k \leq N \text{ tel que } A_k \supset \{0\} \cup \{(i,0) \,/\, i \in \mathbb{N}\} \\ 1 & \text{, sinon} \end{cases}$$

Ainsi $c = 1$, et ici pour tout $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Upsilon$, on a $\lim_{n\to\infty} c(\mathcal{A}_n) = 1$.

Par ailleurs, on peut reprendre les calculs ci-dessus (notons par exemple que l'on a pour tout $\beta \geq 0$, $\mu_\beta(0) = 2/(3Z_\beta) \geq 2/3$) pour montrer que

$$I(\beta) = \frac{1}{2} \inf_{i\in\mathbb{N}} \frac{a_i e^{-\beta} + (1-a_i)e^{-2\beta}}{1 + a_i e^{-\beta} + (1-a_i)e^{-2\beta}} = \frac{1}{2} \frac{e^{-2\beta} + (e^{-\beta} - e^{-2\beta}) \inf_{i\in\mathbb{N}} a_i}{1 + e^{-2\beta} + (e^{-\beta} - e^{-2\beta}) \inf_{i\in\mathbb{N}} a_i}$$

d'où si on choisit une suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\inf_{i\in\mathbb{N}} a_i = 0$,

$$I(\beta) = \frac{1}{2} \frac{e^{-2\beta}}{1 + e^{-2\beta}}$$

puis

$$\lim_{\beta\to+\infty} -\beta^{-1} \ln(I(\beta)) = 2$$

L'exemple précédent montre donc que l'on peut avoir $\limsup_{\beta\to+\infty} -\beta^{-1} \ln(I(\beta)) > c$, mais pour celui-ci la quantité $-\beta^{-1} \ln(I(\beta))$ admet une limite quand β devient grand (qui est $b = \max_S U - \min_S U$) et est en fait décroissante en $\beta \in \mathbb{R}_+$. Pour voir qu'en général on n'est même pas assuré de la convergence, on va compliquer un peu cet exemple, pour obtenir comme annoncé dans la section précédente

$$\begin{aligned} \liminf_{\beta\to+\infty} -\beta^{-1} \ln(I(\beta)) &= c \\ \limsup_{\beta\to+\infty} -\beta^{-1} \ln(I(\beta)) &= b \end{aligned}$$

On prend maintenant $S = \{0\} \sqcup (\mathbb{N} \times \{0,1,2,3\})$ que l'on munit de la probabilité μ définie de la manière suivante, à partir de la donnée d'une probabilité $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{N}$ en chargeant tous les points et de deux suites $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $]0,1/3]$:

$$\forall\, x \in S, \qquad \mu(x) = \begin{cases} 2/3 & \text{, si } x = 0 \\ q_i/6 & \text{, si } x = (i,0), \text{ pour un } i \in \mathbb{N} \\ a_i q_i/6 & \text{, si } x = (i,1), \text{ pour un } i \in \mathbb{N} \\ (1 - a_i - b_i) q_i/6 & \text{, si } x = (i,2), \text{ pour un } i \in \mathbb{N} \\ b_i q_i/6 & \text{, si } x = (i,3), \text{ pour un } i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On impose ensuite que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $1/2$ est la valeur de $P((i,1),0)$, $P((i,2),0)$, $P((i,1),(i,0))$, $P((i,2),(i,0))$ et de $P((i,3),(i,0))$, ce qui par réversibilité implique que

$$\begin{aligned} P(0,(i,j)) &= \begin{cases} a_i q_i/8 & \text{, si } j = 1 \\ (1 - a_i - b_i) q_i/8 & \text{, si } j = 2 \end{cases} \\ P((i,0),(i,j)) &= \begin{cases} a_i/2 & \text{, si } j = 1 \\ (1 - a_i - b_i)/2 & \text{, si } j = 2 \\ b_i/2 & \text{, si } j = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

et on suppose que toutes les transitions non décrites (outre les boucles) sont nulles.

Enfin on considère le potentiel U défini par

$$\forall\, x \in S, \qquad U(x) = \begin{cases} 0 & \text{, si } x = 0 \text{ ou si } x = (i,3) \text{ pour un } i \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{, si } x = (i,0) \text{ pour un } i \in \mathbb{N} \\ 2 & \text{, si } x = (i,1) \text{ pour un } i \in \mathbb{N} \\ 3 & \text{, si } x = (i,2) \text{ pour un } i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Soit $\beta \geq 0$, comme précédemment le point crucial pour évaluer $I(\beta)$ est de calculer pour $i \in \mathbb{N}$ fixé la quantité

$$\min_{A \subset \{i\}\times\{0,1,2,3\}} \frac{Q_{P_\beta}(A)}{\mu_\beta(A)}$$

et pour cela on considère à nouveau plusieurs cas, en notant toujours $J = \{j \in \{1,2\} \,/\, (i,j) \in A\}$ et $J' = \{1,2\} \setminus J$.

• Si $(i,0) \in A$ et $(i,3) \in A$, on calcule que

$$\begin{aligned} Q_{P_\beta}(A) &= \sum_{j\in J'} \mu_\beta((i,0))P_\beta((i,0),(i,j)) + \sum_{j\in J} \mu_\beta((i,j))P_\beta((i,j),0) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j\in J'} \mu_\beta((i,j)) + \frac{1}{2}\sum_{j\in J} \mu_\beta((i,j)) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1,2} \mu_\beta((i,j)) \end{aligned}$$

qui est une quantité ne dépendant pas de J, ainsi dans cette situation le cas le pire sera celui où $J = \{1,2\}$, i.e. $A = A_1 \stackrel{\text{déf.}}{=} \{(i,0),(i,1),(i,2),(i,3)\}$ et

$$\frac{Q_{P_\beta}(A_1)}{\mu_\beta(A_1)} = \frac{1}{2}\frac{a_i e^{-2\beta} + (1-a_i-b_i)e^{-3\beta}}{b_i + e^{-\beta} + a_i e^{-2\beta} + (1-a_i-b_i)e^{-3\beta}}$$

• De manière analogue, si $(i,0) \in A$ et $(i,3) \notin A$, la situation la pire est celle qui correspond à $J = \{1,2\}$, i.e. $A = A_2 \stackrel{\text{déf.}}{=} \{(i,0),(i,1),(i,2)\}$, auquel cas

$$\frac{Q_{P_\beta}(A_2)}{\mu_\beta(A_2)} = \frac{1}{2}\frac{a_i e^{-2\beta} + (1-a_i-b_i)e^{-3\beta} + b_i}{e^{-\beta} + a_i e^{-2\beta} + (1-a_i-b_i)e^{-3\beta}}$$

qui est manifestement minoré par $Q_{P_\beta}(A_1)/\mu_\beta(A_1)$.

• Si $(i,0) \notin A$ et $(i,3) \in A$, on a

$$\begin{aligned} Q_{P_\beta}(A) &= \sum_{j\in J} \mu_\beta((i,j))[P_\beta((i,j),0) + P_\beta((i,j),(i,0))] + \mu_\beta((i,3))P_\beta((i,3),(i,0)) \\ &= \sum_{j\in J} \mu_\beta((i,j)) + \frac{e^{-\beta}}{2}\mu_\beta((i,3)) \\ \mu_\beta(A) &= \sum_{j\in J} \mu_\beta((i,j)) + \mu_\beta((i,3)) \end{aligned}$$

et clairement la situation la pire correspond à $J = \emptyset$, i.e. $A = A_3 \stackrel{\text{déf.}}{=} \{(i,3)\}$, et alors

$$\frac{Q_{P_\beta}(A_3)}{\mu_\beta(A_3)} = \frac{e^{-\beta}}{2}$$

• Enfin si $(i,0) \notin A$ et $(i,3) \notin A$, on s'aperçoit que l'on a toujours $Q_{P_\beta}(A)/\mu_\beta(A) = 1$.

En résumé, puisque pour tout $\beta \geq 0$,

$$\frac{Q_{P_\beta}(A_1)}{\mu_\beta(A_1)} < \frac{Q_{P_\beta}(A_3)}{\mu_\beta(A_3)} < 1$$

on a obtenu

$$\min_{A \subset \{i\} \times \{0,1,2,3\}} \frac{Q_{P_\beta}(A)}{\mu_\beta(A)} = \frac{1}{2} \frac{a_i e^{-2\beta} + (1 - a_i - b_i)e^{-3\beta}}{b_i + e^{-\beta} + a_i e^{-2\beta} + (1 - a_i - b_i)e^{-3\beta}}$$

puis pour tout $\beta \geq 0$,

$$I(\beta) = \frac{1}{2} \inf_{i \in \mathbb{N}} \frac{a_i e^{-2\beta} + (1 - a_i - b_i)e^{-3\beta}}{b_i + e^{-\beta} + a_i e^{-2\beta} + (1 - a_i - b_i)e^{-3\beta}}$$

et notamment pour $\beta = 0$,

$$I(0) = \frac{1}{2} \inf_{i \in \mathbb{N}} \frac{1 - b_i}{2} \geq \frac{1}{6}$$

car on a imposé que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $b_i \leq 1/3$, ainsi le modèle initial $(S, \mathcal{S}, P, \mu)$ admet bien une constante isopérimétrique strictement positive.

Notons que l'on a l'encadrement suivant pour tous $i \in \mathbb{N}$ et $\beta \geq 0$,

$$\frac{1}{6} e^{-2\beta} \frac{a_i + e^{-\beta}}{b_i + e^{-\beta}} \leq \frac{a_i e^{-2\beta} + (1 - a_i - b_i)e^{-3\beta}}{b_i + e^{-\beta} + a_i e^{-2\beta} + (1 - a_i - b_i)e^{-3\beta}} \leq e^{-2\beta} \frac{a_i + e^{-\beta}}{b_i + e^{-\beta}}$$

de sorte que pour étudier le comportement en β grand de $\beta^{-1} \ln((I(\beta))$, il suffit de s'intéresser à la quantité

$$g(\beta) \stackrel{\text{déf.}}{=} \beta^{-1} \ln \left(\inf_{i \in \mathbb{N}} \frac{a_i + e^{-\beta}}{b_i + e^{-\beta}} \right)$$

On aura déjà réalisé qu'ici $c = 2$ et $b = 3$, ainsi prouver le résultat annoncé revient à voir que l'on peut trouver des suites $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telles que

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} \liminf_{\beta \to +\infty} g(\beta) & = & -1 \\ \limsup_{\beta \to +\infty} g(\beta) & = & 0 \end{array} \right.$$

La construction qui suit est due au referee: soit $(\chi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]0,1[$ telle que $\chi_{2i} > \chi_{2j+1}$ pour tous $i, j \in \mathbb{N}$ et telle que $\lim_{i \to \infty} \chi_{2i} = 1$ et $\lim_{i \to \infty} \chi_{2i+1} = 0$. Il suffit de trouver trois suites décroissantes, $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$, d'éléments de $]0, 1/3]$, satisfaisant les conditions suivantes pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$(5) \qquad \frac{a_i}{b_i} < 1$$

$$(6) \qquad \frac{a_{i+1} + \epsilon_i}{b_{i+1} + \epsilon_i} = \frac{a_i + \epsilon_i}{b_i + \epsilon_i}$$

$$(7) \qquad \frac{a_i + \epsilon_i}{b_i + \epsilon_i} = \epsilon_i^{\chi_i}$$

$$(8) \qquad \lim_{i \to \infty} \epsilon_i = 0$$

En effet, (6) implique que $(a_i+\epsilon_i)/(b_i+\epsilon_i)$ est la pente qui permet d'aller des points (b_{i+1}, a_{i+1}) à (b_i, a_i) dans $\mathbb{R}^2$. Or du fait de (5), l'application $\mathbb{R}_+ \ni \epsilon \mapsto (a_i+\epsilon)/(b_i+\epsilon)$ est strictement croissante, d'où

$$\frac{a_i + \epsilon_i}{b_i + \epsilon_i} \geq \frac{a_{i+1} + \epsilon_{i+1}}{b_{i+1} + \epsilon_{i+1}}$$

ce qui montre que les points (b_i, a_i), $i \in \mathbb{N}$, forment les sommets d'un graphe polygonal convexe de $\mathbb{R}^2$.

Ainsi, puisque $\inf_{i\in\mathbb{N}}(a_i + \epsilon)/(b_i + \epsilon)$ est la plus petite pente de (0,0) à l'un des sommets $(b_i + \epsilon, a_i + \epsilon)$ du translaté par (ϵ, ϵ) de ce graphe, il apparaît par convexité (faire un dessin) que pour $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, cet infimum est atteint et vaut $(a_j + \epsilon)/(b_j + \epsilon)$ où j est tel que $\epsilon \in [\epsilon_j, \epsilon_{j-1}]$.

En effectuant la conversion $\beta = -\ln(\epsilon)$ et en nous servant de (7) et (8), on obtient alors (4).

Il reste donc à construire par récurrence les trois suites :

• Pour l'initialisation, posons (par exemple) $b_0 = 1/3$, et choisissons a_0 et ϵ_0 tels que $0 < a_0 < 1/3$, $0 < \epsilon_0 < 1/3$ et

$$\frac{a_0 + \epsilon_0}{b_0 + \epsilon_0} = \epsilon_0^{\chi_0}$$

ce qui est toujours possible, car pour $\epsilon > 0$ suffisament petit, $0 < \epsilon^{\chi_0}(b_0+\epsilon) - \epsilon < 1/3$.

• Passage de $2i$ à $2i+1$, $i \in \mathbb{N}$: il suffit de poser $a_{2i+1} = a_{2i}$ et $b_{2i+1} = b_{2i}$, car du fait que l'expression $(a_{2i+1} + \epsilon)/(b_{2i+1} + \epsilon) - \epsilon^{\chi_{2i+1}}$ est strictement négative en $\epsilon = \epsilon_{2i}$ (rappelons que $\chi_{2i+1} < \chi_{2i}$) et strictement positive en 0, elle s'annule au moins en un point appelé $\epsilon_{2i+1} \in]0, \epsilon_{2i}[$.

• Passage de $2i-1$ à $2i$, $i \in \mathbb{N}^*$: considérons la relation (6) comme la définition d'une fonction b_{2i} de la variable $a_{2i} \in]0, a_{2i-1}[$, fonction qui est croissante et qui admet une limite strictement positive en 0_+ (et b_{2i-1} en $a_{2i-1}-$). Choisissons alors $a_{2i} < \epsilon_{2i-1}$ suffisament petit de sorte que

$$\frac{a_{2i} + a_{2i}}{b_{2i} + a_{2i}} < a_{2i}^{\chi_{2i}}$$

(en utilisant que $\chi_{2i} < 1$), et considérons l'application

$$]0, \epsilon_{2i-1}] \ni \epsilon \mapsto \frac{a_{2i} + \epsilon}{b_{2i} + \epsilon} - \epsilon^{\chi_{2i}}$$

Celle-ci est strictement négative (resp. strictement positive) en a_{2i} (resp. ϵ_{2i-1}, car $\chi_{2i} > \chi_{2i-1}$) et par continuité s'annule donc en un point $\epsilon_{2i} \in]a_{2i}, \epsilon_{2i-1}[$ qui convient.

Notons que par construction les trois suites sont bien décroissantes, et admettent donc respectivement des limites a_∞, b_∞ et ϵ_∞. Si ϵ_∞ devait être strictement positive, en passant à la limite dans les équations (7), séparément pour les indices pairs et impairs, on aboutirait à la contradiction $\epsilon_\infty = 1$, d'où $\epsilon_\infty = 0$.

Ainsi la quantité $\beta^{-1}\ln(I(\beta))$ peut asymptotiquement osciller. Pour voir qu'il peut en être de même pour $\beta^{-1}\ln(\lambda(\beta))$, on reprend l'exemple ci-dessus sur $\{0\} \sqcup (\mathbb{N} \times \{0, 1, 2, 3\})$.

Notons que pour tout $\beta \geq 0$, on a

$$\lambda(\beta) = \inf_{f\in\mathbb{L}^2(\mu_\beta)\setminus\mathrm{Vect}(\mathbb{1})} \frac{\sum_{x,y\in S}(f(y) - f(x))^2\alpha_\beta(x, y)}{\sum_{x,y\in S}(f(y) - f(x))^2\mu_\beta(x)\mu_\beta(y)}$$

avec pour tous $x, y \in S$, $\alpha_\beta(x,y) = \mu_\beta(x)P_\beta(x,y)$.

Pour $i \in \mathbb{N}$, posons $S_i = \{0\} \sqcup (\{i\} \times \{0,1,2,3\})$ et remarquons qu'en utilisant le fait que $\sum_{x\neq 0} \mu_\beta(x) \leq \mu_\beta(0)$, on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\neq j\in\mathbb{N}} \sum_{x\in S_i\setminus\{0\},\, y\in S_j\setminus\{0\}} (f(y)-f(x))^2\mu_\beta(x)\mu_\beta(y) \\
&\leq \sum_{i\neq j\in\mathbb{N}} \sum_{x\in S_i\setminus\{0\},\, y\in S_j\setminus\{0\}} 2[(f(y)-f(0))^2+(f(x)-f(0))^2]\mu_\beta(x)\mu_\beta(y) \\
&\leq 4\sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{x\in S_i} (f(x)-f(0))^2\mu_\beta(x)\mu_\beta(0) \\
&\leq 4\sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{x\in S_i,\, y\in S_i} (f(y)-f(x))^2\mu_\beta(x)\mu_\beta(y)
\end{aligned}$$

ce qui fait resortir l'encadrement

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{x,y\in S_i} (f(y)-f(x))^2\mu_\beta(x)\mu_\beta(y) &\leq \sum_{x,y\in S} (f(y)-f(x))^2\mu_\beta(x)\mu_\beta(y) \\
&\leq 5\sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{x,y\in S_i} (f(y)-f(x))^2\mu_\beta(x)\mu_\beta(y)
\end{aligned}$$

D'autre part on a aussi

$$\sum_{x,y\in S} (f(y)-f(x))^2\alpha_\beta(x,y) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{x,y\in S_i} (f(y)-f(x))^2\alpha_\beta(x,y)$$

et on est donc amené à poser pour $i \in \mathbb{N}$

$$\lambda_i(\beta) = \inf_{f\in F(S_i)\setminus \mathrm{Vect}(\mathbb{I})} \frac{\sum_{x,y\in S_i}(f(y)-f(x))^2\alpha_\beta(x,y)}{\sum_{x,y\in S_i}(f(y)-f(x))^2\mu_\beta(x)\mu_\beta(y)}$$

(où $F(S_i)$ est l'ensemble des fonctions définies sur S_i), car les considérations précédentes montrent que

$$\inf_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i(\beta) \leq \lambda(\beta) \leq 5 \inf_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i(\beta)$$

Intéressons-nous donc à $\lambda_i(\beta)$. Théoriquement, il est possible d'expliciter cette quantité, car cela revient à trouver les valeurs propres d'une matrice 5×5, dont on sait a priori que l'une des valeurs propres est 0. Mais en pratique de tels calculs sont déjà trop compliqués et on va plutôt se ramener au cas de trois points. Pour simplifier les notations, on laisse tomber un moment l'indice $i \in \mathbb{N}$, supposé fixé, et on pose $1 = (i,0)$, $2 = (i,1)$, $3 = (i,2)$ et $4 = (i,3)$. Notons également $S^{(1)} = \{0,1,4\}$ et $S^{(2)} = \{0,2,3\}$, sur lesquels ensembles on considère les « matrices hors diagonale »

$$\alpha_\beta^{(1)} = \begin{pmatrix} * & \alpha_\beta^{(1)}(0,1) & 0 \\ \alpha_\beta^{(1)}(0,1) & * & \alpha_\beta(1,4) \\ 0 & \alpha_\beta(1,4) & * \end{pmatrix}$$

avec $\alpha_\beta^{(1)}(0,1) = (\alpha_\beta(0,3)\wedge\alpha_\beta(3,1)) + (\alpha_\beta(0,2)\wedge\alpha_\beta(2,1)) = \alpha_\beta(0,3)+\alpha_\beta(0,2)$, car on aura noté que pour tout $\beta \geq 0$, $\alpha_\beta(0,3) = \alpha_\beta(3,1)$ et $\alpha_\beta(0,2) = \alpha_\beta(2,1)$, et

$$\alpha_\beta^{(2)} = \begin{pmatrix} * & \alpha_\beta(0,2) & \alpha_\beta(0,3) \\ \alpha_\beta(0,2) & * & 0 \\ \alpha_\beta(0,3) & 0 & * \end{pmatrix}$$

Pour $j = 1, 2$, posons alors

$$\lambda^{(j)}(\beta) = \inf_{f \in F(S^{(j)}) \setminus \mathrm{Vect}(\mathbb{1})} \frac{\sum_{x \neq y \in S^{(j)}} (f(y) - f(x))^2 \alpha_\beta^{(j)}(x, y)}{\sum_{x \neq y \in S^{(j)}} (f(y) - f(x))^2 \mu_\beta(x) \mu_\beta(y)}$$

En utilisant des inégalités du type

$$\forall\, f \in F(S), \qquad (f(1) - f(3))^2 + (f(3) - f(0))^2 \geq \frac{1}{2}(f(0) - f(3))^2 + \frac{1}{4}(f(1) - f(0))^2$$

on voit que pour tout $f \in F(S)$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{x \neq y \in S} (f(y) - f(x))^2 \alpha_\beta(x, y) \\
&\quad \geq \frac{1}{4}\left(\sum_{x \neq y \in S^{(1)}} (f(y) - f(x))^2 \alpha_\beta^{(1)}(x, y) + \sum_{x \neq y \in S^{(2)}} (f(y) - f(x))^2 \alpha_\beta^{(2)}(x, y) \right)
\end{aligned}$$

or comme précédemment, on vérifie que pour tout $f \in F(S)$, on a aussi

$$\begin{aligned}
&\sum_{x \neq y \in S} (f(y) - f(x))^2 \mu_\beta(x) \mu_\beta(y) \\
&\quad \leq 3\left(\sum_{x \neq y \in S^{(1)}} (f(y) - f(x))^2 \mu_\beta(x) \mu_\beta(y) + \sum_{x \neq y \in S^{(2)}} (f(y) - f(x))^2 \mu_\beta(x) \mu_\beta(y) \right)
\end{aligned}$$

ainsi il resort que

$$\lambda(\beta) \geq \frac{1}{12}(\lambda^{(1)}(\beta) \wedge \lambda^{(2)}(\beta))$$

D'autre part, en considérant les fonctions dont les valeurs sur $\{0, 1, 3\}$ sont égales, il est clair que

$$\lambda^{(1)}(\beta) \geq \lambda(\beta)$$

Ceci nous conduit donc à estimer $\lambda^{(1)}(\beta)$: manifestement il s'agit là de la plus petite valeur propre non nulle de la matrice

$$(\mu_\beta(S^{(1)}))^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_\beta^{(1)}(0,1)/\mu_\beta(0) & -\alpha_\beta^{(1)}(0,1)/\mu_\beta(0) & 0 \\ -\alpha_\beta^{(1)}(0,1)/\mu_\beta(1) & (\alpha_\beta^{(1)}(0,1) + \alpha_\beta(1,4))/\mu_\beta(1) & -\alpha_\beta(1,4)/\mu_\beta(1) \\ 0 & -\alpha_\beta(1,4)/\mu_\beta(4) & \alpha_\beta(1,4)/\mu_\beta(4) \end{pmatrix}$$

Toujours à partir de la formulation variationnelle de cette valeur propre, on s'aperçoit qu'à un multiple près, qui est minoré et majoré par des constantes strictement positives universelles, il suffit de considérer la plus petite valeur propre non nulle $\widetilde{\lambda}^{(1)}(\beta)$ associée à la matrice

$$\widetilde{\alpha}_\beta^{(1)} = \begin{pmatrix} q(ae^{-2\beta} + e^{-3\beta}) & -q(ae^{-2\beta} + e^{-3\beta}) & 0 \\ -(ae^{-\beta} + e^{-2\beta}) & ae^{-\beta} + e^{-2\beta} + b & -b \\ 0 & -e^{-\beta} & e^{-\beta} \end{pmatrix}$$

Ceci nous amène à une équation du second degré que l'on résoud pour obtenir

$$\widetilde{\lambda}^{(1)}(\beta) = \frac{1}{2}(A_\beta - \sqrt{A_\beta^2 - 4B_\beta})$$

avec

$$\begin{aligned} A_\beta &= qe^{-3\beta} + (1+aq)e^{-2\beta} + (a+1)e^{-\beta} + b \\ B_\beta &= e^{-2\beta}(a+e^{-\beta})(1+q(e^{-\beta}+b)) \end{aligned}$$

Remarquons que l'on a, pour $\beta \geq 0$,

$$\begin{aligned} 0 \leq 4\frac{B_\beta}{A_\beta^2} &\leq \frac{4e^{-2\beta}(a+e^{-\beta})(1+(1+1/3))}{(b+e^{-\beta})^2} \\ &\leq \frac{28}{3}\frac{a+e^{-\beta}}{b+e^{-\beta}}e^{-\beta} \\ &\leq \frac{28}{3}e^{-\beta} \end{aligned}$$

car par notre choix des a_i et des b_i, pour $i \in \mathbb{N}$, on a toujours $a \leq b$, d'où $(a + e^{-\beta})/(b+e^{-\beta}) \leq 1$.

Ainsi on voit qu'il existe deux constantes universelles $C, D > 0$ (désormais C et D désigneront de telles constantes, dont les valeurs changeront de lignes en lignes, l'important étant qu'elles ne dépendent pas de l'indice $i \in \mathbb{N}$ caché) telles que pour tout $\beta \geq 3$, $1 - CB_\beta/A_\beta^2 \leq \sqrt{1-4B_\beta/A_\beta^2} \leq 1 - DB_\beta/A_\beta^2$, ce qui implique que

$$CB_\beta/A_\beta^2 \leq \widetilde{\lambda}^{(1)}(\beta) \leq DB_\beta/A_\beta^2$$

puis en utilisant que $0 \leq q, a, b, e^{-\beta} \leq 1$, on fait plus précisément apparaître que

$$C\frac{a+e^{-\beta}}{b+e^{-\beta}}e^{-2\beta} \leq \widetilde{\lambda}^{(1)}(\beta) \leq D\frac{a+e^{-\beta}}{b+e^{-\beta}}e^{-2\beta}$$

D'une manière similaire (et même plus simplement), on montre un encadrement

$$C \leq \lambda^{(2)}(\beta) \leq D$$

En fin de compte, en quittant S_i (que l'on notait S !) pour revenir à S, on a donc

$$C \inf_{i\in\mathbb{N}} \frac{a_i+e^{-\beta}}{b_i+e^{-\beta}}e^{-2\beta} \leq \lambda(\beta) \leq D \inf_{i\in\mathbb{N}} \frac{a_i+e^{-\beta}}{b_i+e^{-\beta}}e^{-2\beta}$$

ce qui fait apparaître que pour étudier le comportement asymptotique de $\beta^{-1}\ln(\lambda(\beta)) - 2$, il suffit de s'intéresser à celui de

$$\beta^{-1}\ln\left(\inf_{i\in\mathbb{N}} \frac{a_i+e^{-\beta}}{b_i+e^{-\beta}}\right)$$

ce qui a déjà été fait. On obtient donc finalement

$$\begin{aligned} \liminf_{\beta\to+\infty} -\beta^{-1}\ln(\lambda(\beta)) &= c = 2 \\ \limsup_{\beta\to+\infty} -\beta^{-1}\ln(\lambda(\beta)) &= b = 3 \end{aligned}$$

Remarques :

a) Notons que pour les exemples présentés dans cette section on a toujours

$$(9) \qquad \lim_{\beta\to+\infty} \beta^{-1}\ln\left(\frac{\lambda(\beta)}{I(\beta)}\right) = 0$$

et il serait intéressant de savoir dans quelle mesure il s'agit là d'un résultat général (peut-être cela n'est-il dû qu'au fait que les longueurs des chemins ne se recoupant pas sont bornées pour les graphes considérés).

b) Si l'on cherche à trouver des critères assurant la validité des conjectures 1 ou 2, la première idée est d'introduire une topologie et des hypothèses de compacité et de continuité.

Ainsi par exemple on pourrait supposer de plus que S est un espace métrique compact, que $\mathcal{S}$ est sa tribu borélienne, que P est fellerien (i.e. l'image d'une fonction continue bornée est elle-même continue) et que U est continu. Mais ceci est insuffisant, car on peut transformer l'exemple précédent en un contre-exemple sur $S = \{0\} \sqcup ([0,1] \times \{0,1,2,3\})$ que l'on munit de la distance définie par

$\forall\, x, y \in S,$

$$d(x,y) = \begin{cases} |t-s| & , \text{si } x=(s,i) \text{ et } y=(t,i) \text{ avec } 0\le s,t\le 1 \text{ et } i\in\{0,1,2,3\} \\ 0 & , \text{si } x=y \\ 1 & , \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi S est compact et $\mathcal{S}$ désignera sa tribu borélienne.

Par analogie avec ce qui précède, donnons nous une probabilité q sur $[0,1]$ dont le support est $[0,1]$ et deux fonctions continues $a, b : [0,1] \to [0,1/3]$ dont le seul point d'annulation éventuelle soit 1. Il existe alors une unique probabilité μ sur S telle que pour tout borélien A de $[0,1]$, on ait

$$\mu(A\times\{i\}) = \begin{cases} q(A)/6 & , \text{si } i=0 \\ \int_A a_t\, q(dt)/6 & , \text{si } i=1 \\ \int_A (1-a_t-b_t)\, q(dt)/6 & , \text{si } i=2 \\ \int_A b_t\, q(dt)/6 & , \text{si } i=3 \end{cases}$$

On considère ensuite le noyau markovien P fellerien donné d'une part par

$\forall\, 0\le s\le 1,$

$$\begin{aligned} P((s,0),\cdot) &= \frac{1}{2}(a_t\delta_{(s,1)}(\cdot) + (1-a_t-b_t)\delta_{(s,2)}(\cdot) + b_t\delta_{(s,3)}(\cdot) + \delta_{(s,0)}(\cdot)) \\ P((s,1),\cdot) &= \frac{1}{2}(\delta_{(s,0)}(\cdot) + \delta_0(\cdot)) \\ P((s,2),\cdot) &= \frac{1}{2}(\delta_{(s,0)}(\cdot) + \delta_0(\cdot)) \\ P((s,3),\cdot) &= \frac{1}{2}(\delta_{(s,0)}(\cdot) + \delta_{(s,3)}(\cdot)) \end{aligned}$$

et d'autre part en posant pour tout $A \in \mathcal{S}$,

$$P(0,A) = \frac{7+\int b_s\, q(ds)}{8}\delta_0(A) + \frac{1}{8}\int \mathbf{I}_A(s,1)\, a_s q(ds) + \frac{1}{8}\int \mathbf{I}_A(s,2)\,(1-a_s-b_s)q(ds)$$

Puis on définit le potentiel U en posant

$$\forall\, x\in S, \qquad U(x) = \begin{cases} 0 & , \text{si } x=0 \text{ ou si } x=(s,3) \text{ pour un } s\in[0,1] \\ 1 & , \text{si } x=(s,0) \text{ pour un } s\in[0,1] \\ 2 & , \text{si } x=(s,1) \text{ pour un } s\in[0,1] \\ 3 & , \text{si } x=(s,2) \text{ pour un } s\in[0,1] \end{cases}$$

Il est alors possible de reprendre les preuves précédentes pour obtenir les mêmes résultats de divergence (faire décrire à $(b_t, a_t)_{t\geq 0}$ le graphe convexe polygonal dont les sommets sont les points $(b_i, a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ construits précédemment, et voir aussi la fin de l'introduction de [7], où l'on vient de vérifier directement que (9) est généralement satisfait pour le type d'exemples considérés ici).

L'avantage de cet exemple est de suggérer que ce qui manque encore à P est peut-être une « propriété d'ellipticité », au sens par exemple où les probabilités $P(x, \cdot)$ seraient uniformément (en $x \in S$) absolument continues par rapport à $\mu(\cdot)$.

Remerciements :

Je tiens tout particulièrement à exprimer ma gratitude envers le referee qui m'a fourni la preuve de (4) présentée ici, la démonstration initiale était beaucoup moins élégante.

Références

[1] J. Cheeger. A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacien. In R. C. Gunning, editor, *Problems in Analysis: A Symposium in Honor of S. Bochner*, pages 195–199. Princeton University Press, 1970.

[2] P. Diaconis and D. Stroock. Geometric bounds for eigenvalues of Markov chains. *The Annals of Applied Probability*, 1(1):36–61, 1991.

[3] R. Holley and D. Stroock. Simulated annealing via Sobolev inequalities. *Communications in Mathematical Physics*, 115:553–569, 1988.

[4] G. Lawler and A. Sokal. Bounds on the L^2 spectrum for Markov chains and Markov processes: a generalization of Cheeger's inequality. *Transactions of the American mathematical society*, 309(2):557–580, October 1988.

[5] L. Miclo. Recuit simulé sans potentiel sur un ensemble fini. In J. Azéma, P.A. Meyer, and M. Yor, editors, *Séminaire de Probabilités XXVI*, Lecture Notes in Mathematics 1526, pages 47–60. Springer-Verlag, 1992.

[6] L. Miclo. Convergence sous-exponentielle de l'entropie des chaînes de Markov à trou spectral. Préprint, 1996.

[7] L. Miclo. Une variante de l'inégalité de Cheeger pour les chaînes de Markov finies. Préprint, 1997.

[8] L. Saloff-Coste. Lectures on finite Markov chains. Cours à l'Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXVI-1996, provisional draft, 1996.