# Sur les temps d'occupations des processus de Markov finis inhomogènes à basse température

Laurent Miclo
Université Paul Sabatier de Toulouse

**Summary :** For a family of generalised annealing algorithms associated to a fixed cost function on an irreducible finite graph and whose evolutions of temperature get in some sense, smaller and smaller, we study the subsets for which an inhomogeneous strong law of large numbers before the exit time is satisfied. Thus by an application of semi-group methods and calculus of compensators, we find the cycles and their associated decompositions that Hwang and Sheu have introduced in this context by another method. By using them we give, for arbitrary subsets, results of weak convergence for the joint law of the exit position and the renormalisation of exit time and of the occupation times of one of its points, as the (inhomogeneous) evolutions of temperatures tend to vanish. Then we deduce from them limit theorems satisfied in large time by the renormalised processes of occupation times of any recurrent points for critical (relatively to the ergodicity in law) generalised annealing algorithms. It appears that in general, "few" points verify a law of large numbers (in particular it is not satisfied by the points of minimal virtual energy), but instead we get weak convergence towards a non deterministic process which can be represented by means of simple functionals of a stationary Markov process indexed by $\mathbb{R}$ (depending on the points, the limit process is either continuous, in which case the convergence is weak for the local uniform topology, or purely of jumps, and then we have only weak convergence of the finite marginals).

**Résumé :** Pour une famille d'algorithmes de recuit généralisés associés à une même fonction de coût sur un graphe fini irréductible et dont les évolutions de la température sont d'une certaine manière de plus en plus basses, on s'intéresse aux sous-ensembles pour lesquels est satisfaite en chacun de ses points une loi forte des grands nombres (inhomogène) avant sortie. On retrouve ainsi par le biais d'une méthode de semi-groupes et de calculs de compensateurs appliqués à l'évaluation de temps d'occupations, les cycles et les décompositions associées qui ont été introduits dans ce contexte par Hwang et Sheu. Celles-ci nous permettent d'obtenir pour des ensembles quelconques, des résultats de convergence en loi pour des renormalisations des temps de sortie et des temps d'occupations de points avant sortie, ainsi que de la position de sortie, à basse température (inhomogène). On en déduit ensuite, pour des algorithmes de recuit généralisés critiques (relativement à l'ergodicité en loi), les théorèmes limites vérifiés en temps grand par les processus renormalisés de temps d'occupations de points récurrents. Il apparaît en général que pour ceux-ci les lois des grands nombres ne sont satisfaites que par "peu" de points (et notamment pas par ceux d'énergie virtuelle minimum), mais que l'on obtient à la place une convergence en loi vers un processus non déterministe qui peut se représenter à partir de fonctionnelles simples d'un certain processus de Markov stationnaire indexé par $\mathbb{R}$ (suivant les points, le processus limite est, soit continu, auquel cas la convergence est étroite pour la topologie uniforme locale, soit uniquement de sauts et on considère alors la convergence étroite des marginales finies).

---

**Abbreviated title :** Temps d'occupations inhomogènes.

**American Mathematical Society 1991 subject classifications :** Primary 60J05 ; secondary 60F17 and 60J10.

**Key words and phrases :** Inhomogeneous Markov processes at vanishing temperature, limit theorems for occupations times (before exit or in large time), decompositions in cycles, generalised exit problems.

# 1 Introduction

Cet article est la suite directe de [11], et conformément à la promesse qui y avait été faite, nous allons donner des applications des résultats obtenus sur les problèmes de sortie discrets, principalement celles concernant le comportement asymptotique des temps d'occupations convenablement renormalisés de certains processus de Markov finis inhomogènes dont la température tend à s'annuler.

Nous nous référerons donc largement à cet article précédent, dont nous reprendrons souvent les estimées et parfois les notations.

Néanmoins, commençons par rappeler les notions les plus importantes :

Soit $M$ un ensemble fini et $q = (q(x,y))_{(x,y)\in\check{M}}$ une famille de réels positifs indexée par $\check{M}$ qui est $M \times M$ privé de sa diagonale. Pour $(x,y) \in \check{M}$, on dit que la transition de $x$ à $y$ est permise si $q(x,y) > 0$, et on appelle chemin allant de $x$ à $y$ toute suite finie $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ d'éléments de $M$ issue de $x$ ($x_1 = x$), arrivant en $y$ ($x_n = y$), et dont toutes les transitions de $x_i$ à $x_{i+1}$ sont permises ($1 \leq i < n$). On suppose que $(M,q)$ est irréductible, c'est-à-dire que pour tout $(x,y) \in \check{M}$, il existe au moins un chemin allant de $x$ à $y$.

On se donne également une fonction $V$ définie sur $\check{M}$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ vérifiant

$$\forall\ (x,y) \in \check{M}, \qquad q(x,y) = 0 \Leftrightarrow V(x,y) = +\infty$$

Une telle application est appelée une fonction de coût compatible avec le graphe irréductible $(M,q)$.

Soit $G$ un sous-ensemble de $M$, on désignera par $q^G$ la restriction de $q$ à $\check{G}$ (parfois on notera aussi $V^G$ la restriction de $V$ à $\check{G}$) et on dira que $G$ est un sous-graphe de $(M,q)$, si $(G,q^G)$ est irréductible. Notons que les singletons sont des sous-graphes de $(M,q)$, car pour eux $\check{G} = \emptyset$.

Pour $\beta \geq 0$ (qui représentera l'inverse de la température), on note

$$q^G_\beta(x,y) = \exp(-\beta V(x,y))q(x,y)$$

et on associe à la famille (irréductible) $q^G_\beta$ d'intensités, l'opérateur $L^G_\beta$ agissant sur les fonctions $\varphi$ définies sur $G$ par

$$\forall\ x \in G, \qquad L^G_\beta\varphi(x) = \sum_{y\in G}(\varphi(y) - \varphi(x))q^G_\beta(x,y)$$

A la donnée d'une probabilité $m_0$ sur $G$ et d'une évolution continue $\beta\ :\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ de l'inverse de la température, on peut associer un processus de Markov inhomogène et continu à droite $X^G = (X^G_s)_{s\geq 0}$ sur $G$ (unique en loi) dont la loi initiale est $m_0$ et dont l'intensité de saut de $x$ à $y$ (pour $x \neq y$) au temps $s \geq 0$ est $q^G_{\beta_s}(x,y)$, c'est-à-dire dont la famille de générateurs est $(L^G_{\beta_s})_{s\geq 0}$ (si $G = M$, on ne fera pas apparaître $M$ en exposant dans les notations précédentes).

Si l'application $\beta$ est constante, $\forall\ s \geq 0$, $\beta_s = \beta_0$, l'irréductibilité de $G$ assure l'existence d'une unique mesure invariante $\mu^G_{\beta_0}$ et il est bien connu (cf. [4]) qu'il existe deux fonctions $U^G\ :\ G \to \mathbb{R}_+$ et $\rho^G\ :\ G \to \mathbb{R}^*_+$ telles que pour $\beta_0$ grand,

$$\forall\ x \in G, \qquad \mu^G_{\beta_0} \sim \rho^G(x)\exp(-\beta_0 U^G(x))$$

(on notera que $U^G$ et $\rho^G$ satisfont $\min_G U^G = 0$ et $\min_G \rho^G > 0$).

L'application $U^G$ est donc la fonctionnelle d'action pour les grandes déviations satisfaites à basse température par la mesure invariante. On lui associe la fonction $W^G$ définie sur $\check{G}$ par

$$\forall\ (x,y) \in \check{G}, \qquad W^G(x,y) = \min(U^G(x) + V(x,y)\,;\, U^G(y) + V(y,x))$$

puis en désignant par $\mathcal{S}^G_{x,y}$ l'ensemble des suites finies d'éléments de $G$ dont le premier terme est $x$ et le dernier $y$, pour $(x,y)\in\check{G}$, on définit l'élévation symétrisée d'une telle suite $(x_i)_{1\leq i\leq n}\in\mathcal{S}^G_{x,y}$ comme étant la quantité

$$\widetilde{e}^G((x_i)_{1\leq i\leq n}) = \max_{1\leq i<n} W^G(x_i,x_{i+1})$$

(qui sera finie si et seulement si $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est un chemin pour les intensités de transitions $\widetilde{q}$ symétrisées de $q$ pour sa mesure invariante $\mu_0$, qui sont données pour tout $(x,y)\in\check{G}$ par $\widetilde{q}(x,y) = (q(x,y)+\mu_0(x)^{-1}\mu_0(y)q(y,x))/2)$, ce qui nous permet de poser, toujours pour $(x,y)\in\check{G}$,

$$H^G(x,y) = \min_{p\in\mathcal{S}^G_{x,y}} \widetilde{e}^G(p)$$

Enfin, à tout $x\in G$, on associe la constante

$$c^G(x) = \max_{y\in G\setminus\{x\}} H^G(x,y) - U^G(y) - U^G(x)$$

si $G$ n'est pas un singleton, et on pose $c^G(x) = -\infty$ si $G=\{x\}$ (avec les conventions usuelles, on a donc toujours $c^G(x) = \sup_{y\in G\setminus\{x\}} H^G(x,y) - U^G(y) - U^G(x)$).

On appelle frontière sortante de $G$ (qui sera notée $\mathrm{F_s}(G)$) l'ensemble des couples $(x,y)\in G\times M\setminus G$ dont la transition de $x$ à $y$ est permise, et sortie extérieure (resp. intérieure) tout élément $y\notin G$ (resp. $x\in G$) pour lequel il existe $x\in G$ (resp. $y\notin G$) avec $(x,y)\in\mathrm{F_s}(G)$, leur ensemble sera noté $\mathrm{S_e}(G)$ (resp. $\mathrm{S_i}(G)$).

On dit que le sous-graphe $G$ est une cellule (dans $M$), si

$$\forall\ (x,y)\in\mathrm{F_s}(G),\qquad V(x,y) > c^G(x)$$

Remarquons notamment que tout singleton est une cellule. Si $G$ est une cellule, on pose

$$\begin{array}{rcl}\delta(G) & = & \displaystyle\min_{(x,y)\in\mathrm{F_s}(G)} V(x,y) - c^G(x)\\ \sigma(G) & = & \displaystyle\min_{(x,y)\in\mathrm{F_s}(G)} U^G(x) + V(x,y)\end{array}$$

(cependant ces quantités ne dépendent évidemment pas seulement de $(G,q^G,U^G)$, mais aussi de ce qui se passe au voisinage proche de $G$).

Introduisons également les ensembles

$$\begin{array}{rcl}\widetilde{\mathrm{F}}_\mathrm{s}(G) & = & \{(x,y)\in\mathrm{F_s}\,/\,U^G(x)+V(x,y)=\sigma(G)\}\\ \widetilde{\mathrm{S}}_\mathrm{e}(G) & = & \{y\notin G\,/\,\exists\ x\in G \text{ avec } (x,y)\in\widetilde{\mathrm{F}}_\mathrm{s}\}\end{array}$$

et soit

$$R(G) = \sum_{(x,y)\in\widetilde{\mathrm{F}}_\mathrm{s}(G)} \rho^G(x)q(x,y)$$

ainsi que $r^G$ la probabilité sur $\widetilde{\mathrm{S}}_\mathrm{e}(G)$ définie par

$$\forall\ y\in\widetilde{\mathrm{S}}_\mathrm{e}(G),\qquad r^G(y) = R(G)^{-1}\sum_{x\,/\,(x,y)\in\widetilde{\mathrm{F}}_\mathrm{s}(G)} \rho^G(x)q(x,y)$$

Intéressons-nous maintenant à une famille de processus $(X^{(t)})_{t\geq 0}$ associée à une famille $(m_0^{(t)})_{t\geq 0}$ de probabilités initiales et à une famille $(\beta^{(t)})_{t\geq 0}$ d'évolutions de l'inverse de la température. On note

$$\begin{array}{rcl}T^{(G,t)} & = & \inf\{s\geq 0\,/\,X_s^{(t)}\notin G\}\\ Y^{(G,t)} & = & \begin{cases} X^{(t)}_{T^{(G,t)}} & \text{, si } T^{(G,t)}<+\infty\\ y_0 & \text{, sinon}\end{cases}\end{array}$$

où on a rajouté un point auxiliaire $y_0 \notin G$.

Soient $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ et $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions, $F$ étant supposée croissante, auxquelles on associe les conditions suivantes :

(1) Toutes les probabilités initiales $m_0^{(t)}$ sont portées par $G$

(2) $$\forall\ s \geq 0, \quad \lim_{t\to+\infty} \min_{0\leq u\leq a(t)s} \beta_u^{(t)} = +\infty$$

(3) $$\forall\ s \geq 0, \quad \lim_{t\to+\infty} \int_0^{a(t)s} \exp(-\sigma(G)\beta_u^{(t)})\, du = F(s)$$

(4) $$\forall\ s \geq 0, \quad \lim_{t\to+\infty} \int_0^{a(t)s} \exp(-\delta(G)\beta_u^{(t)}) \left|\frac{d\beta_u^{(t)}}{du}\right| du = 0$$

Soit $\nu^{G,F}$ l'unique probabilité sur $\overline{\mathbb{R}_+}$ satisfaisant pour tout $s \geq 0$ qui n'est pas un point de discontinuité de $F$,

$$\nu^{G,F}(]s, +\infty]) = \exp(-R(G)F(s))$$

On désignera par $\widetilde{\nu}^{G,F}$ la sous-probabilité restriction de $\nu^{G,F}$ à $\mathbb{R}_+$.

Nous avons alors obtenu dans [11] le résultat suivant :

**Rappel 1**

> Sous les hypothèses (1), (2), (3) et (4), la restriction à $\mathbb{R}_+ \times \mathrm{S_e}(G)$ de toute limite étroite pour $t$ grand des lois des couples de sortie renormalisés $(T^{(G,t)}/a(t), Y^{(G,t)})$ sur $\overline{\mathbb{R}_+} \times (\mathrm{S_e}(G) \sqcup \{y_0\})$ est $\widetilde{\nu}^{G,F} \otimes r$.

En fait, le cas du singleton n'a pas été traité explicitement, mais la preuve donnée dans [11] s'étend à cette situation, si on remplace, avec les notations de cet article, $\widetilde{\psi}_\beta^{(i)}$ par $\mathbb{I}_{\{y_i\}}$ (notons d'ailleurs que dans ce cas l'hypothèse (4) est toujours satisfaite, car $\delta(G) = +\infty$), cependant ceci pouvait aussi s'obtenir directement à partir de résultats classiques sur le premier temps de saut des processus de Markov inhomogènes (cf. la section 8.9.6 p. 266 de [7]).

Le plan de l'article est le suivant : Dans la section suivante, on va associer à une cellule l'ensemble de ses points en lesquels les temps d'occupations vérifient, asymptotiquement à basse température (sous certaines conditions sur les évolutions), une loi faible des grands nombres avant sortie. On obtient ainsi tous les cycles relatifs à la structure $(M, q, V)$, mais pour bien le faire apparaître, on va dans la section 3 donner une définition plus "globale" des cycles, en se ramenant d'une certaine manière au cas des graphes muni d'un potentiel satisfaisant la condition de réversibilité faible de Hajek (en quelque sorte notre démarche sera inverse de celle de Hwang et Sheu ou Trouvé, car on partira du comportement des temps d'occupations pour retrouver les propriétés des cycles, avec l'espoir que peut-être cette approche sera plus facile à généraliser à des situations plus complexes). On y étudiera aussi différents liens entre les cycles et les cellules. Ensuite dans la section 4 (respectivement 5), on utilisera sa décomposition en cellules (resp. cycles) maximaux, pour donner des théorèmes de sortie (resp. le comportement avant sortie de temps d'occupations renormalisés) pour des sous-graphes (et même des sous-ensembles) quelconques. Dans une dernière section, ces convergences seront appliquées pour obtenir les théorèmes limites vérifiés en temps grand par les temps d'occupations d'algorithmes de recuit généralisés ergodiques en loi, et on s'intéressera tout particulièrement aux cas critiques non traités dans [9], en faisant apparaître de nouvelles lois limites.

Enfin, l'auteur remercie le referee pour le complément de références qu'il lui a fournit : ainsi les questions abordées dans les sections 4 et 5 respectivement ont également été étudiées indépendamment par Olivieri et Scoppola dans [12] et par Catoni et Cerf dans [1], en vue

d'applications en théorie de la métastabilité. Néanmoins leur démarche est essentiellement basée sur des techniques de grandes déviations qui actuellement ne permettent pas d'accéder à la précision de résultats de convergence étroite, en probabilité ou p.s. tels que ceux que nous présentons ici (la proposition 3.8 de [12] sur l'imprévisibilité des temps de sortie est un résultat dans cette direction, cependant contrairement au rappel 1, Olivieri et Scoppola n'ont pas explicité la renormalisation qu'il fallait employer en termes des données de base, voir leur équation (3.24)).

De plus, ces auteurs se sont limités pour ces études à des processus homogènes dans le temps, ce qui ne permet pas de mettre en évidence des phénomènes tels que ceux décrits par exemple dans la dernière section (voir aussi [11]), où l'inhomogènéité est fondamentale.

D'autre part, précisons que la notion d'élévation symétrique a également été introduite par Deuschel et Mazza dans [3], où elle a été étudiée beaucoup plus soigneusement.

# 2 Loi faible des grands nombres pour certains temps d'occupations avant sortie d'une cellule

Soit $G$ une cellule dans $M$, nous allons nous intéresser à un sous-ensemble $C(G)$ de $G$ appelé le cycle associé à $G$ et défini par

$$C(G) = \{x \in G \,/\, c^G(x) + U^G(x) < \sigma(G)\}$$

(il s'agit en fait du cycle de hauteur de sortie maximale inclus dans $G$, cette terminologie sera justifiée dans la section suivante).

Nous montrerons notamment, en renforçant les hypothèses du rappel de l'introduction, que les temps d'occupations en les points de $C(G)$ avant sortie de $G$ satisfont une loi faible des grands nombres.

Introduisons quelques notations : Pour $x_0 \in G$ et $t, s \geq 0$, posons

$$\begin{aligned} G_s^{(t)}(x_0) &= \int_0^s \mathbb{I}_{\{x_0\}}(X_u^{(t)})\, du \\ g_s^{(G,t)}(x_0) &= \rho^G(x_0) \int_0^s \exp(-U^G(x_0)\beta_u^{(t)})\, du \end{aligned}$$

considérons la condition qui affirme qu'uniformément en $s$ dans les compacts de $]0, +\infty[$, on a pour $t$ grand

$$(5) \qquad \begin{cases} \exp(c^G(x_0)\beta_0^{(t)}) \ll \int_0^{a_t s} \exp(-U^G(x_0)\beta_u^{(t)})\, du \\ \int_0^{a_t s} \exp(c^G(x_0)\beta_u^{(t)}) \left|\frac{d\beta_u^{(t)}}{du}\right| du \ll \int_0^{a_t s} \exp(-U^G(x_0)\beta_u^{(t)})\, du \end{cases}$$

et rappelons que l'on dit que la renormalisation de rapports $(a_t)_{t\geq 0}$ est adaptée (au problème de sortie de $G$) si $\nu^{G,F}(\{0, +\infty\}) = 0$ (i.e. si $\lim_{s\to 0_+} F(s) = 0$ et si $\lim_{s\to +\infty} F(s) = +\infty$).

On a le résultat suivant qui généralise la remarque (m) de la section 5 de [11] :

**<u>Théorème 2</u>**

> Outre (1), faisons l'hypothèse que la renormalisation $(a_t)_{t\geq 0}$ est adaptée et vérifie les conditions (2), (3), (4) ainsi que (5) pour un $x_0 \in C(G)$, alors $G_{T^{(G,t)}}^{(t)}(x_0)/g_{T^{(G,t)}}^{(G,t)}(x_0)$ converge en probabilité vers 1 pour $t$ grand.

Si $T^{(G,t)} = +\infty$, la quantité $G_{T^{(G,t)}}^{(t)}(x_0)/g_{T^{(G,t)}}^{(G,t)}(x_0)$ n'est peut-être pas bien définie, mais ceci n'est pas très génant car du fait que $\nu^{G,F}(\{+\infty\}) = 0$, on a $\lim_{t\to+\infty} P(T^{(G,t)} < +\infty) = 1$. Par ailleurs, puisque p.s. $T^{(G,t)} > 0$, il n'y a pas non plus de problème pour diviser par $g_{T^{(G,t)}}^{(G,t)}(x_0)$.

Avant de passer à la démonstration de ce théorème, faisons mention de l'un des objets lié à la preuve du rappel 1 :

Si $G$ est une cellule qui n'est pas un singleton, on lui associe le graphe irréductible $(\overline{G}, \overline{q}^G)$ défini par

$$\overline{G} = G \sqcup \mathrm{S_e}(G)$$

$$\forall\ (x,y) \in \check{\overline{G}}, \qquad \overline{q}^G(x,y) = \begin{cases} q(x,y) & \text{, si } x \in G \text{ et } y \in \overline{G} \\ 1 & \text{, si } (y,x) \in \mathrm{F_s}(G) \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases}$$

que l'on munit de la fonction de coût $\overline{V}^G$ donnée par

$$\forall\ (x,y) \in \check{\overline{G}}, \qquad \overline{V}^G(x,y) = \begin{cases} V(x,y) & \text{, si } x \in G \text{ et } y \in \overline{G} \\ 0 & \text{, si } (y,x) \in \mathrm{F_s}(G) \\ +\infty & \text{, sinon} \end{cases}$$

Soit $\overline{L}^G_\beta$ le générateur sur $\overline{G}$ associé comme précédemment à $\overline{q}^G$, $\overline{V}^G$ et $\beta \geq 0$, et $\overline{\mu}^G_\beta$ la mesure invariante pour cet opérateur. Alors pour $\beta$ grand et $x \in G$, on a

$$\overline{\mu}^G_\beta(x) \sim \mu^G_\beta(x)$$

(ceci serait faux si $G$ est un singleton tel que $\sigma(G) = 0$), et notamment si $\overline{U}^G$ désigne la fonctionnelle des grandes déviations satisfaites par $\overline{\mu}^G_\beta$ pour $\beta$ grand, $\overline{U}^G$ coïncide avec $U^G$ sur $G$ (mais on a mieux puisque $\overline{\mu}^G_\beta(x) \sim \rho^G(x) \exp(-\beta U^G(x))$ pour $x \in G$).

De plus, on vérifie facilement (cf. [11]) que pour $x \in \mathrm{S_e}(G)$,

$$\overline{U}^G(x) = \min_{(y,x)\in \mathrm{F_s}(G)} U^G(y) + V^G(y,x)$$

De ces résultats, il découle, avec des notations évidentes, que pour tout $x \in G$,

$$\overline{c}^G(x) = c^G(x)$$

Par ailleurs, si $(m_0^{(t)})_{t\geq 0}$ est une famille de probabilités initiales portées par $G$ et si $(\beta^{(t)})_{t\geq 0}$ est une famille d'évolutions de l'inverse de la température, on peut leur associer une famille de processus de Markov $(\overline{X}^{(G,t)})_{t\geq 0}$ sur $\overline{G}$ dont les générateurs sont les $\overline{L}^G_\beta$. Notons

$$\begin{aligned} \overline{T}^{(G,t)} &= \inf\{s \geq 0 \,/\, X_s^{(G,t)} \notin G\} \\ \overline{Y}^{(G,t)} &= \begin{cases} \overline{X}^{(G,t)}_{\overline{T}^{(G,t)}} & \text{, si } \overline{T}^{(G,t)} < +\infty \\ y_0 & \text{, sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

On a alors pour tout $t \geq 0$ fixé, l'égalité en loi des deux processus $(\overline{X}^{(G,t)}_{s\wedge \overline{T}^{(G,t)}})_{s\geq 0}$ et $(X^{(t)}_{s\wedge T^{(G,t)}})_{s\geq 0}$, où $X^{(t)}$ est le processus de Markov construit sur $M$ à partir de $m_0^{(t)}$ et $\beta^{(t)}$.

Nous allons plutôt travailler avec la famille de processus $(\overline{X}^{(G,t)})_{t\geq 0}$.

**Démonstration du théorème :**

Le cas où $G$ est un singleton étant trivial (car alors $\rho^{\{x_0\}}(x_0) = 1$ et $U^{\{x_0\}}(x_0) = 0$, d'où pour tout $s \geq 0$, $G^{(t)}_{s\wedge T^{(t)}} = g^{(G,t)}_{s\wedge T^{(t)}}$, puis le résultat annoncé), on supposera qu'il n'en n'est pas ainsi, ce qui assurera notamment que $c^G(x_0) \geq 0$.

Soit donc $x_0 \in C(G)$ fixé, pour $\beta \geq 0$ notons $\varphi_\beta$ l'unique fonction sur $\overline{G}$ solution de

$$\begin{cases} \overline{L}_\beta^G \varphi_\beta &= \mathbb{1}_{\{x_0\}} - \overline{\mu}_\beta^G(x_0) \\ \overline{\mu}_\beta^G(\varphi_\beta) &= 0 \end{cases}$$

On a vu dans [11] qu'il existait une constante $K > 0$ telle qu'en norme uniforme et pour tout $\beta \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|\varphi_\beta\| &\leq K \exp(\beta \overline{c}^G(x_0)) = K \exp(\beta c^G(x_0)) \\ \left\| \frac{d}{d\beta} \varphi_\beta \right\| &\leq K \exp(\beta c^G(x_0)) \end{aligned}$$

(dans toute la suite, $K$ désignera une constante générique dont la valeur pourra changer de ligne en ligne).

Vu le problème de martingales satisfait par $(\overline{X}_s^{(G,t)})_{s\geq 0}$, il existe une martingale $(M_s^{\varphi_{\beta^{(t)}}})_{s\geq 0}$ telle que pour tout $s \geq 0$,

$$\begin{aligned} \varphi_{\beta_s^{(t)}}(\overline{X}_s^{(G,t)}) &= \varphi_{\beta_0^{(t)}}(\overline{X}_0^{(G,t)}) + \int_0^s \left( \frac{d}{du} \varphi_{\beta_u^{(t)}} \right) (\overline{X}_u^{(G,t)})\, du + \int_0^s \overline{L}_{\beta_u^{(t)}}^G \varphi_{\beta_u^{(t)}}(\overline{X}_u^{(G,t)})\, du + M_s^{\varphi_{\beta^{(t)}}} \\ &= \varphi_{\beta_0^{(t)}}(\overline{X}_0^{(G,t)}) + \int_0^s \left( \frac{d}{du} \varphi_{\beta_u^{(t)}} \right) (\overline{X}_u^{(G,t)})\, du + \int_0^s \mathbb{1}_{\{x_0\}}(\overline{X}_u^{(G,t)}) - \overline{\mu}_{\beta_u^{(t)}}^G(x_0)\, du + M_s^{\varphi_{\beta^{(t)}}} \end{aligned}$$

Soit $0 < S_1 < S_2 < +\infty$ fixés et $S_1 \leq s \leq S_2$, on applique la relation précédente avec le temps $s$ remplacé par $a_t s$ pour obtenir

$$\begin{aligned} (6) \qquad & \int_0^{a_t s} \mathbb{1}_{\{x_0\}}(\overline{X}_u^{(G,t)}) - \overline{\mu}_{\beta_u^{(t)}}^G(x_0)\, du \\ &= \varphi_{\beta_{a_t s}^{(t)}}(\overline{X}_{a_t s}^{(G,t)}) - \varphi_{\beta_0^{(t)}}(\overline{X}_0^{(G,t)}) - \int_0^{a_t s} \left( \frac{d}{du} \varphi_{\beta_u^{(t)}} \right) (\overline{X}_u^{(G,t)})\, du - M_{a_t s}^{\varphi_{\beta^{(t)}}} \end{aligned}$$

Intéressons-nous d'abord au terme

$$\int_0^{a_t s} \overline{\mu}_{\beta_u^{(t)}}^G(x_0)\, du$$

qui du fait de l'hypothèse (2) et de la remarque qui suit l'énoncé du théorème 2, est équivalent pour $t$ grand (et uniformément en $0 \leq s \leq S_2$) à

$$\rho^G(x_0) \int_0^{a_t s} \exp(-\beta_u^{(t)} U^G(x_0))\, du$$

Nous allons montrer que chacun des termes du membre de droite de (6) est négligeable en probabilité pour $t$ grand (et uniformément en $S_1 \leq s \leq S_2$) devant cette dernière expression.

Ainsi par exemple,

$$\begin{aligned} \left| \varphi_{\beta_{a_t s}^{(t)}}(\overline{X}_{a_t s}^{(G,t)}) \right| &\leq \left\| \varphi_{\beta_{a_t s}^{(t)}} \right\| \\ &\leq K \exp(\beta_{a_t s}^{(t)} c^G(x_0)) \\ &\leq K \left[ \exp(\beta_0^{(t)} c^G(x_0)) + c^G(x_0) \int_0^{a_t s} \exp(\beta_u^{(t)} c^G(x_0)) \left| \frac{d}{du} \beta_u^{(t)} \right| du \right] \end{aligned}$$

et l'hypothèse (5) permet justement d'obtenir la négligeabilité désirée. D'une manière similaire, on montre le résultat correspondant pour $\varphi_{\beta_0^{(t)}}(\overline{X}_0^{(G,t)})$ et $\int_0^{a_t s} \left( \frac{d}{du} \varphi_{\beta_u^{(t)}} \right) (\overline{X}_u^{(G,t)})\, du$.

Reste à borner convenablement en probabilité la martingale $M_{a_ts}^{\varphi_{\beta(t)}}$. Pour ceci il suffit de bien majorer son premier moment, ce que nous allons faire en reprenant un calcul de [9] :

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\left|M_{a_ts}^{\varphi_{\beta(t)}}\right|] &\leq \left(\mathbb{E}[\left(M_{a_ts}^{\varphi_{\beta(t)}}\right)^2]\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\mathbb{E}[\left\langle M^{\varphi_{\beta(t)}}\right\rangle_{a_ts}]\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\mathbb{E}[\int_0^{a_ts} \Gamma_{\beta_u^{(t)}}(\varphi_{\beta_u^{(t)}}, \varphi_{\beta_u^{(t)}})(\overline{X}_u^{(G,t)})\, du]\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

où pour tout $x \in G$, on a posé

$$\Gamma_{\beta_u^{(t)}}(\varphi_{\beta_u^{(t)}}, \varphi_{\beta_u^{(t)}})(x) = \overline{L}_{\beta_u^{(t)}}^G \varphi_{\beta_u^{(t)}}^2(x) - 2\varphi_{\beta_u^{(t)}}(x)\overline{L}_{\beta_u^{(t)}}^G \varphi_{\beta_u^{(t)}}(x)$$

Cependant, toujours d'après le problème de martingales satisfait par le processus $\overline{X}^{(G,t)}$, il apparaît que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{a_ts} \overline{L}_{\beta_u^{(t)}}^G \varphi_{\beta_u^{(t)}}^2(\overline{X}_u^{(G,t)})\, du\right] = \mathbb{E}\left[\varphi_{\beta_{a_ts}^{(t)}}^2(\overline{X}_{a_ts}^{(G,t)}) - \varphi_{\beta_0^{(t)}}^2(\overline{X}_0^{(G,t)}) - \int_0^{a_ts}\left(\frac{d}{du}\varphi_{\beta_u^{(t)}}^2\right)(\overline{X}_u^{(G,t)})\, du\right]$$

or

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}[\int_0^{a_ts}\left(\frac{d}{du}\varphi_{\beta_u^{(t)}}^2\right)(\overline{X}_u^{(G,t)})\, du]\right| \\
&\leq \int_0^{a_ts}\left\|\frac{d}{du}\varphi_{\beta_u^{(t)}}^2\right\| du \\
&\leq 2\int_0^{a_ts}\left\|\varphi_{\beta_u^{(t)}}\right\|\left\|\frac{d}{du}\varphi_{\beta_u^{(t)}}\right\| du \\
&\leq K\int_0^{a_ts}\exp(2c^G(x_0)\beta_u^{(t)})\left|\frac{d}{du}\beta_u^{(t)}\right| du \\
&\leq K\max_{0\leq u\leq a_ts}\exp(c^G(x_0)\beta_u^{(t)})\int_0^{a_ts}\exp(c^G(x_0)\beta_u^{(t)})\left|\frac{d}{du}\beta_u^{(t)}\right| du \\
&\leq K\left(\exp(c^G(x_0)\beta_0^{(t)}) + \int_0^{a_ts}\exp(c^G(x_0)\beta_u^{(t)})\left|\frac{d}{du}\beta_u^{(t)}\right| du\right)\int_0^{a_ts}\exp(c^G(x_0)\beta_u^{(t)})\left|\frac{d}{du}\beta_u^{(t)}\right| du
\end{aligned}$$

et cette dernière expression est négligeable pour $t$ grand (uniformément en $S_1 \leq s \leq S_2$) devant

$$\left(\rho^G(x_0)\int_0^{a_ts}\exp(-\beta_u^{(t)}U(x_0))\, du\right)^2$$

Il en est clairement de même pour $\mathbb{E}[\varphi_{\beta_{a_ts}^{(t)}}^2(\overline{X}_{a_ts}^{(G,t)})]$ et $\mathbb{E}[\varphi_{\beta_0^{(t)}}^2(\overline{X}_0^{(G,t)})]$, et il nous suffit donc maintenant de considérer

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}[\int_0^{a_ts}\varphi_{\beta_u^{(t)}}(\overline{X}_u^{(G,t)})\overline{L}_{\beta_u^{(t)}}^G\varphi_{\beta_u^{(t)}}(\overline{X}_u^{(G,t)})\, du]\right| \\
&= \left|\mathbb{E}[\int_0^{a_ts}\varphi_{\beta_u^{(t)}}(\overline{X}_u^{(G,t)})\left(\mathbb{1}_{\{x_0\}}(\overline{X}_u^{(G,t)}) - \overline{\mu}_{\beta_u^{(t)}}^G(x_0)\right) du]\right| \\
&\leq K\max_{0\leq u\leq a_ts}\exp(c^G(x_0)\beta_u^{(t)})\mathbb{E}\left[\int_0^{a_ts}\mathbb{1}_{\{x_0\}}(\overline{X}_u^{(G,t)}) + \overline{\mu}_{\beta_u^{(t)}}^G(x_0)\, du\right] \\
&\leq K\max_{0\leq u\leq a_ts}\exp(c^G(x_0)\beta_u^{(t)})\left[\left\|\varphi_{\beta_{a_ts}^{(t)}}\right\| + \left\|\varphi_{\beta_0^{(t)}}\right\| + \int_0^{a_ts}\left\|\frac{d}{du}\varphi_{\beta_u^{(t)}}\right\| du + 2\int_0^{a_ts}\overline{\mu}_{\beta_u^{(t)}}^G(x_0)\, du\right]
\end{aligned}$$

mais les calculs précédents montrent que le terme entre crochet est pour $t$ grand de l'ordre de $2\int_0^{a_t s} \overline{\mu}^G_{\beta_u^{(t)}}(x_0)\,du$ et que l'expression qui est en facteur avant est négligeable devant ce dernier, d'où finalement le résultat annoncé.

Soit $\Omega^{(t)}_{S_1,S_2} = \{\omega \in \Omega \,/\, S_1 \leq \overline{T}^{(G,t)}(w)/a_t \leq S_2\}$, d'après l'hypothèse d'adaptivité de la renormalisation, on peut choisir $S_1$ suffisamment petit et $S_2$ suffisamment grand de telle sorte que pour tout $t$ assez grand, $\mathbb{P}(\Omega^{(t)}_{S_1,S_2})$ soit arbitrairement petit.

Cependant en appliquant ce qui précéde avec $s = \overline{T}^{(G,t)}/a_t$ sur $\Omega^{(t)}_{S_1,S_2}$, on voit que pour tout $\epsilon > 0$ fixé,

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\Omega^{(t)}_{S_1,S_2}} \mathbf{1}_{\{\left|G^{(t)}_{\overline{T}^{(G,t)}}/g^{(G,t)}_{\overline{T}^{(G,t)}}-1\right|>\epsilon\}}] = 0$$

et on en déduit aisément en fin de compte que pour tout $\epsilon > 0$ fixé,

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}[\left|G^{(t)}_{\overline{T}^{(G,t)}}/g^{(G,t)}_{\overline{T}^{(G,t)}} - 1\right| > \epsilon] = 0$$

□

Avant de donner une application de ce théorème, discutons un peu de l'hypothèse (5). Remarquons tout d'abord que pour ce qui concerne la première condition, il suffit qu'elle soit satisfaite pour tout $s > 0$ (assez petit), l'uniformité demandée en découlant automatiquement. De plus, du fait que

$$\exp(c^G(x_0)\beta_0^{(t)}) - \exp(c^G(x_0)\min_{0\leq u\leq a_t s}\beta_u^{(t)}) \leq \int_0^{a_t s} \exp(c^G(x_0)\beta_u^{(t)}) \left|\frac{d}{du}\beta_u^{(t)}\right| du$$

la seconde condition implique que l'on peut remplacer la première par

$$\exp(c^G(x_0)\min_{0\leq u\leq a_t s}\beta_u^{(t)}) \ll \int_0^{a_t s} \exp(-U^G(x_0)\beta_u^{(t)})\,du$$

et celle-ci est satisfaite si on suppose outre (2), (3), (4) et l'adaptivité de la renormalisation, que pour tout $s > 0$, $F(s) > 0$.

En effet, écrivons que pour $x_0 \in C(G)$,

$$\begin{aligned}\int_0^{a_t s} \exp(-\beta_u^{(t)}U^G(x_0))\,du &= \int_0^{a_t s} \exp((\sigma(G) - U^G(x_0))\beta_u^{(t)}) \exp(-\sigma(G)\beta_u^{(t)})\,du \\ &\geq \exp((\sigma(G) - U^G(x_0))\min_{0\leq u\leq a_t s}\beta_u^{(t)}) \int_0^{a_t s} \exp(-\sigma(G)\beta_u^{(t)})\,du\end{aligned}$$

Or

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^{a_t s} \exp(-\sigma(G)\beta_u^{(t)})\,du = F(s)$$

et puisque $\sigma(G) - U^G(x_0) > c^G(x_0)$, on a

$$\exp((\sigma(G) - U^G(x_0))\min_{0\leq u\leq a_t s}\beta_u^{(t)}) \gg \exp(c^G(x_0)\min_{0\leq u\leq a_t s}\beta_u^{(t)})$$

en vertu de (2).

On en déduit notamment la validité de la première condition de (5) si les évolutions $\beta^{(t)}$ sont croissantes, car alors $F$ est concave d'où

$$\begin{aligned}\exists\ s > 0 \text{ avec } F(s) = 0 \ &\Leftrightarrow\ \forall\ s > 0,\ F(s) = 0 \\ &\Leftrightarrow\ \nu^{G,F} = \delta_{+\infty}\end{aligned}$$

ce qui est exclu par notre hypothèse d'adaptivité.

Par ailleurs, la croissance des $\beta^{(t)}$ permet alors aussi de réduire la seconde condition de (5) à

(7) $$\exp(c^G(x_0)\beta^{(t)}_{a_t s}) \ll \int_0^{a_t s} \exp(-\beta^{(t)}_u U^G(x_0))\, du$$

que l'on peut se contenter de vérifier pour tout $s > 0$ fixé, car l'uniformité voulue en découle : il suffit de noter que pour tous $0 < S_1 < S_2$ fixés,

$$\int_0^{a_t S_2} \exp(-\beta^{(t)}_u U^G(x_0))\, du \le \left(\left[\frac{S_2}{S_1}\right] + 1\right) \int_0^{a_t S_1} \exp(-\beta^{(t)}_u U^G(x_0))\, du$$

Si on suppose de plus que $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, alors les hypothèses (2), (3) et l'adaptivité de la renormalisation assure la validité de (7) (et par suite de (5)). En effet, on a alors vu dans [11] que pour tout $s > 0$, $\lim_{t\to+\infty} a_t \exp(-\sigma(G)\beta^{(t)}_{a_t s}) = F'(s)$, ainsi

$$\begin{array}{rcl}
\int_0^{a_t s} \exp(-\beta^{(t)}_u U^G(x_0))\, du & \geq & \int_{a_t s/2}^{a_t s} \exp(-\beta^{(t)}_u U^G(x_0))\, du \\
& = & \int_{a_t s/2}^{a_t s} \exp((\sigma(G) - U^G(x_0))\beta^{(t)}_u) \exp(-\sigma(G)\beta^{(t)}_u)\, du \\
& \geq & \exp((\sigma(G) - U^G(x_0))\beta^{(t)}_{a_t s/2}) \int_{a_t s/2}^{a_t s} \exp(-\sigma(G)\beta^{(t)}_u)\, du \\
& \sim & \left(\frac{a_t}{F'(s/2)}\right)^{\frac{\sigma(G)-U^G(x_0)}{\sigma(G)}} (F(s) - F(s/2))
\end{array}$$

(comme précédemment, la concavité de $F$ et l'adaptivité de la renormalisation implique que $F'$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc aussi que $F(s) > F(s/2)$).

Cependant pour $t$ grand, on a aussi

$$\exp(c^G(x_0)\beta^{(t)}_{a_t s}) \sim \left(\frac{a_t}{F'(s)}\right)^{\frac{c^G(x_0)}{\sigma(G)}}$$

et on conclut en utilisant l'appartenance de $x_0$ à $C(G)$ et le fait que dans les cas où $G$ n'est pas un singleton, on a nécessairement pour une renormalisation adaptée $\lim_{t\to+\infty} a_t = +\infty$ (pour les singletons, (5) se réduit à une trivialité, car alors $c^G(x_0) = -\infty$).

D'autre part, notons que la condition (5) n'est pas bonne si $c^G(x_0) = 0$. En effet, dans ce cas on sait qu'il existe deux constantes $K > 0$ et $\widehat{c}^G(x_0) < 0$ telles que pour tout $\beta \geq 0$,

$$\left\| \frac{d}{d\beta}\varphi_\beta \right\| \le K \exp(\beta \widehat{c}^G(x_0))$$

(ceci provient du fait que pour tout $x \in \overline{G}$ fixé, $\varphi_\beta(x)$ s'exprime comme une fraction rationnelle en les $(q_\beta(y,z))_{(y,z)\in\check{\overline{G}}}$, cf. [11]) et il convient donc de remplacer la seconde condition de (5) par

$$\int_0^{a_t s} \exp(\widehat{c}^G(x_0)\beta^{(t)}_u) \left|\frac{d\beta^{(t)}_u}{du}\right| du \quad \ll \quad \int_0^{a_t s} \exp(-U^G(x_0)\beta^{(t)}_u)\, du$$

Enfin terminons ces remarques en notant que $C(G)$ est non vide : Soient

$$\begin{array}{rcl}
N(G) & = & \{x \in G \,/\, U^G(x) = 0\} \\
\widetilde{\mathrm{S}}_{\mathrm{i}}(G) & = & \{x \in G \,/\, \exists\, y \notin G, \text{ avec } (x,y) \in \widetilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{s}}(G)\}
\end{array}$$

Par définition d'une cellule, on a $\widetilde{\mathrm{S}}_{\mathrm{i}}(G) \subset C(G)$, mais on a également $N(G) \subset C(G)$, comme on le voit à partir de la majoration $H^G(x_0, x) \leq H^G(x, \tilde{x}) \vee H^G(\tilde{x}, x_0)$ que l'on applique avec $x_0 \in N(G)$, $\tilde{x} \in \widetilde{\mathrm{S}}_{\mathrm{i}}(G)$ et $x \in G$ (si $\widetilde{\mathrm{S}}_{\mathrm{i}}(G) \neq \emptyset$, i.e. si $G \neq M$). D'ailleurs cette procédure permet de voir que si un $x_0 \in N(G)$ a été fixé,

$$C(G) = \{x \in G \,/\, H^G(x_0, x) < \sigma(G)\}$$

puis que cette caractérisation est en fait valable pour tout $x_0 \in C(G)$ fixé.

Une des conséquences du théorème 2 qui nous sera utile, est de montrer que sur $C(G)$, $U^G$ est à une constante additive près la restriction de $U$. Mais prouvons tout d'abord le résultat suivant qui sert également d'illustration aux manières possibles de prolonger le théorème 2 :

**<u>Corollaire 3</u>**

> Soit $G$ une cellule strictement incluse dans $M$ et $(m_0^{(t)})_{t\geq 0}$ une famille de lois initiales sur $G$. On considère la famille d'évolutions donnée par
>
> $$\forall\, t \geq 0, \forall\, s \geq 0, \qquad \beta_s^{(t)} = t$$
>
> (les $X^{(t)}$ seront donc des processus homogènes).
> Alors pour tout $x_0 \in C(G)$ et toute fonction continue $h$ définie sur $\mathbb{R}_+$ à croissance au plus polynômiale en l'infini, on a
>
> $$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}\left[h\left(\frac{G^{(t)}_{T(G,t)}(x_0)}{\mathbb{E}[g^{(G,t)}_{T(G,t)}(x_0)]}\right)\right] &= \lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}\left[h\left(\frac{G^{(t)}_{T(G,t)}(x_0)}{R^{-1}(G)\rho^G(x_0)\exp((\sigma(G)-U(x_0))t)}\right)\right] \\ &= \int_0^{+\infty} h(y)\exp(-y)\,dy\end{aligned}$$

Il est possible d'assouplir les conditions précédentes pour obtenir des généralisations de la conclusion ci-dessus, néanmoins ce cas particulier nous suffira.

**Démonstration :**

Soit la renormalisation définie par $a_t = \exp(\sigma(G)t)$ pour tout $t \geq 0$, on observe que les conditions (2), (3) et (4) sont satisfaites et le rappel 1 montre donc que $T^{(G,t)}/a_t$ converge étroitement vers une loi exponentielle de paramètre $R(G)$.

Plus précisément, le corollaire 8 de [11] montre que pour toute fonction continue $h$ à croissance au plus polynômiale en l'infini, on a

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}[h(T^{(G,t)}/a_t)] = R(G)\int_0^{+\infty} h(u)\exp(-R(G)u)\,du$$

Par ailleurs, puisque la condition (5) est vérifiée d'après les remarques qui suivent le théorème 2 et que $g^{(G,t)}_{T(G,t)}(x_0) = \rho^G(x_0)\exp(-U^G(x_0)t)T^{(G,t)}$, on obtient en appliquant ce théorème que

$$\frac{G^{(t)}_{T(G,t)}(x_0)}{R^{-1}(G)\rho^G(x_0)\exp((\sigma(G)-U(x_0))t)}$$

converge étroitement vers temps exponentiel de paramètre 1.

En appliquant ce qui précède avec $h$ l'application identité, on voit qu'il en est de même pour $G^{(t)}_{T(G,t)}(x_0)/\mathbb{E}[g^{(G,t)}_{T(G,t)}(x_0)]$.

Pour obtenir le résultat annoncé, il suffit donc de voir que pour tout entier $p \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left[\left(\frac{G^{(t)}_{T(G,t)}(x_0)}{R^{-1}(G)\rho^G(x_0)\exp((\sigma(G)-U(x_0))t)}\right)^p\right] < +\infty \tag{8}$$

(car on aura alors aussi $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left[\left(\frac{G^{(t)}_{T(G,t)}(x_0)}{\mathbb{E}[g^{(G,t)}_{T(G,t)}(x_0)]}\right)^p\right] < +\infty$), ce que nous allons montrer par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

Pour $p = 0$ cette propriété est claire, supposons donc la satisfaite pour un $p \in \mathbb{N}$ et prouvons la pour $p+1$.

En reprenant les notations de la preuve du théorème 2, intéressons-nous d'abord à

$$\left(\varphi_t(\overline{X}^{(t)}_{\overline{T}^{(G,t)}}) - \int_0^{\overline{T}^{(G,t)}} \overline{L}^G_t \varphi_t(\overline{X}^{(t)}_s)\,ds\right)^{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1} C^k_{p+1}\varphi^k_t(\overline{X}^{(t)}_{\overline{T}^{(G,t)}})\left(-\int_0^{\overline{T}^{(G,t)}} \overline{L}^G_t \varphi_t(\overline{X}^{(t)}_s)\,ds\right)^{p+1-k}$$

et tout particulièrement aux deux premiers termes de cette dernière somme. On transforme le premier en

$$\left(-\int_0^{\overline{T}^{(G,t)}} \overline{L}^G_t \varphi_t(\overline{X}^{(t)}_s)\,ds\right)^{p+1} = -(p+1)\int_0^{\overline{T}^{(G,t)}} \left(-\int_0^s \overline{L}^G_t \varphi_t(\overline{X}^{(t)}_u)\,du\right)^p \overline{L}^G_t \varphi_t(\overline{X}^{(t)}_s)\,ds$$

et le second par intégration par parties (cf. [2] p. 343) en

$$\begin{aligned}
&(p+1)\varphi_t(\overline{X}^{(t)}_{\overline{T}^{(G,t)}})\left(-\int_0^{\overline{T}^{(G,t)}} \overline{L}^G_t \varphi_t(\overline{X}^{(t)}_s)\,ds\right)^p \\
= \;& (p+1)\left(\varphi_t(\overline{X}^{(t)}_0) + \int_0^{\overline{T}^{(G,t)}} \overline{L}^G_t \varphi_t(\overline{X}^{(t)}_s)\,ds + M^{\varphi_{\beta(t)}}_{\overline{T}^{(G,t)}}\right)\left(-\int_0^{\overline{T}^{(G,t)}} \overline{L}^G_t \varphi_t(\overline{X}^{(t)}_s)\,ds\right)^p \\
= \;& (p+1)\left[\int_0^{\overline{T}^{(G,t)}} \left(-\int_0^s \overline{L}^G_t \varphi_t(\overline{X}^{(t)}_u)\,du\right)^p (\overline{L}^G_t \varphi_t(\overline{X}^{(t)}_s)ds + dM^{\varphi_{\beta(t)}}_s)\right. \\
&\left. -p\int_0^{\overline{T}^{(G,t)}} \varphi_t(X_s)\left(-\int_0^s \overline{L}^G_t \varphi_t(\overline{X}^{(t)}_u)\,du\right)^{p-1} \overline{L}^G_t \varphi_t(\overline{X}^{(t)}_s)\,ds\right]
\end{aligned}$$

Du fait que

$$\left(\int_0^v \left(-\int_0^s \overline{L}^G_t \varphi_t(\overline{X}^{(t)}_u)\,du\right)^p dM^{\varphi_{\beta(t)}}_s\right)_{v\geq 0}$$

est une martingale, en passant aux espérances (rigoureusement il faudrait d'abord considérer le temps d'arrêt borné $S \wedge \overline{T}^{(G,t)}$ puis faire tendre $S$ vers $+\infty$, les détails sont laissés au lecteur), on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{1} C^k_{p+1}(\varphi_t(\overline{X}^{(t)}_{\overline{T}^{(G,t)}}))^k\left(-\int_0^{\overline{T}^{(G,t)}} \overline{L}^G_t \varphi_t(\overline{X}^{(t)}_s)\,ds\right)^{p+1-k}\right] \\
= \;& -(p+1)p\mathbb{E}\left[\int_0^{\overline{T}^{(G,t)}} \varphi_t(\overline{X}^{(t)}_s)\left(-\int_0^s \overline{L}^G_t \varphi_t(\overline{X}^{(t)}_u)\,du\right)^{p-1} \overline{L}^G_t \varphi_t(\overline{X}^{(t)}_s)\,ds\right] \\
\leq \;& (p+1)p\,\|\varphi_t\|\,\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{\overline{T}^{(G,t)}} \mathbf{1}_{\{x_0\}}(\overline{X}^{(t)}_s) + \overline{\mu}^G_t(x_0)\right)^p\right]
\end{aligned}$$

et les estimations de $\|\varphi_t\|$ et de $\overline{\mu}_t^G(x_0)$ que l'on a déjà vu, le rappel du début de cette démonstration avec $h(x) = x^p$, ainsi que l'hypothèse de récurrence permettent d'en déduire que

$$\sup_{t\geq 0} e^{-(\sigma(G)-U(x_0))(p+1)t} I\!\!E\left[\sum_{k=0}^{1} C_{p+1}^k (\varphi_t(\overline{X}^{(t)}_{\overline{T}^{(G,t)}}))^k \left(-\int_0^{\overline{T}^{(G,t)}} \overline{L}_t^G \varphi_t(\overline{X}^{(t)}_s)\, ds\right)^{p+1-k}\right] < +\infty$$

mais elles montrent également que

$$\sup_{t\geq 0} e^{-(\sigma(G)-U(x_0))(p+1)t} I\!\!E\left[\sum_{k=2}^{p+1} C_{p+1}^k (\varphi_t(\overline{X}^{(t)}_{\overline{T}^{(G,t)}}))^k \left(-\int_0^{\overline{T}^{(G,t)}} \overline{L}_t^G \varphi_t(\overline{X}^{(t)}_s)\, ds\right)^{p+1-k}\right] < +\infty$$

et donc en fin de compte que

$$\sup_{t\geq 0} \exp(-(\sigma(G)-U(x_0))(p+1)t) I\!\!E\left[\left(\varphi_t(\overline{X}^{(t)}_{\overline{T}^{(G,t)}}) - \int_0^{\overline{T}^{(G,t)}} \overline{L}_t^G \varphi_t(\overline{X}^{(t)}_s)\, ds\right)^{p+1}\right] < +\infty$$

Cependant, en écrivant

$$\begin{aligned}
&\left(\varphi_t(\overline{X}^{(t)}_{\overline{T}^{(G,t)}}) - \int_0^{\overline{T}^{(G,t)}} \overline{L}_t^G \varphi_t(\overline{X}^{(t)}_s)\, ds\right)^{p+1} \\
&\quad = \sum_{k=0}^{p+1} C_{p+1}^k (\varphi_t(\overline{X}^{(t)}_{\overline{T}^{(G,t)}}) + \overline{\mu}_t^G(x_0)\overline{T}^{(G,t)})^k \left(-\int_0^{\overline{T}^{(G,t)}} \mathbb{1}_{\{x_0\}}(\overline{X}^{(t)}_s)\, ds\right)^{p+1-k}
\end{aligned}$$

et en isolant le premier terme de la somme du membre de droite, il en découle facilement que (8) est satisfait avec $p+1$.

$\square$

En fait on ne se servira du résultat précédent qu'avec $h$ l'application identité :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{I\!\!E\left[G^{(t)}_{T^{(G,t)}}(x_0)\right]}{I\!\!E[g^{(G,t)}_{T^{(G,t)}}(x_0)]} = \lim_{t\to+\infty} \frac{I\!\!E\left[G^{(t)}_{T^{(G,t)}}(x_0)\right]}{R^{-1}(G)\rho^G(x_0)\exp((\sigma(G)-U(x_0))t)} = 1$$

**Corollaire 4**

Pour tout $x_0 \in C(G)$, on a $U^G(x_0) = U(x_0) - \min_G U$.

**Démonstration :**

Soit $G$ une cellule strictement incluse dans $M$ (le cas $G = M$ étant trivial à traiter), l'idée principale consiste à appliquer le corollaire 3 à $M$ puis à $G$.

Cependant il va falloir pouvoir sortir de $M$, et pour ceci rajoutons un point $y_1 \notin M$ à $M$. Soit $x_1 \in M \setminus G$, on considère le graphe irréductible $(\widetilde{M}, \widetilde{q})$ défini par

$$\widetilde{M} = M \sqcup \{y_1\}$$

$$\forall\ (x,y) \in \check{\widetilde{M}}, \qquad \widetilde{q}(x,y) = \begin{cases} q(x,y) & \text{, si } (x,y) \in \check{M} \\ 1 & \text{, si } \{x,y\} = \{x_1,y_1\} \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases}$$

Soit également la fonction de coût $\widetilde{V}$ donnée par

$$\forall\ (x,y) \in \check{\widetilde{M}}, \qquad \widetilde{V}(x,y) = \begin{cases} V(x,y) & \text{, si } (x,y) \in \check{M} \\ 1 + \max_{z\in M} c(z) + U(z) - U(x_1) & \text{, si } (x,y) = (x_1, y_1) \\ 0 & \text{, si } (x,y) = (y_1, x_1) \\ +\infty & \text{, sinon} \end{cases}$$

Le fait que $y_1$ n'est relié qu'à $x_1 \notin G$ assure que $G$ reste une cellule dans $\widetilde{M}$, l'inégalité $\widetilde{V}(x_1, y_1) > c(x_1)$ montre que $M$ est également une cellule dans $\widetilde{M}$, et cette construction permet aussi d'avoir que $U^M$ n'est autre que la restriction de $U^{\widetilde{M}}$ à $M$ (ainsi que $\rho = \rho^{\widetilde{M}} = \rho^M$ sur $M$).

Reprenons les familles $(m_0^{(t)})_{t\geq 0}$ et $(\beta^{(t)})_{t\geq 0}$ introduites dans le corollaire 3 et notons $(X^{(t)})_{t\geq 0}$ la famille de processus de Markov associée sur $\widetilde{M}$.

Appliquons le corollaire 3 à la cellule $M$ pour voir que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{R^{-1}(M)\rho^M(x_0)\exp((\sigma(M) - U^M(x_0))t)} \mathbb{E}\left[\int_0^{T^{(M,t)}} \mathbb{1}_{\{x_0\}}(X_u^{(t)})\, du\right] = 1$$

(ceci étant vrai pour tout $x_0 \in M$, car $\sigma(M) = U(x_1) + \widetilde{V}(x_1, y_1) > \max_{z\in M} c(z) + U(z)$ implique que $C(M) = M$).

Cependant, soit

$$\begin{aligned} T_0 &= 0 \\ S_0 &= \inf\{s \geq 0 \,/\, X_s^{(t)} \notin G\} \end{aligned}$$

puis par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} T_n &= \inf\{s \geq S_{n-1} \,/\, X_s^{(t)} \in G\} \\ S_n &= \inf\{s \geq T_n \,/\, X_s^{(t)} \notin G\} \end{aligned}$$

On peut alors écrire

$$\int_0^{T^{(M,t)}} \mathbb{1}_{\{x_0\}}(X_u^{(t)})\, du = \sum_{T_n \leq T^{(M,t)}} \int_{T_n}^{S_n} \mathbb{1}_{\{x_0\}}(X_u^{(t)})\, du$$

or d'après le corollaire 3, si $x_0 \in C(G)$, il existe une fonction $\epsilon\ :\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ vérifiant $\lim_{t\to+\infty} \epsilon(t) = 0$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} (1-\epsilon(t))\rho^G(x_0)\exp(-U^G(x_0)t)\mathbb{E}\left[\int_{T_n}^{S_n} du\right] &\leq \mathbb{E}\left[\int_{T_n}^{S_n} \mathbb{1}_{\{x_0\}}(X_u^{(t)})\, du\right] \\ &\leq (1+\epsilon(t))\rho^G(x_0)\exp(-U^G(x_0)t)\mathbb{E}\left[\int_{T_n}^{S_n} du\right] \end{aligned}$$

(on aura en effet remarqué que dans le corollaire 3, la convergence est uniforme en les lois initiales), et il en découle que

$$\begin{aligned} (1-\epsilon(t))\rho^G(x_0)\exp(-U^G(x_0)t)\mathbb{E}\left[\int_0^{T^{(M,t)}} \mathbb{1}_G(X_u^{(t)})\, du\right] &\leq \mathbb{E}\left[\int_0^{T^{(M,t)}} \mathbb{1}_{\{x_0\}}(X_u^{(t)})\, du\right] \\ &\leq (1+\epsilon(t))\rho^G(x_0)\exp(-U^G(x_0)t)\mathbb{E}\left[\int_0^{T^{(M,t)}} \mathbb{1}_G(X_u^{(t)})\, du\right] \end{aligned}$$

Mais comme précédemment (en appliquant le corollaire 3 à $M$), il apparaît que

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{R^{-1}(M)\sum_{x\in G}\rho^M(x)\exp((\sigma(M)-U^M(x))t)}\mathbb{E}\left[\int_0^{T^{(M,t)}}\mathbb{1}_G(X_u^{(t)})\,du\right]=1$$

c'est-à-dire aussi que

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\exp((U^G(x_0)+\min_G U-\sigma(M))t)}{R^{-1}(M)\rho^G(x_0)(\sum_{x\in N'(G)}\rho(x))}\mathbb{E}\left[\int_0^{T^{(M,t)}}\mathbb{1}_{\{x_0\}}(X_u^{(t)})\,du\right]=1$$

où on a noté

$$\begin{aligned} N'(G) &= \{x\in G\,/\,U^M(x)=\min_G U^M\}\\ &= \{x\in G\,/\,U(x)=\min_G U\}\end{aligned}$$

En regroupant ces estimées, on en déduit le résultat annoncé.

□

On voit également que

$$\rho^G(x_0)=\left(\sum_{x\in N(G)}\rho(x)\right)^{-1}\rho(x_0)\tag{9}$$

car a posteriori $N'(G)=N(G)$.

En effet, du fait que $N(G)\subset C(G)$, il est clair que $N(G)\subset N'(G)$. Réciproquement, puisque $\sum_{x\in N(G)}\rho^G(x)=1$, il apparaît que sous les hypothèses du corollaire 3,

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{T^{(G,t)}}\mathbb{1}_{N(G)}(X_s^{(t)})\,ds\right]}{\mathbb{E}[T^{(G,t)}]}=1$$

c'est-à-dire que pour tout $x_0\in G\setminus N(G)$,

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{T^{(G,t)}}\mathbb{1}_{\{x_0\}}(X_s^{(t)})\,ds\right]}{\mathbb{E}[T^{(G,t)}]}=0$$

or comme dans la preuve ci-dessus, ceci permet de voir que

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{T^{(M,t)}}\mathbb{1}_{\{x_0\}}(X_s^{(t)})\,ds\right]}{\mathbb{E}\left[\int_0^{T^{(M,t)}}\mathbb{1}_G(X_s^{(t)})\,ds\right]}=0$$

puis que $U^M(x_0)>\min_G U^M$. L'égalité (9) peut se traduire aussi par le fait que la quantité $\rho^G(x)/\rho(x)$ ne dépend pas du choix de $x\in C(G)$.

Il existe certainement de simples manipulations combinatoires sur la définition d'une cellule, de son cycle associé et de l'énergie virtuelle (à partir de la formule de Freidlin et Wentzell pour les mesures invariantes) qui permettent d'obtenir directement le corollaire 4, mais nous n'y sommes pas arrivé (sauf à faire appel aux résultats sur les cycles de [6] et [14], voir la section suivante), ce qui nous a fait préférer cette approche plus probabiliste.

# 3 Décompositions en cycles

L'inconvénient majeur des cellules, c'est qu'elles sont a priori malaisées à reconnaître, car même si l'on connait l'énergie virtuelle $U$ associée à la fonction de coût $V$ sur le graphe irréductible $(M, q)$, il n'est pas facile (mis à part dans les cas classiques où $q$ est réversible et où $V$ dérive d'un potentiel) de calculer l'énergie virtuelle associée aux restrictions de $q$ et $V$ à un sous-graphe de $(M, q)$. Nous allons donc plutôt les caractériser en termes de cycles, qui sont des sous-graphes qui ont l'avantage que leur énergie virtuelle n'est autre que la restriction de l'énergie virtuelle associée au triplet initial $(M, q, V)$. Ceci nous permettra de partitionner convenablement un sous-graphe quelconque en les cellules maximales qui y sont incluses en vue de l'étude du comportement du couple de sortie renormalisé de cet ensemble. Mais on pourrait se contenter de sa décomposition en cycles maximaux et c'est d'ailleurs celle-ci qui est la plus indiquée quand on s'intéresse aux comportements des temps d'occupations. Nous en profiterons également pour donner des caractérisations plus probabilistes des cellules et des cycles en fonction du comportement des trajectoires avant sortie.

Dans le cadre que l'on s'est fixé $(M, q, V)$, les cycles ont été introduits par Hwang et Sheu [6] (voir aussi Trouvé [14]) d'une manière récursive (on considère d'abord les cycles d'ordre 0 qui sont les singletons, puis si on a construit les cycles d'ordre $p \geq 0$, les cycles d'ordre $p+1$, qui formeront eux aussi une partition de $M$, seront certaines réunions de ces derniers, et en un nombre fini d'étapes on obtient l'ensemble $M$ tout entier, les cycles étant alors tous les sous-graphes qui sont apparus au cours de cette procédure), ce qui permet ensuite à partir de certaines quantités qui leur sont associés d'obtenir une formule pour l'énergie virtuelle (cf. la proposition 1.22 p. 24 de [14]).

Nous allons adopter une présentation inverse en partant de l'énergie virtuelle (que l'on suppose connue à partir des formules de Freidlin et Wentzell, cf. le lemme 3.1 p. 177 de [4]) pour nous ramener d'une certaine manière aux cas où la fonction de coût dérive d'un potentiel satisfaisant la condition de réversibilité faible de Hajek. Cependant, si les preuves diffèrent de celles de [6] et [14] et si nous pensons que cette démarche est plus susceptible de s'adapter aux situations analogues sur une variété riemannienne compacte et connexe, la plupart des résultats importants présentés dans cette section ne sont pas originaux et on donnera à chaque fois une référence précise aux travaux de Trouvé [14].

Par ailleurs, pour ce qui concerne le trou spectral du générateur symétrisé, il existe également une procédure très astucieuse, dite "filling method", qui permet de se ramener à l'autre situation bien connue de Metropolis, on renvoit pour ceci à [3] (il s'y est d'ailleurs glissé une petite erreur, car l'affirmation $\mathcal{O}' \geq 0$ p. 1039 est en général fausse, néanmoins ce n'est pas très grave, car il est facile de vérifier que le trou spectral (et plus généralement tout le spectre) de l'opérateur que l'on obtient en effaçant les transitions qui ne vérifient pas cette inégalité est asymptotiquement équivalent à basse température au trou spectral (resp. au spectre) du générateur initial). Cependant cette procédure n'est pas très utile pour la description des cycles, ni surtout pour l'obtention de la proposition 7, qui est cruciale pour nous (on peut toutefois voir à partir de ce qui suit que les cycles associés à la fonction de coût $V$ ou à sa symétrisée définie par $\forall\ (x, y) \in \check{M}$, $\widetilde{V}(x, y) = \min(V(x, y)\,;\, U(y) + V(y, x) - U(x))$ sont les mêmes).

Pour définir les cycles, associons un nouveau graphe irréductible "virtuel" $(\widehat{M}, \widehat{q})$ à $(M, q)$ de la manière suivante : Pour tout $(x, y) \in \check{M}$ dont la transition de $x$ à $y$ est permise par $q$, soit $x \cdot y$ un nouveau point n'appartenant pas à $M$. On pose

$$\widehat{M} = M \sqcup \{x \cdot y \,/\, (x, y) \in \check{M},\ q(x, y) > 0\}$$

puis on considère la famille d'intensités de sauts $\widehat{q}$ donnée par

$$\forall\ z \neq z' \in \widehat{M}, \qquad \widehat{q}(z,z') = \begin{cases} q(x,y) & \text{, si } z = x \text{ et } z' = x \cdot y \text{ avec } x, y \in M \\ 1 & \text{, si } z = x \cdot y \text{ et } z' = y \text{ avec } x, y \in M \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases}$$

On introduit également la fonction $\widehat{U}$ définie par

$$(10) \qquad \forall\ z \in M, \qquad \widehat{U}(z) = \begin{cases} U(x) & \text{, si } x \in M \\ U(x) + V(x,y) & \text{, si } z = x \cdot y \text{ avec } x, y \in M \end{cases}$$

et la fonction de coût (virtuelle) $\widehat{V}$ qui en découle :

$$\forall\ z \neq z' \in \widehat{M}, \qquad \widehat{V}(z,z') = \begin{cases} (\widehat{U}(z') - \widehat{U}(z))_+ & \text{, si } q(z,z') > 0 \\ +\infty & \text{, sinon} \end{cases}$$

Les qualificatifs "virtuels" sont justifiés par le résultat suivant :

**Lemme 5**

L'énergie virtuelle associée à $(\widehat{M}, \widehat{q}, \widehat{V})$ n'est autre que $\widehat{U}$.

**Démonstration :**

Commençons par rappeler l'expression donnée par Freidlin et Wentzell pour $U$ : Si $M_x$ désigne l'ensemble des $x$-graphes pour $x \in M$, on pose pour $h \in M_x$, $v(h) = \sum_{(y \to z) \in h} V(y,z)$ (sa valuation relativement à $V$), et on a

$$U(x) = \min_{h \in G_x} v(h) - \min_{y \in M} \min_{h \in G_y} v(h)$$

(on notera aussi $M_x^*$ l'ensemble des $h \in M_x$ pour lesquels $v(h) < +\infty$).

Soient maintenant $x, y \in M$ tels que $q(x,y) > 0$ et $h \in M_x$, on obtient un élément $\widetilde{h}$ de $M_y$ en enlevant à $h$ la flêche partant de $y$ et en lui ajoutant $(x \to y)$, et le résultat de cette opération est que $v(\widetilde{h}) \leq v(h) + V(x,y)$, d'où il resort que $U(y) \leq U(x) + V(x,y)$, cette inégalité étant d'ailleurs donc toujours satisfaite.

On en déduit facilement que pour tout $(x,y) \in \check{M}$,

$$(11) \qquad V(x,y) = \widehat{V}(x, x \cdot y) + \widehat{V}(x \cdot y, y) = \widehat{V}(x, x \cdot y)$$

Pour exploiter cette égalité, remarquons que pour $x \in M$, il existe une bijection naturelle entre $M_x^*$ et $\widehat{M}_x^*$ qui consiste à remplacer les flêches de la forme $(y \to z)$ par $(y \to y \cdot z)$ et $(y \cdot z \to z)$. De même à $h \in M_x^*$ on peut associer un élément $\widetilde{h} \in \widehat{M}_{x \cdot y}^*$ en effectuant les mêmes opérations et en rajoutant la flêche $(x \to x \cdot y)$ et cette application est une bijection. Le résultat annoncé découle alors immédiatement de ces remarques, de (11) qui montre que les valuations sont préservées ou convenablement transformées par ces bijections et de la formule de Freidlin et Wentzell.

□

En fait on aurait pu se contenter de ne rajouter les points $x \cdot y$ que pour les $(x,y) \in \check{M}$ tels que $V(x,y) \neq (U(y) - U(x))_+$, car tout ce qui suit serait encore valable.

Autorisons-nous maintenant une petite digression qui sera importante pour la suite :

Soit un graphe irréductible $(M,q)$ muni d'une fonction de coût $V$ dérivant d'un potentiel (c'est-à-dire qu'il existe une fonction $\widetilde{U}$ telle que pour tout $(x,y) \in \check{M}$ dont la transition de $x$ à $y$ est permise, on a $V(x,y) = (\widetilde{U}(y) - \widetilde{U}(x))_+$), on dit que la condition de réversibilité faible de

Hajek est vérifiée si pour tout $(x,y) \in \check{M}$ la hauteur minimum (pour $\widetilde{U}$) à franchir pour aller de $x$ à $y$ est la même que celle pour aller de $y$ à $x$, c'est-à-dire si

$$\min_{(x_i)_{1\leq i\leq N}\in\mathcal{C}_{x,y}} \max_{1\leq i\leq N} \widetilde{U}(x_i) = \min_{(x_i)_{1\leq i\leq N}\in\mathcal{C}_{y,x}} \max_{1\leq i\leq N} \widetilde{U}(x_i)$$

où $\mathcal{C}_{x,y}$ désigne l'ensemble des chemins (pour $q$) allant de $x$ à $y$.

Il est connu (voir le théorème 1.35 p. 37 de [14], la condition nécessaire étant due à [5]) que cette condition est équivalente au fait que l'énergie virtuelle est donnée par $U = \widetilde{U} - \min_M \widetilde{U}$.

Nous allons retrouver ce résultat par une autre méthode, en montrant que la condition suffisante découle immédiatement de l'expression de Freidlin et Wentzell pour $U$ et en utilisant une récurrence sur le cardinal de $M$ ainsi que le corollaire 4 pour la condition nécessaire :

Remarquons tout d'abord que pour vérifier la condition de Hajek, il suffit de le faire pour $(x,y) \in \check{M}$ dont la transition de $x$ à $y$ est permise (on se ramène à cette situation en choisissant un chemin qui va de $x$ à $y$ et qui minimise la hauteur à franchir pour $\widetilde{U}$ et en considérant ses éléments consécutifs), auquel cas il faut voir que

$$\min_{(x_i)_{1\leq i\leq N}\in\mathcal{C}_{y,x}} \max_{1\leq i\leq N} \widetilde{U}(x_i) \leq \widetilde{U}(x) \vee \widetilde{U}(y)$$

l'inégalité dans l'autre sens étant triviale.

Faisons donc l'hypothèse que l'énergie virtuelle est donnée par $U = \widetilde{U} - \min_M \widetilde{U}$, et soit $h \in M_x$ pour lequel $v(h)$ soit minimal. De ce $x$-graphe $h$, on peut extraire un chemin $(x_i)_{1\leq i\leq N} \in \mathcal{C}_{y,x}$ en suivant les flêches permettant d'aller de $y$ à $x$. Soit $1 \leq j < N$, on obtient un $x_j$-graphe en rajoutant à $h$ la flêche $(x \to y)$ et en enlevant la flêche $(x_{j+1} \to x_j)$, et il apparaît ainsi que $\widetilde{U}(x_j) \leq \widetilde{U}(x) + (\widetilde{U}(y) - \widetilde{U}(x))_+ = \widetilde{U}(y) \vee \widetilde{U}(x)$, puis que la condition de Hajek est satisfaite.

La réciproque est un peu plus délicate, considérons donc un graphe irréductible $(M,q)$ muni d'un potentiel $\widetilde{U}$ satisfaisant la condition de Hajek et montrons par récurrence sur le cardinal de $M$ que son énergie virtuelle est $\widetilde{U}$ à une constante additive près. Le cas où $M$ est un singleton est trivial, supposons donc que $\mathrm{card}(M) \geq 2$. Soit $A = \{x \in M \,/\, \widetilde{U}(x) = \max_M \widetilde{U}\}$ et $B = M \setminus A$, la condition de Hajek permet de voir que $B$ se partitionne en $B_1 \sqcup B_2 \sqcup \cdots \sqcup B_p$ où chacun des $B_i$, $1 \leq i \leq N$, muni de la restriction de $q$ est irréductible, vérifie la condition de Hajek pour la restriction de $\widetilde{U}$ et n'admet des transitions permises sortantes que vers $A$.

Ainsi d'après l'hypothèse de récurrence, pour $1 \leq i \leq N$ fixé, l'énergie virtuelle associée à $B_i$ est la restriction de $\widetilde{U}$ à une constante additive près. Ceci permet de vérifier que $B_i$ est une cellule dans $M$ pour laquelle $C(B_i) = B_i$, et le corollaire 4 montre donc que la restriction à $B_i$ de l'énergie virtuelle (associée à M) est de la forme

$$U_{|B_i} = \widetilde{U}_{|B_i} + K_i$$

pour une certaine constante $K_i = \min_{B_i} U - \min_{B_i} \widetilde{U}$.

Cependant rappelons qu'à l'inverse de température $\beta \geq 0$, $\mu_\beta$ est l'unique probabilité qui satisfait pour tout $x \in M$,

$$\sum_{y\neq x} \mu_\beta(x) q_\beta(x,y) = \sum_{y\neq x} \mu_\beta(y) q_\beta(y,x)$$

or en sommant ces égalités pour $x \in B_i$, $1 \leq i \leq N$ fixé, et en retirant aux deux membres $\sum_{x,y\in B_i,\, x\neq y} \mu_\beta(x) q_\beta(x,y)$, il apparaît que

$$\sum_{y\in A} \left( \sum_{x\in B_i} \mu_\beta(x) q_\beta(x,y) \right) \;=\; \sum_{y\in A} \mu_\beta(y) \sum_{x\in B_i} q_\beta(y,x) = \sum_{y\in A} \mu_\beta(y) \sum_{x\in B_i} q(y,x)$$

De même pour $x \in A$ on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\mu_\beta(x)\left(\sum_{1\leq j\leq N}\sum_{y\in B_j} q_\beta(x,y)+\sum_{y\in A\setminus\{x\}} q_\beta(x,y)\right)\\
&= \mu_\beta(x)\left(\sum_{1\leq j\leq N}\sum_{y\in B_j} q(x,y)+\sum_{y\in A\setminus\{x\}} q(x,y)\right)\\
&= \sum_{1\leq j\leq N}\left(\sum_{y\in B_j}\mu_\beta(y)q_\beta(y,x)\right)+\sum_{y\in A\setminus\{x\}}\mu_\beta(y)q(y,x)
\end{aligned}$$

Ceci nous amène à considérer le graphe irréductible $(M^*, q^*_\beta)$ défini par

$$M^* = A \sqcup \{1, \cdots, N\}$$

et pour tout $(x,y) \in \check{M}^*$,

$$q^*_\beta(x,y) = \begin{cases} q(x,y) & \text{, si } x,y \in A \\ \sum_{z\in B_y} q(x,z) & \text{, si } x \in A \text{ et } 1 \leq y \leq N \\ \sum_{x\in B_i} \exp(\beta(\max_M \widetilde{U} + K_i))\mu_\beta(x)q_\beta(x,y) & \text{, si } 1 \leq x \leq N \text{ et } y \in A \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases}$$

car la mesure invariante $\mu^*_\beta$ sur $M^*$ pour le générateur associé aux intensités de sauts $q^*_\beta$ est, à la constante de renormalisation près $Z^*_\beta$, donnée par

$$\forall\ x \in M^*, \qquad \mu^*_\beta(x) = \begin{cases} Z_\beta^{-1}\mu_\beta(x) & \text{, si } x \in A \\ Z_\beta^{-1}\exp(-\beta(\max_M \widetilde{U} + K_x)) & \text{, si } 1 \leq x \leq N \end{cases}$$

Cependant en utilisant le fait que pour $x \in B_i$ et $\beta$ grand,

$$\mu_\beta(x) \sim \rho(x)\exp(-\beta(\widetilde{U}(x) + K_i))$$

il apparaît que pour $1 \leq x \leq N$ et $y \in A$,

$$\lim_{\beta\to+\infty} q^*_\beta(x,y) = \sum_{x\in B_i} \rho(x)q(x,y)$$

Ainsi $q^*_\beta$ converge vers une famille d'intensités de transitions irréductible sur $M^*$. Il en découle à partir de la formule de Freidlin et Wentzell pour les mesures invariantes que pour tout $x \in M^*$ fixé, $\mu^*_\beta$ converge pour $\beta$ grand vers une quantité strictement positive et on en déduit facilement que les $K_i$ ne dépendent pas de $1 \leq i \leq N$, c'est-à-dire finalement le résultat annoncé.

L'idée de la preuve précédente est en fait très simple : D'une certaine manière le corollaire 4 permet de se ramener par récurrence au cas où chacun des $B_i$ est un singleton, situation pour laquelle le résultat est trivial par la formule de Wentzell et Freidlin.

Nous refermons maintenant cette parenthèse ouverte après le lemme 5 et qui nous montre notamment que le graphe virtuel $(\widehat{M}, \widehat{q}, \widehat{U})$ que nous avons considéré vérifie la condition de réversiblité faible de Hajek.

D'ailleurs ceci permet de réaliser que l'on aurait pu prendre pour définition de $H$ :

$$\forall\ (x,y) \in \check{M}, \qquad H(x,y) = \min_{p\in\mathcal{C}_{x,y}} e(p)$$

où l'élévation d'un chemin $(x_i)_{1\leq i\leq N}$ de $\mathcal{C}_{x,y}$ est donnée par

$$e((x_i)_{1\leq i\leq N}) = \max_{1\leq i<N} U(x_i) + V(x_i, x_{i+1})$$

car cette quantité est également l'élévation classique relative à $\widehat{U}$ pour le chemin $(\widehat{x}_i)_{1\leq i\leq \widehat{N}}$ sur $\widehat{M}$ obtenu à partir du précédent en remplaçant les transitions $(x_i \to x_{i+1})$ par $(x_i \to x_i \cdot x_{i+1})$ et $(x_i \cdot x_{i+1} \to x_{i+1})$, et qui est définie par

$$\widehat{e}((\widehat{x}_i)_{1\leq i\leq \widehat{N}}) = \max_{1\leq i\leq \widehat{N}} \widehat{U}(\widehat{x}_i)$$

Cependant ceci est aussi valable pour tout sous-graphe $G$ de $M$,

$$\forall\ (x,y) \in \check{G}, \qquad H(x,y) = \min_{p\in\mathcal{C}^G_{x,y}} e^G(p)$$

où $\mathcal{C}^G_{x,y}$ est l'ensemble des chemins (pour $q^G$) allant de $x$ à $y$ en restant dans $G$ et où $e^G$ est défini comme l'élévation $e$ mais avec $U^G$ à la place de $U$.

D'autre part, soit $\widetilde{U}$ une fonction quelconque sur $M$, on peut considérer la fonction $\widehat{U}$ sur $\widehat{M}$ associée comme dans (10), où l'on aurait remplacé $U$ par $\widetilde{U}$. Le résultat suivant permet de retrouver la proposition 1.34 de [14] :

**Proposition 6**

> Le triplet $(\widehat{M}, \widehat{q}, \widehat{U})$ satisfait la condition de Hajek si et seulement si $\widetilde{U}$ est $U$ à une constante additive près

**Démonstration :**

Il nous suffit de voir la condition nécessaire. Soit $x, y \in M$ dont la transition de $x$ à $y$ est permise par $q$. L'élévation minimum relativement à $\widehat{U}$ pour aller de $x$ à $x\cdot y$ dans $\widehat{M}$ est $\widehat{U}(x\cdot y) = \widetilde{U}(x) + V(x,y)$, ainsi la condition de Hajek impose que $\widetilde{U}(y) = \widehat{U}(y) \leq \widetilde{U}(x) + V(x,y)$, car pour aller de $x\cdot y$ à $x$ on doit d'abord passer par $y$. On en déduit que $\widehat{V}(x, x\cdot y) = V(x,y)$ et $\widehat{V}(x\cdot y, y) = 0$, ce qui par le biais de la bijection naturelle entre $M^*_x$ et $\widehat{M}^*_x$ pour $x \in M$ et de la formule de Freidlin et Wentzell pour les énergies virtuelles montre que l'énergie virtuelle $U$ associée à $(M, q, V)$ et la restriction à $M$ de celle associée à $(\widehat{M}, \widehat{q}, \widehat{V})$ (qui est $\widetilde{U}$ à une constante additive près du fait de la validité de la condition de Hajek) coïncide à une constante additive près.

□

Par construction du graphe virtuel, les sous-graphes de $(M,q)$ et de $(\widehat{M}, \widehat{q})$ sont canoniquement en bijection, ce qui permet d'étendre les définitions relatives à des sous-graphes d'un graphe muni d'un potentiel satisfaisant les conditions de Hajek au cadre général $(M, q, V)$.

Ainsi on dit qu'un sous-graphe $G$ de $(\widehat{M}, \widehat{q})$ est un cycle si c'est un singleton ou s'il existe $\lambda \in I\!R_+$ tel que $G$ soit une composante connexe (au sens ici de sous-graphe maximal pour l'inclusion ensembliste) de l'ensemble $\{x \in M \,/\, \widehat{U}(x) < \lambda\}$, ce qui nous fournit par restriction à $M$ la notion de cycles de $(M, q, V)$ (si $V$ dérivait déjà d'un potentiel satisfaisant la condition de Hajek, on vérifie que l'on retrouve bien la définition usuelle).

Comme exemple typique, nous laissons au lecteur le soin de vérifier que pour une cellule $G$, $C(G)$ est effectivement un cycle (pour celui-ci on peut prendre $\lambda = \min_G U + \sigma(G)$) et que plus précisément c'est le cycle maximal inclus dans $G$ qui contient $N(G)$.

**Proposition 7**

Soit $G$ un cycle de $(M,q,V)$, son énergie virtuelle est donnée par $U^G = U - \min_G U$.

Remarquons toutefois que cette propriété est trivialement satisfaite par tous les sous-graphes $G$ dans le cas classique de Metropolis, ou plus généralement si les $L_\beta$ sont symétriques dans $L^2(\mu_\beta)$.

**Démonstration :**

Soit $(\widehat{G}, \widehat{q}^G)$ le graphe virtuel associé à $(G, q^G)$, il apparaît que la restriction de $\widehat{U}$ à $(\widehat{G}, \widehat{q})$ satisfait la condition de Hajek, ainsi une application immédiate de la proposition 6 permet d'obtenir le résultat annoncé.

□

On en déduit facilement que tout cycle est une cellule, et ceci nous fournit une définition plus locale des cycles ; ce sont les cellules $G$ pour lesquelles $C(G) = G$. Ceci permet par exemple de montrer que si $C$ est un cycle dans $(M,q,V)$ et si $G$ est un sous-graphe de $M$ tel que $C \subset G$, alors $C$ est encore un cycle de $(G, q^G, V^G)$, dont la hauteur de sortie $\sigma(C)$ sera la même si on la calcule dans $G$ ou dans $M$, pourvu que $\widetilde{\mathrm{S}}_{\mathrm{e}}(C) \cap G \neq \emptyset$.

Il n'est pas trop difficile non plus de voir à partir de cette proposition que pour $(x,y) \in \check{M}$, si $h \in M_x$ est de valuation minimale, alors le chemin $p$ allant de $y$ à $x$ que l'on obtient en suivant des flèches issues de $h$ est d'élévation minimale (cette remarque permet par exemple d'arranger le lemme 4.33 de [3], qui est faux en général, en montrant qu'il existe certaines familles de chemins pour lesquelles il est quand même satisfait). Ce résultat s'exprime aussi en disant que si $C$ est un cycle contenant $x$, alors la restriction à $C$ de $h$ (de valuation minimale dans $M_x$) est encore un $x$-graphe dans $C$, mais ceci pouvait se montrer directement à partir de (9).

Conformément à ce que nous avons annoncé au début de cette section, nous allons maintenant donner une procédure qui permet de reconnaître les cellules :

Soit $G$ un sous-graphe de $M$, on considère sa décomposition en cycles (pour $(M,q,V)$) maximaux, $G = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_N$, il est alors facile de voir en se servant des résultats précédents que $G$ sera une cellule si et seulement si :

- Il existe $1 \leq i_0 \leq N$ tel que $\{x \in G \,/\, U(x) = \min_G U\} \subset C_{i_0}$.
- Pour tout $1 \leq i \leq N$ tel que $i \neq i_0$, $\sigma(C_i) < \sigma(C_{i_0})$.
- Pour tout $1 \leq i \leq N$ tel que $i \neq i_0$, $\widetilde{\mathrm{S}}_{\mathrm{e}}(C_{i_0}) \subset G$.

Et si ces conditions sont remplies on a $C(G) = C_{i_0}$ et $\sigma(G) = \sigma(C_{i_0})$.

Cette structure des cellules permet de mettre en évidence le fait que si $G$ et $G'$ sont deux cellules de $M$ telles que $G \cap G' \neq \emptyset$, alors $G \cup G'$ est encore une cellule, et par suite que tout sous-graphe $G$ admet une partition en cellules maximales de $M$ (cependant en pratique pour la construire il vaut mieux commencer par considérer la partition de $G$ en cycles maximaux). Elle permet aussi de se rendre compte que pour la définition d'une cellule, on peut remplacer $U^G$ par $U$ et $H^G$ par $H$ (même si ces fonctions ne sont pas égales, d'ailleurs en remarquant que

$$\delta(G) = (\min_{i \neq i_0} \delta_1(G, C_i)) \wedge \delta_2(G, C_{i_0}) \wedge \delta_3(G, C_{i_0})$$

avec

$$\begin{aligned}
\delta_1(G, C_i)) &= \min_{x \in C_i, y \notin G} U^{C_i}(x) + V(x,y) - \sigma(C_i) \\
\delta_2(G, C_{i_0}) &= \sigma(C_{i_0}) - \min_{i \neq i_0} \sigma(C_i) \\
\delta_3(G, C_{i_0}) &= \min_{x \in C_{i_0}, z \in C_{i_0}, y \notin G} V(x,y) - H^{C_{i_0}}(x,z) + U^{C_{i_0}}(x) + U^{C_{i_0}}(z)
\end{aligned}$$

on voit que $\sigma(G)$ et $\delta(G)$ prendront les mêmes valeurs si on les calcule à partir de $U^G$ et $H^G$ ou à partir de $U$ et $H$ (en notant que pour $x \in G$, $c^G(x) = \max_{y\in G\setminus\{x\}} H(x,y) - U(y) - U(x) + \min_G U$), ce qui ne change pas les conditions (2) et (3)), et ceci permet donc a posteriori de repérer plus facilement les cellules si l'on a déjà calculé $U$.

Dans le même ordre d'idées, soit $G$ une cellule et $z \in G$, il apparaît sans trop de difficulté que l'on a toujours $U^G(z) \geq U(z) - \min_G U$ et sur des exemples simples on vérifie que l'on peut avoir une inégalité stricte si $z \in G \setminus C(G)$.

Enfin donnons également une caractérisation des cellules et des cycles à partir du comportement des trajectoires avant sortie, qui ne fasse intervenir directement aucune des quantités associées au graphe $(M, q, V)$ ou à ses sous-graphes :

Soit $G$ un sous-graphe de $(M, q)$, on note par $\mathcal{P}(G)$ l'ensemble des probabilités portées par $G$ et $\mathcal{P}^\infty(G)$ l'ensemble des familles $(m_0^{(t)})_{t\geq 0}$ de telles mesures (cependant pour ce qui suit, on peut prendre de manière équivalente pour $\mathcal{P}^\infty(G)$ l'ensemble, de même cardinal que $G$, des familles $(m_0^{(t)})_{t\geq 0}$ pour lesquelles il existe $x \in G$ tel que pour tout $t \geq 0$, $m_0^{(t)} = \delta_x$).

Si une telle famille est fixée, on considère à nouveau la famille d'évolutions donnée par $\beta_s^{(t)} = t$ pour tout $t, s \geq 0$, et $(X^{(t)})_{t\geq 0}$ la famille de processus associée.

Pour $x_0 \in G$, on pose

$$T_{x_0}^{(t)} = \inf\{s \geq 0 \,/\, X_s^{(t)} = x_0\}$$

Rappelons que $\lim^{(\mathbb{P})}$ désigne la convergence en probabilité.

**Proposition 8**

On a équivalence entre

i) $G$ est une cellule

ii) $\exists\, x_0 \in G \,/\, \forall\, (m_0^{(t)})_{t\geq 0} \in \mathcal{P}^\infty(G), \quad \lim^{(\mathbb{P})}_{t\to+\infty} T_{x_0}^{(t)}/T^{(G,t)} = 0$

iii) $\exists\, x_0 \in G,\ \exists\, a > 0 \,/\, \forall\, (m_0^{(t)})_{t\geq 0} \in \mathcal{P}^\infty(G), \quad \lim^{(\mathbb{P})}_{t\to+\infty} G^{(t)}_{T^{(G,t)}}(x_0)/T^{(G,t)} = a$

Si ces conditions sont satisfaites, l'ensemble des $x_0$ pour lesquels ii) (respectivement iii)) est vérifié est $C(G)$ (respectivement $N(G)$).

D'autres quantités peuvent avoir des interprétations "stochastiques" : Ainsi par exemple,

$$\sigma(G) = \lim_{t\to+\infty} t^{-1} \ln(\mathbb{E}[T^{(G,t)}])$$

et si $x \in C(G)$, on a

$$U(x) - \min_G U = U^G(x) = -\lim_{t\to+\infty} t^{-1} \ln\left(\frac{\mathbb{E}[G^{(t)}_{T^{(G,t)}}(x)]}{\mathbb{E}[T^{(G,t)}]}\right)$$

(mais aussi p.s. $U^G(x) = -\lim^{(\mathbb{P})}_{t\to+\infty} t^{-1} \ln(G^{(t)}_{T^{(G,t)}}(x)/T^{(G,t)})$), et

$$c^G(x) + U^G(x) = \lim_{t\to+\infty} t^{-1} \ln\left(\max_{m_0^{(t)}\in\mathcal{P}(G)} \mathbb{E}[T_x^{(t)}]\right)$$

(pour ce dernier point, il faut d'abord donner l'interprétation suivante de $c^G(x) + U^G(x)$ pour $x \in C(G)$ : on décompose en cycles maximaux $G\setminus\{x\} = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_N$, de sorte que $c^G(x) + U^G(x) = \max_{1\leq i\leq N} \sigma(C_i)$ et on obtient le résultat ci-dessus en s'inspirant de la méthode présentée dans la section suivante).

D'une manière similaire on a

**Proposition 9**

On a équivalence entre

i) $G$ est un cycle

ii) $\forall\ x_0 \in G,\ \forall\ (m_0^{(t)})_{t\geq 0} \in \mathcal{P}^\infty(G), \quad \lim_{t\to+\infty}^{(I\!P)} T_{x_0}^{(t)}/T^{(G,t)} = 0$

Si $G$ n'est pas un singleton, on a de plus équivalence de i) et ii) avec

iii) $\forall\ x_0 \in G,\ \forall\ (m_0^{(t)})_{t\geq 0} \in \mathcal{P}^\infty(G), \quad \lim_{t\to+\infty}^{(I\!P)} G_{T^{(G,t)}}^{(t)}(x_0) = +\infty$

Nous nous contenterons d'esquisser une preuve de i) $\Rightarrow$ ii) de la proposition 8. Cette implication découle en fait d'un résultat plus fort : Soit $G$ une cellule qui ne soit pas un singleton, soit $(m_0^{(t)})_{t\geq 0} \in \mathcal{P}^\infty(G)$ et $(\beta^{(t)})_{s\geq 0}$ une famille d'évolutions satisfaisant pour un certain $h_0 > 0$, la condition

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \lim_{t\to+\infty} \beta_0^{(t)} & = & +\infty \\ \limsup_{t\to+\infty} \sup_{s\geq 0} \exp(h_0 \beta_s^{(t)}) \left| \frac{d\beta_s^{(t)}}{ds} \right| & < & +\infty \end{array} \right.$$

(il serait évidemment possible d'amoindrir encore cette hypothèse en des conditions intégrales), alors pour tout $x_0 \in G$ tel que $c^G(x_0) + U^G(x_0) < h_0$ et toute application $b\ :\ I\!R_+ \to I\!R_+$ telle que pour $t$ grand, $\exp((c^G(x_0) + U^G(x_0))\beta_0^{(t)}) \ll b_t$, on a

$$\lim_{t\to+\infty} I\!P\left[\overline{T}_{x_0}^{(t)} \leq b_t\right] = 1$$

($\overline{T}_{x_0}^{(t)}$ est défini comme $T_{x_0}^{(t)}$, mais à partir du processus $\overline{X}^{(t)}$ introduit après l'énoncé du théorème 2), car on a, avec des notations évidentes,

$$\lim_{t\to+\infty}^{(I\!P)} \frac{\overline{G}_{b_t}^{(t)}(x_0)}{\int_0^{b_t} \exp(-\beta_s^{(t)} U^G(x_0))\, ds} = 1$$

(ce qui se montre en procédant comme dans la preuve du théorème 2, du fait que les hypothèses précédentes impliquent que pour $t$ grand, $\exp(c^G(x_0)\beta_0^{(t)}) + \int_0^{b_t} \exp(c^G(x_0)\beta_s^{(t)}) \left|\frac{d\beta_s^{(t)}}{ds}\right| ds \ll \int_0^{b_t} \exp(-\beta_s^{(t)} U^G(x_0))\, ds$).

Or par ailleurs, si on suppose de plus que $\sigma(G) \leq h_0$ et que pour $t$ grand, $b_t \ll \exp(\sigma(G)\beta_0^{(t)})$, alors on vérifie facilement sous l'hypothèse (12) que les conditions (2) , (3) et (4) sont remplies avec $a_t = b_t$ et $F \equiv 0$, et une application du rappel 1 nous donne donc

$$\lim_{t\to+\infty}^{(I\!P)} \frac{T^{(G,t)}}{b_t} = +\infty$$

Cependant les processus $X^{(t)}$ et $\overline{X}^{(t)}$ coïncident avant $T^{(G,t)}$ (en loi ou exactement si on a pris soin de les coupler), ainsi si $x_0 \in C(G)$ et si (12) est satisfait avec $h_0 = \sigma(G)$ (auquel cas on peut prendre $b_t = \exp[\beta_0^{(t)}(c^G(x_0) + U^G(x_0) + \sigma(G))/2]$), on a

$$\lim_{t\to+\infty}^{(I\!P)} \frac{T_{x_0}^{(t)}}{T^{(G,t)}} = 0$$

et ceci est notamment valable pour les processus homogènes à la température $t^{-1}$.

Mais la section suivante peut permettre d'estimer plus précisément $T_{x_0}^{(t)}$, car asymptotiquement il s'interprète donc comme le temps de sortie de $G \setminus \{x_0\}$.

La réciproque ii) $\Rightarrow$ i) s'effectue en considérant la caractérisation d'une cellule par sa décomposition en cycles et en s'intéressant aux différents cas qui peuvent faire qu'un sous-graphe ne soit pas une cellule.

# 4 Théorème de sortie généralisé

Nous allons ici nous intéresser au comportement en loi des couples de sortie renormalisés d'un sous-graphe quelconque, en combinant, par le biais de sa décomposition en cellules maximales, les résultats déjà obtenus pour ces ensembles.

Soit donc $G$ un sous-graphe de $(M, q)$, on a vu dans la section précédente que l'on pouvait le partitionner en cellules maximales de $M$, $G = G_1 \sqcup \cdots \sqcup G_m$. Soit un $1 \leq i_0 \leq m$ fixé et donnons nous une famille $(m_0^{(t)})_{t\geq 0}$ de probabilités initiales toutes portées par $G_{i_0}$. Soit une renormalisation $(a_t)_{t\geq 0}$ qui pour une certaine constante $\sigma > 0$ vérifie

$$\forall\ s \geq 0, \quad \lim_{t\to+\infty} \int_0^{a_t s} \exp(-\sigma \beta_u^{(t)})\, du = F(s)$$

où $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction de classe $C^1$ et strictement croissante. Considérons également une famille d'évolutions $(\beta^{(t)})_{t\geq 0}$ qui satisfait pour la renormalisation précédente les conditions (2) et (4) avec $\delta(G) = \min_{1\leq i\leq m} \delta(G_i)$.

C'est sous ces hypothèses que nous allons étudier pour $t$ grand le comportement en loi du couple de sortie renormalisé $(T^{(G,t)}/a_t, Y^{(G,t)})$ où $T^{(G,t)}$ et $Y^{(G,t)}$ sont définis comme dans l'introduction.

Pour décrire le résultat, soit

$$\begin{aligned} \mathrm{S_e}(G) &= (M \setminus G) \cap (\cup_{i=1}^m \mathrm{S_e}(G_i)) \\ \widetilde{\mathrm{S}}_\mathrm{e}(G) &= (M \setminus G) \cap (\cup_{i=1}^m \widetilde{\mathrm{S}}_\mathrm{e}(G_i)) \end{aligned}$$

($T^{(G,t)}$ est a priori a valeurs dans $\mathrm{S_e}(G) \sqcup \{y_0\}$) et considérons le graphe $G^* = \{1, \cdots, m\} \sqcup \widetilde{\mathrm{S}}_\mathrm{e}(G)$ muni de la famille d'intensités de sauts $q^*$ définie par

$$\forall\ (x,y) \in \check{G}^*, \quad q^*(x,y) = \begin{cases} r^{G_x}(G_y) & \text{, si } 1 \leq x, y \leq m \\ r^{G_x}(y) & \text{, si } 1 \leq x \leq m \text{ et } y \in \widetilde{\mathrm{S}}_\mathrm{e}(G) \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases}$$

(notons qu'en posant $q^*(x,x) = 0$ pour $1 \leq x \leq m$ et $q^*(x,x) = 1$ pour $x \in \widetilde{\mathrm{S}}_\mathrm{e}(G)$, on prolonge $q^*$ en un noyau de probabilités de transitions, et c'est celui-ci que l'on considèrera ci-dessous).

Du fait que l'on a considéré des cellules maximales, il apparaît que les classes de récurrence du graphe $(G^*, q^*)$ sont les singletons $\{x\}$ pour $x \in \widetilde{\mathrm{S}}_\mathrm{e}(G)$.

En effet, pour le voir on commence par décomposer $G$ en cycles maximaux $G = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_{m'}$ (avec $m' \geq m$) et on construit comme ci-dessus un graphe $(G', q')$ avec $G' = \{1, \cdots, m'\} \sqcup \widetilde{\mathrm{S}}_\mathrm{e}(G)$. Puisque chaque cellule $G_i$ sera une réunion de cycles $C_j$, disons $G_i = \sqcup_{j\in I_i} C_j$ avec $I_i \subset \{1, \cdots, m'\}$, et qu'il existe $j_i \in I_i$ tel que $\widetilde{\mathrm{S}}_\mathrm{e}(G_i) \subset \widetilde{\mathrm{S}}_\mathrm{e}(C_{j_i}) \subset G_i \sqcup \widetilde{\mathrm{S}}_\mathrm{e}(G_i)$ et $\widetilde{\mathrm{S}}_\mathrm{e}(C_j) \subset G_i$ pour $j \in I_i \setminus \{j_i\}$, il suffit en fait de voir que les seules classes de récurrence de $(G', q')$ sont les singletons $\{x\}$ pour $x \in \widetilde{\mathrm{S}}_\mathrm{e}(G)$. Cependant on est alors ramené d'après la section précédente au cas d'un graphe muni d'un potentiel $U$ satisfaisant la condition de Hajek et le résultat s'obtient par l'absurde : Supposons qu'il existe une classe de récurrence qui ne soit pas de la forme précédente, elle est alors nécessairement incluse dans $\{1, \cdots, m'\}$, appelons la $\{i_1, \cdots, i_p\}$. En considérant $x \in \widetilde{\mathrm{S}}_\mathrm{e}(C_{i_1} \sqcup \cdots \sqcup C_{i_p})$ qui soit de hauteur minimum pour $U$ et le cycle en dessous de cette hauteur qui contient $C_{i_1}$, on obtient facilement que $\{i_1, \cdots, i_p\}$ doit être réduit à un singleton, ce qui est une contradiction.

Soit $Z = (Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov admettant $q^*$ pour probabilités de transitions, il s'agit donc d'une chaîne absorbée en les éléments de $\widetilde{\mathrm{S}}_\mathrm{e}(G)$, et si on note

$$N = \inf\{n \geq 0 \,/\, Z_n \in \widetilde{\mathrm{S}}_\mathrm{e}(G)\}$$

il est bien connu qu'il existe deux constantes $K > 0$ et $0 < \rho < 1$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}[N > n] \leq K\rho^n$$

Introduisons maintenant pour $1 \leq i \leq m$ et $s \geq 0$ les lois $\nu_{i,s}$ sur $\overline{\mathbb{R}_+}$ qui satisfont pour tout point $u \geq 0$,

$$\nu_{i,s}(]u, +\infty]) = \begin{cases} \exp[-R(G_i)(F(s+u) - F(s))] & , \text{si } \sigma(G_i) = \sigma \\ 0 & , \text{si } \sigma(G_i) < \sigma \\ 1 & , \text{si } \sigma(G_i) > \sigma \end{cases}$$

et construisons par récurrence une suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ de la manière suivante : $T_0 = 0$ et si $T_n$ a été construit, on pose $T_{n+1} = 0$ si $T_n = +\infty$ ou si $Z_n \in \widetilde{\mathrm{S}}_{\mathrm{e}}(G)$ et on considère sinon une variable aléatoire $T_{n+1}$ telle que sa loi conditionnelle sachant $Z$ et $T_0, \cdots, T_n$ soit $\nu_{Z_n, T_0+\cdots+T_n}$. Supposons que la chaîne $Z$ soit issue de $i_0$ (i.e. $Z_0 = i_0$ p.s.), alors

**<u>Théorème 10</u>**

Pour toute fonction continue $f$ sur $\overline{\mathbb{R}_+} \times (\mathrm{S}_{\mathrm{e}}(G) \sqcup \{y_0\})$ telle que $f(+\infty, x)$ ne dépende pas de $x \in \mathrm{S}_{\mathrm{e}}(G) \sqcup \{y_0\}$, on a

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}[f(T^{(G,t)}/a_t, Y^{(G,t)})] = \mathbb{E}[f(T_1 + \cdots + T_N, Z_N)]$$

notamment la loi limite de $T^{(G,t)}/a_t$ est celle de $T_1 + \cdots + T_N$.

Il s'agit là du résultat le plus simple, qui est susceptible d'admettre de multiples variantes et extensions (par exemple on peut remplacer la condition de croissance stricte de $F$ par des hypothèses sur les familles d'évolutions $(\beta^{(t)}_{a_t s+\cdot})$ indexées par $t, s \geq 0$, ou n'obtenir, sous des conditions moins restrictives, que certaines majorations des temps de sortie, si on ne s'intéresse pas vraiment à la convergence étroite de leur renormalisation), nous en donnerons une à la fin de cette section assurant une convergence plus forte. D'autre part remarquons que l'on n'a plus nécessairement l'indépendance asymptotique entre le temps de sortie renormalisé et la position de sortie dans les cas où la loi limite des $T^{(G,t)}/a_t$ est portée par $\mathbb{R}_+$, et que la loi limite du couple dépend des conditions initiales (mais seulement par l'intermédiaire des poids donnés aux différentes cellules maximales).

**Démonstration :**

Dans un premier temps, remarquons que quitte à retrancher à $f$ la valeur $f(+\infty, y_0)$, on peut supposer que

$$\lim_{t\to+\infty} \max_{x\in\mathrm{S}_{\mathrm{e}}(G)\sqcup\{y_0\}} |f(t,x)| = 0$$

et en fait on se ramène facilement au cas où pour tout $x \in \mathrm{S}_{\mathrm{e}}(G) \sqcup \{y_0\}$ fixé, l'application $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto f(t, x)$ est à support compact et de classe $C^1$. Soit d'ailleurs $S_\infty > 0$ tel que $[0, S_\infty]$ contienne tous les supports de ces applications.

Ensuite pour $t \geq 0$ fixé, soit $(\widetilde{X}^{(t)}_s)_{s\geq 0}$ le processus sur $G \sqcup \mathrm{S}_{\mathrm{e}}(G)$ défini par

$$\forall\ s \geq 0, \qquad \widetilde{X}^{(t)}_s = \begin{cases} i & , \text{si } s < T^{(G,t)} \text{ et si } X^{(t)}_s \in G_i, \text{ pour un } 1 \leq i \leq m \\ X^{(t)}_{T^{(G,t)}} & , \text{si } s \geq T^{(G,t)} \end{cases}$$

Par récurrence on pose alors $S^{(t)}_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S^{(t)}_{n+1} = \begin{cases} \inf\{s > S^{(t)}_n \,/\, \widetilde{X}^{(t)}_s \neq \widetilde{X}^{(t)}_{S^{(t)}_n}\} & , \text{si } S^{(t)}_n < +\infty \text{ et } \widetilde{X}^{(t)}_{S^{(t)}_n} \in \{1, \cdots, m\} \\ S^{(t)}_n & , \text{sinon} \end{cases}$$

(à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}_+}$), puis on note

$$\begin{aligned} T^{(t)}_0 &= 0 \\ T^{(t)}_n &= S^{(t)}_n - S^{(t)}_{n-1} \end{aligned}$$

avec la convention que $\infty - \infty = 0$.

Soit aussi pour tout $n \in I\!N$,

$$\widetilde{Z}_n^{(t)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(t)}_{S_n^{(t)}} & \text{, si } S_n^{(t)} \leq S_\infty a_t \\ y_0 & \text{, sinon} \end{cases}$$

et

$$\widetilde{N}^{(t)} = \inf\{n \,/\, \widetilde{Z}_n^{(t)} \in \mathrm{S_e}(G) \sqcup \{y_0\}\}$$

de sorte que

$$f(T^{(G,t)}/a_t, Y^{(G,t)}) = f(S^{(t)}_{\widetilde{N}^{(t)}}, \widetilde{Z}^{(t)}_{\widetilde{N}^{(t)}})$$

Nous allons d'abord prouver que pour tout $n \in I\!N$,

$$\lim_{t\to+\infty} I\!E[f(S_n^{(t)}/a_t, \widetilde{Z}_n^{(t)})\mathbb{1}_{\widetilde{N}^{(t)}=n}] = I\!E[f(S_n, Z_n)\mathbb{1}_{N=n}]$$

où $S_n = T_1 + \cdots + T_n$, ce qui montrera déjà que pour tout $n \in I\!N$,

$$\lim_{t\to+\infty} I\!E[f(S^{(t)}_{\widetilde{N}^{(t)}}/a_t, \widetilde{Z}^{(t)}_{\widetilde{N}^{(t)}})\mathbb{1}_{\widetilde{N}^{(t)}\leq n}] = I\!E[f(S_N, Z_N)\mathbb{1}_{N\leq n}]$$

Soit $G^{**} = \{1, \cdots, m\} \sqcup \mathrm{S_e}(G) \sqcup \{y_0\}$. Du fait que l'événement $\{\widetilde{N}^{(t)} = n\}$ ne dépend que de $\widetilde{Z}_0^{(t)}, \cdots, \widetilde{Z}_n^{(t)}$, il suffit de vérifier que si $g : \overline{I\!R_+} \times \{1, \cdots, m\}^n \times G^{**}$ est une application continue telle que pour tout $(x_i)_{0\leq i\leq n} \in \{1, \cdots, m\}^n \times G^{**}$ fixé, la fonction $I\!R_+ \ni s \mapsto g(s, (x_i)_{0\leq i\leq n})$ est à support dans $[0, S_\infty]$ et de classe $C^1$, alors

$$\lim_{t\to+\infty} I\!E[g(S_n^{(t)}/a_t, \widetilde{Z}_0^{(t)}, \cdots, \widetilde{Z}_n^{(t)})] = I\!E[g(S_n, Z_0, \cdots, Z_n)] \tag{13}$$

Mais ceci se montre par récurrence sur $n \in I\!N$ : Soit $s \geq 0$ et $(x_i)_{0\leq i\leq n} \in \{1, \cdots, m\}^{n+1}$ fixés, il apparaît facilement en appliquant le rappel 1 (où on permet à $F$ de prendre la valeur $+\infty$, ce qui est autorisé d'après [11]) avec les évolutions $\widetilde{\beta}^{(t)}$ données par

$$\forall\, t \geq 0, \forall\, u \geq 0, \qquad \widetilde{\beta}_u^{(t)} = \beta^{(t)}_{a_t s+u}$$

que pour $t$ grand, on a la convergence de l'espérance conditionnelle de la quantité $g(T_{n+1}^{(t)}/a_t + s, x_0, \cdots, x_n, \widetilde{Z}_{n+1}^{(t)})$ sachant que $S_n^{(t)} = a_t s$ et $\widetilde{Z}_n^{(t)} = x_n, \cdots, \widetilde{Z}_0^{(t)} = x_0$, vers

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(s, x_0, \cdots, x_n) \quad \stackrel{\text{déf}}{=} \quad & \int_{I\!R_+\times \mathrm{S_e}(G)} g(u+s, x_0, \cdots, x_n, y)\, \nu_{x_n,s}(du) r^{G_{x_n}}(dy) \\ & + \sum_{1\leq j\leq n} \int_{I\!R_+} g(u+s, y, x_0, \cdots, x_n, j) r^{G_{x_n}}(G_j)\, \nu_{x_n,s}(du) \end{aligned}$$

et on peut montrer plus précisément que cette convergence est uniforme en $s \in \overline{I\!R_+}$ et $(x_i)_{0\leq i\leq n} \in \{1, \cdots, m\}^{n+1}$.

Cependant l'hypothèse de régularité de $F$ assure que l'application $\widetilde{g}$ définie sur $\overline{I\!R_+}\times \{1, \cdots, m\}^{n+1}$ satisfait les mêmes conditions que $g$ si $\sigma(G_{x_n}) = \sigma$, mais aussi dans tous les cas, car si $\sigma(G_{x_n}) < \sigma$, elle vaut

$$\int_{\mathrm{S_e}(G)} g(s, x_0, \cdots, x_n, y)\, r^{G_{x_n}}(dy) + \sum_{1\leq j\leq n} g(s, y, x_0, \cdots, x_n, j) r^{G_{x_n}}(G_j)$$

et est nulle si $\sigma(G_{x_n}) > \sigma$, ce qui nous permet d'appliquer la récurrence pour obtenir (13) avec $n+1$ à la place de $n$ (l'initialisation de la récurrence se traitant plus simplement encore).

Pour obtenir le résultat annoncé dans le théorème, il suffit donc de voir qu'il existe $t_0 \geq 0$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\geq t_0} \mathbb{P}[\widetilde{N}^{(t)} \geq n] = 0$$

et pour ceci nous allons montrer que l'on a une décroissance exponentielle en $n$ uniformément en $t \geq t_0$ :

$$(14) \qquad \exists\ t_0, n_0 \geq 0,\ \exists\ 0 < \rho_0 < 1,\ \forall\ t \geq t_0, \forall\ n \geq n_0, \qquad \mathbb{P}[\widetilde{N}^{(t)} \geq n] \leq \rho_0^n$$

Munissons le graphe $G^{**}$ du noyau markovien $q^{**}$ donné pour tous $x, y \in G^{**}$ par

$$q^{**}(x,y) = \begin{cases} r^{G_x}(G_y) & \text{, si } 1 \leq x, y \leq m \\ r^{G_x}(y) & \text{, si } 1 \leq x \leq m \text{ et } y \in \mathrm{S_e}(G) \\ 1 & \text{, si } x = y \in \mathrm{S_e}(G) \sqcup \{y_0\} \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases}$$

(qui n'est donc que l'extension de $q^*$ à $G^{**}$ qui soit absorbée en $\mathrm{S_e}(G) \sqcup \{y_0\}$).

Soit également le noyau de probabilités de transitions $q^{***}$ sur $G^{**}$ défini pour tous $x, y \in G^{**}$ par

$$q^{***}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{, si } y = y_0 \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases}$$

Les seules classes de récurrence pour $q^{**}$ sont les singletons $\{x\}$ avec $x \in \mathrm{S_e}(G) \sqcup \{y_0\}$, ce qui suffit à assurer l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ et $0 < \rho_0 < 1$ tels que pour tout processus stochastique $\widetilde{Z}$ à temps discret sur $G^{**}$ satisfaisant pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(z_i)_{0\leq i\leq n+1} \in (G^{**})^{n+2}$ tel que $\mathbb{P}[\widetilde{Z}_n = z_n, \cdots, \widetilde{Z}_0 = z_0] > 0$,

$$(15) \qquad \mathbb{P}[\widetilde{Z}_{n+1} = z_{n+1} | \widetilde{Z}_n = z_n, \cdots, \widetilde{Z}_0 = z_0] \geq A_n q^{**}(z_n, z_{n+1})/2 + (1 - A_n) q^{***}(z_n, z_{n+1})/2$$

où $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $[0,1]$ (que l'on peut supposer adaptée à la filtration engendrée par les $(\widetilde{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$), on ait

$$\forall\ n \geq n_0, \qquad \mathbb{P}[\widetilde{N} \geq n] \leq \rho_0^n$$

où $\widetilde{N}$ est le temps d'atteinte par $\widetilde{Z}$ de $\mathrm{S_e}(G) \sqcup \{y_0\}$.

La majoration (14) découle alors de ce que pour $t$ grand, $\widetilde{Z}^{(t)}$ satisfait la condition (15), avec $A_n = \mathbb{P}[S_{n+1}^{(t)} \leq a_t S_\infty | \widetilde{Z}_n^{(t)} = z_n, \cdots, \widetilde{Z}_0^{(t)} = z_0]$, comme on s'en rend compte en utilisant la propriété de Markov de la chaîne $(\widetilde{Z}_n^{(t)}, S_n^{(t)})_{n\in\mathbb{N}}$.

□

On aurait obtenu le même résultat si l'on avait considéré la partition en cycles maximaux, la seule différence est qu'il aurait fallu supposer (4) avec $\delta(G)$ remplacé par $\widetilde{\delta}(G) = \min_{1\leq i\leq m'} \delta(G)$. Or on construit facilement des exemples où pour une cellule $G$, on a $\delta(G) < \widetilde{\delta}(G)$, et d'autres pour lesquels $\delta(G) > \widetilde{\delta}(G)$, ainsi suivant les situations l'une des hypothèses (4) est plus restrictive que l'autre. Ceci suggère que déjà dans le cas d'une cellule, on doit certainement pouvoir améliorer la condition (4) en remplaçant $\delta(G)$ par une autre constante (un peu plus grande).

D'autre part le fait d'avoir introduit $S_\infty$ dans la définition de $\widetilde{Z}_n^{(t)}$ ci-dessus est génant car les variables aléatoires construites en dépendent alors. Il est souvent commode de pouvoir considérer plutôt

$$Z_n^{(t)} = \begin{cases} \widetilde{X}_{S_n^{(t)}}^{(t)} & \text{, si } S_n^{(t)} < +\infty \\ y_0 & \text{, sinon} \end{cases}$$

et
$$N^{(t)} = \inf\{n \,/\, Z_n^{(t)} \in \mathrm{S_e}(G) \sqcup \{y_0\}\}$$

Supposons que $\lim_{s\to+\infty} F(s) = +\infty$, alors par construction $S_N = T_1 + \cdots + T_N$ est p.s. fini. Soit $\epsilon > 0$, il existe donc un $S_\infty > 1$ et un $N_\infty \in \mathbb{N}$ suffisamment grands tels que $\mathbb{P}[N \leq N_\infty$ et $S_N \leq S_\infty - 1] \geq 1-\epsilon$. Cependant en reprenant la première partie de la preuve qui précède (avec ce $S_\infty$ dans la définition de $\widetilde{Z}_n^{(t)}$), il apparaît que

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}[\widetilde{N}^{(t)} \leq N_\infty \text{ et } S^{(t)}_{\widetilde{N}^{(t)}} \leq (S_\infty - 1)a_t] = \mathbb{P}[N \leq N_\infty \text{ et } S_N \leq S_\infty - 1]$$

(car il est clair que l'hypothèse de continuité de $F$ implique que la loi de $S_N$ est sans atome sur $\mathbb{R}_+$).

Ainsi pour $t$ assez grand, on a

$$\mathbb{P}[N^{(t)} < +\infty] \geq \mathbb{P}[N^{(t)} \leq N_\infty] \geq \mathbb{P}[\widetilde{N}^{(t)} \leq N_\infty \text{ et } S^{(t)}_{\widetilde{N}^{(t)}} \leq S_\infty - 1] \geq 1 - 2\epsilon$$

d'où en fin de compte
$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}[N^{(t)} < +\infty] = 1$$
et plus précisément, on a en fait ici convergence étroite de la loi de $N^{(t)}$ vers celle de $N$ et donc notamment
$$\lim_{n\to\infty} \liminf_{t\to+\infty} \mathbb{P}[N^{(t)} \leq n] = 1$$
(ce qui intervient souvent dans les applications et par exemple dans la preuve du théorème 15 de la section suivante).

Par ailleurs, si on veut obtenir quand même (14) avec $N^{(t)}$ à la place de $\widetilde{N}^{(t)}$, il faut renforcer les hypothèses et se servir de la remarque suivante : Toujours en reprenant la preuve du théorème 1 de [11], si on suppose que

$$\lim_{t\to+\infty} \min_{s\geq 0} \beta_s^{(t)} = +\infty \tag{16}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^{+\infty} \exp(-\delta(G)\beta_u^{(t)}) \left|\frac{d\beta_u^{(t)}}{du}\right| du = 0 \tag{17}$$

alors on a

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}[Y^{(G,t)} = y] - r^{G,F}(y)\mathbb{P}[T^{(G,t)} < +\infty] - \delta_{y_0}(y)\mathbb{P}[T^{(G,t)} = +\infty] = 0$$

et la vitesse de cette convergence ne dépend que de celles qui interviennent dans (16) et (17) (voir aussi la preuve de la proposition 6 de [11]).

Il est facile d'en déduire, en effectuant quelques petites modifications dans la preuve précédente, que sous ces hypothèses (16) et (17), une majoration du type (14) est satisfaite par $N^{(t)}$. Ainsi notamment il n'y a p.s. qu'un nombre fini de passage en chacune des cellules maximales avant $T^{(G,t)}$.

Nous allons maintenant restreindre encore les hypothèses précédentes pour obtenir une convergence plus forte :

Plaçons nous dans la situation particulièrement intéressante où $\max_{1\leq i\leq m} \sigma(G_i) \leq \sigma$ et supposons qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tous $s' \geq s \geq 0$ et tout $t$ assez grand,

$$\int_{a_t s}^{a_t s'} \exp(-\sigma\beta_u^{(t)})\, du \geq K(F(s') - F(s) - 1) \tag{18}$$

D'autre part, posons pour tous $s \geq 0$ et $\eta > 1$,

$$g_\eta(s) = \exp(\eta F(s))$$

**Proposition 11**

Sous les hypothèses (16), (17), (18) et $\max_{1 \leq i \leq m} \sigma(G_i) \leq \sigma$, il existe $\eta_0 > 0$ suffisamment petit tel que

$$\limsup_{t \to +\infty} \mathbb{E}[g_{\eta_0}(T^{(G,t)}/a_t)] < +\infty$$

**Démonstration :**

La preuve repose sur l'estimation de la proposition 7 de [11] : En reprenant les notations de la démonstration du théorème 10, pour tout $0 < \eta < \inf\{R(G_i) \,/\, \sigma(G_i) = \sigma\} \leq +\infty$, il existe deux constantes $K(\eta) > 1$ et $t_0 \geq 0$ telles que pour tous $t \geq t_0$, $s \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $x \in G$,

$$\mathbb{E}\left[ \frac{g_\eta((T_{n+1}^{(t)} + S_n^{(t)})/a_t)}{g_\eta(S_n^{(t)}/a_t)} \middle| S_n^{(t)} = a_t s,\, X_{S_n^{(t)}}^{(t)} = x \right] \leq K(\eta) \tag{19}$$

Si $0 < \eta_1 < \inf\{R(G_i) \,/\, \sigma(G_i) = \sigma\}$ est fixé, il est clair par l'inégalité de Hölder que l'on peut prendre pour $0 < \eta \leq \eta_1$, $K(\eta) = K(\eta_1)^{\eta/\eta_1}$ et avec cette constante on a $\lim_{\eta \to 0_+} K(\eta) = 1$.

En fait la majoration (19) n'a été prouvée dans [11] que si $x \in G_i$ avec $1 \leq i \leq m$ tel que $\sigma(G_i) = \sigma$, néanmoins, en écrivant que pour les autres $i$, pour tous $s', s \geq 0$ et pour $t$ assez grand

$$\int_{a_t s}^{a_t s'} \exp(-\sigma(G_i)\beta_u^{(t)})\, du \geq K \exp[(\sigma - \sigma(G_i)) \inf_{u \geq 0} \beta_u^{(t)}](F(s') - F(s) - 1)$$

et en reprenant la preuve de la proposition 7 de [11], on montre facilement que (19) est valable pour tout $x \in G$ et même pour tout $x \in G \sqcup \mathrm{S_e}(G) \sqcup \{y_0\}$, car si $x \in \mathrm{S_e}(G) \sqcup \{y_0\}$, on a fait la convention que $T_{n+1}^{(t)} = 0$.

En effectuant $n$ conditionnements successifs, on en déduit que pour un $t_1 \geq t_0$, on a

$$\forall\, t \geq t_1, \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{E}\left[g_\eta(S_n^{(t)})\right] \leq K(\eta_1)^{\eta n/\eta_1}$$

ce qui, en considérant $p > 1$ et $\eta > 0$ tels que $p\eta < \eta_1$, permet d'obtenir par une nouvelle application de l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g_\eta(S_n^{(t)})\mathbf{1}_{N^{(t)}=n}] &\leq \mathbb{E}[g_{p\eta}(S_n^{(t)})]^{1/p}\mathbb{E}[\mathbf{1}_{N^{(t)}=n}]^{1-1/p} \\ &\leq (K(\eta_1)^{\eta/\eta_1}\rho_0^{1-1/p})^n \end{aligned}$$

Reste à choisir $\eta_0 > 0$ tel que $K(\eta_1)^{\eta_0/\eta_1}\rho_0^{1-1/p} < 1$ pour s'assurer que pour tout $t \geq t_1$,

$$\mathbb{E}[g_{p\eta}(S_{N^{(t)}}^{(t)})] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}[g_\eta(S_n^{(t)})\mathbf{1}_{N^{(t)}=n}] \leq \frac{1}{1 - K(\eta_1)^{\eta_0/\eta_1}\rho_0^{1-1/p}}$$

$\square$

Cette proposition n'est évidemment intéressante que si $\lim_{s \to +\infty} F(s) = +\infty$, auquel cas elle montre notamment aussi que pour tout $t$ suffisamment grand, $T^{(G,t)}$ est p.s. fini. En réunissant le théorème 10 et la proposition 11, on obtient sous leurs hypothèses que si $f : \mathbb{R}_+ \times \mathrm{S_e}(G) \to \mathbb{R}$ est une fonction continue dont la croissance en l'infini de $\max_{x \in \mathrm{S_e}(G)} |f(\,\cdot\,, x)|$ est bornée par celle de $g_\eta(\,\cdot\,)$ avec un $\eta < \eta_0$, alors

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{E}[f(T^{(G,t)}, Y^{(G,t)})] = \mathbb{E}[f(T_1 + \cdots + T_N, Z_N)]$$

## 5 Comportement des temps d'occupations avant sortie

Le but de cette section est de compléter le théorème 2 par un résultat sur le comportement en loi des temps d'occupations avant sortie (sous l'hypothèse que celle-ci intervient d'une bonne manière), pour tout sous-graphe $G$ et en tous les points de $G$.

Mais commençons par généraliser le résultat de convergence en probabilité donné dans la section 2 : Soit $G$ un sous-graphe de $(M, q)$ et soit $x_0 \in G$, on s'intéresse donc au comportement de $G^{(t)}_{T^{(G,t)}}(x_0)$ où $G^{(t)}_{\cdot}(x_0)$ et $T^{(G,t)}$ sont définis comme précédemment. Pour le décrire, introduisons quelques notations : On décompose $G$ en cycles maximaux, $G = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_{m'}$ de telle manière que $x_0 \in C_1$ et posons $\sigma(G) = \max_{1\leq i\leq m'} \sigma(C_i)$ (on aurait obtenu le même nombre si l'on avait considéré la partition en cellules maximales $G = G_1 \sqcup \cdots \sqcup G_m$ et noté $\sigma(G) = \max_{1\leq i\leq m} \sigma(G_i)$).

Supposons que toutes les lois initiales $m_0^{(t)}$ soient portées par $G$ et que la famille d'évolutions $(\beta^{(t)})_{t\geq 0}$ soit telle qu'il existe une renormalisation $(a_t)_{t\geq 0}$ pour laquelle on ait uniformément pour $s$ dans un compact,

$$\lim_{u\to+\infty} \liminf_{t\to+\infty} \int_{a_t s}^{a_t(s+u)} \exp(-\sigma(G)\beta_v^{(t)})\, dv = +\infty \tag{20}$$

(ceci est notamment satisfait si la condition (3) est vérifiée avec $\lim_{s\to+\infty} F(s) = +\infty$).

On fait aussi l'hypothèse que pour tout $s \geq 0$, il existe une renormalisation $({}^{(s)}\widetilde{a}_t)_{t\geq 0}$ telle que uniformément pour $s$ dans les compacts de $\mathbb{R}_+$,

$$\begin{cases} \lim_{u\to+\infty} \liminf_{t\to+\infty} \int_{a_t s}^{a_t s+{}^{(s)}\widetilde{a}_t u} \exp(-\sigma(C_1)\beta_v^{(t)})\, dv &= +\infty \\ \lim_{u\to 0_+} \limsup_{t\to+\infty} \int_{a_t s}^{a_t s+{}^{(s)}\widetilde{a}_t u} \exp(-\sigma(C_1)\beta_v^{(t)})\, dv &= 0 \end{cases} \tag{21}$$

(remarquons que (20) et (21) impliquent que pour tout $S \geq 0$, $\limsup_{t\to+\infty} \sup_{0\leq s\leq S} {}^{(s)}\widetilde{a}_t/a_t < +\infty$ si $\sigma(C_1) = \sigma(G)$ et $\limsup_{t\to+\infty} \sup_{0\leq s\leq S} {}^{(s)}\widetilde{a}_t/a_t = 0$ si $\sigma(C_1) < \sigma(G)$, et dans tous les cas, on peut se ramener à supposer que pour tous $t, s \geq 0$, ${}^{(s)}\widetilde{a}_t \leq a_t$).

Viennent ensuite toutes les hypothèses qui vont permettre d'utiliser les techniques des preuves des théorèmes 2 et 10 : Considérons les évolutions ${}^{(s)}\beta^{(t)}$ données pour tous $t, s \geq 0$ par

$$\forall\ u \geq 0, \qquad {}^{(s)}\beta_u^{(t)} = \beta_{a_t s+u}^{(t)}$$

et supposons que les conditions (2) et (4) sont satisfaites d'une part par les évolutions $(\beta^{(t)})_{t\geq 0}$ et la renormalisation $(a_t)_{t\geq 0}$ mais avec $\delta(G)$ remplacé par $\widetilde{\delta}(G) = \min_{1\leq i\leq m'} \delta(C_i)$ (en fait soit $\widetilde{G}_1, \cdots, \widetilde{G}_{m''}$ les cellules maximales incluses dans $G \setminus C_1$ (qui sont aussi des réunions des $C_i$, $2 \leq i \leq m'$), quitte à considérer la partition $G = C_1 \sqcup \widetilde{G}_1 \sqcup \cdots \sqcup \widetilde{G}_{m''}$, on pourrait encore remplacer cette constante par $\delta(C_1) \wedge \delta(G \setminus C_1)$, où rappelons que $\delta(G \setminus C_1) = \min_{1\leq i\leq m''} \delta(\widetilde{G}_i)$) et d'autre part, uniformément en $s$ dans les compacts de $\mathbb{R}_+$, par les évolutions $({}^{(s)}\beta^{(t)})_{t\geq 0}$ et la renormalisation $({}^{(s)}\widetilde{a}_t)_{t\geq 0}$ avec $\delta(G)$ remplacé par $\delta(C_1)$. On fait également l'hypothèse que ces dernières satisfont la condition (5), toujours uniformément pour $s$ dans les compacts de $\mathbb{R}_+$. Alors,

**Proposition 12**

Sous les hypothèses précédentes, on a la convergence en probabilité

$$\lim_{t\to+\infty}^{(\mathbb{P})} \left(\rho^{C_1}(x_0) \int_0^{T^{(G,t)}} \exp(-U^{C_1}(x_0)\beta_u^{(t)}) \mathbb{1}_{C_1}(X_s^{(t)})\, ds\right)^{-1} G^{(t)}_{T^{(G,t)}}(x_0) = 1$$

(par convention, l'expression précédente vaut 1 si son dénominateur, et par suite son numérateur $G^{(t)}_{T^{(G,t)}}(x_0)$, sont nuls).

Remarquons que pour la démonstration de ce résultat, on peut commencer par supposer que toutes les lois initiales sont portées par un même $C_{i_0}$, $1 \leq i_0 \leq m'$ fixé, car la convergence en probabilité annoncée en découle.

Nous ne donnerons pas ici toute la preuve de cette proposition 12, car elle est relativement proche de celle des théorèmes 2 et 10, mais seulement quelques indications, notons cependant que l'on a remplacé la condition (3) avec $F$ suffisamment régulière du théorème 10 par (20) et l'existence pour tout $s \geq 0$ d'une fonction ${}^{(s)}F : I\!\!R_+ \to I\!\!R_+$ telle que (3) soit satisfaite par les évolutions ${}^{(s)}\beta^{(t)}$ avec la renormalisation $({}^{(s)}\widetilde{a}_t)_{t\geq 0}$ (plus une hypothèse de convergence uniforme en $s$ dans les compacts de $I\!\!R_+$ de ${}^{(s)}F(u)$ vers 0 pour $u$ petit et vers $+\infty$ pour $u$ grand) par (21). En effet, ce qui joue un rôle dans la démonstration est qu'avec une grande probabilité, le temps de sortie $T^{(G,t)}$ soit au plus de "l'ordre de $a_t$" et que les temps de sortie successifs de $C_1$ avant $T^{(G,t)}$ soit effectivement de "l'ordre de ${}^{(s)}\widetilde{a}_t$" sachant que l'entrée a eu lieu au temps $a_t s$ (uniformément pour $s$ dans des compacts) et non pas la convergence étroite de leur renormalisation respective. Plus précisément, la première étape consiste à construire à partir de la chaîne de Markov $Z$ introduite avant le théorème 10 (mais associée ici à $\sigma = \sigma(G)$ et à la décomposition de $G$ en cycles ou encore à la partition $G = C_1 \sqcup \widetilde{G}_1 \sqcup \cdots \sqcup \widetilde{G}_{m''}$ plutôt qu'à celle en cellules maximales) et pour tout $t \geq 0$, une nouvelle famille de variables aléatoires $(\check{T}_n^{(t)})_{n\in I\!\!N}$ à valeurs dans $\overline{I\!\!R_+}$, telle que $\check{T}_0^{(t)} = 0$ et telle que pour tout $n \in I\!\!N$, d'une part $\check{T}_{n+1}^{(t)}$ et $Z_{n+1}$ sont conditionnellement indépendants connaissant $\check{T}_1^{(t)}, \cdots, \check{T}_n^{(t)}$ et $Z_0, \cdots, Z_n$, et d'autre part la loi conditionnelle de $\check{T}_{n+1}^{(t)}$ sachant $\check{T}_1^{(t)} = t_1, \cdots, \check{T}_n^{(t)} = t_n$ et $Z_0 = z_0, \cdots, Z_n = z_n$ (avec $(t_i)_{1\leq i\leq n} \in (\overline{I\!\!R_+})^n$ et $(z_i)_{0\leq i\leq n} \in (G^*)^{n+1}$) est celle qui admet pour fonction de répartition l'application $I\!\!R_+ \ni s \mapsto 1 - \exp(R(C_{z_n}) \int_0^{a_t s} \exp(-\sigma(C_{z_n})\beta^{(t)}_{a_t(t_1+\cdots+t_n)+u})\, du)$ (ceci si $z_n \in \{1, \cdots, m'\}$ et si $t_1 + \cdots + t_n < +\infty$, sinon on pose $\check{T}_{n+1}^{(t)} = 0$). Ensuite par une variante de la preuve du théorème 10, on montre que pour tous $n \in I\!\!N$ et $\tau_1 > 0, \cdots, \tau_n > 0$ fixés, l'expression

$$I\!\!P[N^{(t)} \leq n, T_1^{(t)} \leq \tau_1 a_t, \cdots, T_n^{(t)} \leq \tau_n a_t] - I\!\!P[N \leq n, \check{T}_1^{(t)} \leq \tau_1, \cdots, \check{T}_n^{(t)} \leq \tau_n]$$

converge vers 0 pour $t$ grand. Cependant on vérifie à partir de (20), (2) et (4), que l'on peut choisir $n$ puis récursivement chacun des $\tau_1, \cdots, \tau_n$ de manière à rendre la liminf pour $t$ grand du second terme arbitrairement proche de 1, et on en déduit facilement que

$$\limsup_{t\to+\infty} I\!\!P[N^{(t)} > n \text{ ou } T_1^{(t)} + \cdots + T_{N^{(t)}}^{(t)} > (\tau_1 + \cdots + \tau_n)a_t]$$

peut-être rendu aussi petit que l'on veut, d'où $\lim_{n,s\to+\infty} \limsup_{t\to+\infty} I\!\!P[N^{(t)} > n \text{ ou } T^{(G,t)} \geq a_t s] = 0$. On choisit alors $N_\infty, S_\infty > 0$ tels que pour $t$ assez grand $I\!\!P[N^{(t)} > N_\infty \text{ ou } T^{(G,t)} \geq a_t S_\infty]$ soit arbitrairement petit, puis lors d'une seconde étape, on utilise les hypothèses sur les ${}^{(s)}\beta^{(t)}$ avec $s \in [0, S_\infty]$ pour appliquer au plus $N_\infty$ fois le théorème 2, car on aura remarqué que ce théorème est encore satisfait (dans le cas où $G$ est une cellule) si on assouplit ses hypothèses en remplaçant la condition (3) par (21) (celle-ci seulement pour $s = 0$ et $C_1 = C(G)$, avec $\sigma(C_1) = \sigma(G)$ et ${}^{(0)}\widetilde{a}_t = a_t$).

Si par ailleurs on remplace l'hypothèse (5) pour les ${}^{(s)}\beta^{(t)}$ par l'existence d'un $a \in I\!\!R$ tel que uniformément en $s$ dans les compacts de $I\!\!R_+$ et $u$ dans les compacts de $I\!\!R_+^*$, on ait pour un $x_1 \in C_1$,

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \exp([a + c^G(x_1)]{}^{(s)}\beta_0^{(t)}) & \ll & \int_0^{a_t u} \exp([a - U^G(x_1)]{}^{(s)}\beta_v^{(t)})\, dv \\ \int_0^{a_t u} \exp([a + c^G(x_1)]{}^{(s)}\beta_v^{(t)}) \left| \frac{d^{(s)}\beta_v^{(t)}}{dv} \right| dv & \ll & \int_0^{a_t u} \exp([a - U^G(x_1)]{}^{(s)}\beta_v^{(t)})\, dv \end{array} \right.$$

on obtient

$$\lim_{t\to+\infty}^{(I\!\!P)} \left( \rho^{C_1}(x_1) \int_0^{T^{(G,t)}} \exp([a - U^{C_1}(x_1)]\beta_u^{(t)}) \mathbb{1}_{C_1}(X_s^{(t)})\, ds \right)^{-1} \int_0^{T^{(G,t)}} \exp(a\beta_u^{(t)}) \mathbb{1}_{\{x_1\}}(X_s^{(t)})\, ds = 1$$

**Corollaire 13**

> Soit $C$ un cycle inclus dans $G$ et contenant $x_0$, outre les hypothèses de la proposition précédente, supposons que (22) soit vérifié pour $a = -U^C(x_0)$ et pour tout $x_1 \in C$. On a alors
>
> $$\lim_{t\to+\infty}{}^{(I\!P)} \left(\rho^C(x_0)\int_0^{T(G,t)} \exp(-U^C(x_0)\beta_s^{(t)})\mathbf{1}_C(X_s^{(t)})\,ds\right)^{-1} G^{(t)}_{T(G,t)}(x_0) = 1$$

Ceci se démontre aisément à partir des convergences précédentes, de l'égalité (9) avec $\rho$ et $\rho^G$ remplacés par $\rho^{C_1}$ et $\rho^C$ (et $N(C)$ au lieu de $N(G)$) et du fait que pour $x \in N(C)$, $U^{C_1}(x) + U^C(x_0) = U^{C_1}(x_0)$.

Si $C$ est strictement inclus dans $C_1$ (et n'est pas réduit à $\{x_0\}$ !), ce résultat est difficile à prouver directement de la même façon que la proposition 12, car une fois entré dans $C_1$, le nombre de passage en $C$ avant de sortir de $C_1$ tend en probabilité vers l'infini avec $t$.

D'une manière similaire, on peut lier le comportement de deux points $x_0$ et $x_0'$ de $C_1$, car sous les hypothèses de la proposition 12 et si (22) est vérifié avec $(x_1, a) = (x_0, U^{C_1}(x_0))$ et avec $(x_1, a) = (x_0', U^{C_1}(x_0'))$, alors on a

$$\lim_{t\to+\infty}{}^{(I\!P)} \frac{\int_0^{T(G,t)} \exp(U^{C_1}(x_0)\beta_u^{(t)})\mathbf{1}_{\{x_0\}}(X_s^{(t)})\,ds}{\int_0^{T(G,t)} \exp(U^{C_1}(x_0')\beta_u^{(t)})\mathbf{1}_{\{x_0'\}}(X_s^{(t)})\,ds} = \frac{\rho^{C_1}(x_0)}{\rho^{C_1}(x_0')}$$

Intéressons-nous maintenant au comportement en loi de renormalisations des $G^{(t)}_{T(G,t)}(x_0)$. Comme le montre les considérations précédentes, il s'agit d'abord d'avoir un résultat dans le cas où $G$ est un cycle. Soit donc $G$ un cycle et $(b_t)_{t\geq 0}$ une famille de réels strictement positifs candidate à être une renormalisation des $G^{(t)}_{T(G,t)}(x_0)$. Pour obtenir une convergence étroite des $G^{(t)}_{T(G,t)}(x_0)/b_t$, on va se servir de celle des $T^{(G,t)}/a_t$, ce qui nous amène à supposer que les conditions (1), (2), (3) et (4) sont satisfaites, pour une certaine renormalisation $(a_t)_{t\geq 0}$ et une fonction $F$.

Faisons de plus l'hypothèse que cette renormalisation $(a_t)_{t\geq 0}$ est adaptée, que la condition (5) est remplie et qu'il existe $H : I\!R_+ \to I\!R_+$ telle qu'uniformément en $s$ dans les compacts de $I\!R_+$,

$$\lim_{t\to+\infty} b_t^{-1}\rho^G(x_0)\int_0^{a_t s} \exp(-U^G(x_0)\beta_u^{(t)})\,du = H(s) \tag{23}$$

(ainsi $H$ sera nécessairement continue sur $[0, +\infty[$). Notons que si $U^G(x_0) = 0$ (i.e. $x_0 \in N(G)$), on peut toujours prendre pour tous $t, s \geq 0$, $b_t = a_t$ et $H(s) = s$.

Le théorème 2 permet alors de montrer que

**Proposition 14**

> Sous les hypothèses précédentes, $G^{(t)}_{T(G,t)}(x_0)/b_t$ converge étroitement pour $t$ grand vers l'image par $H$ de la loi $\nu^{G,F}$.

Discutons un peu de l'hypothèse (23), pour voir quelles peuvent être les renormalisations à considérer dans les bons cas : Supposons qu'il existe une fonction $f : I\!R_+ \to I\!R_+$ pour laquelle on ait pour tout $s \geq 0$,

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^s \left|a_t \exp(-\sigma(G)\beta_{a_t u}^{(t)}) - f(u)\right| du = 0 \tag{24}$$

Ceci assure que $f$ est localement dans $\mathbb{L}^1$ pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$ et que la condition (3) est remplie avec l'application $F$ définie par

$$\forall\ s \geq 0, \qquad F(s) = \int_0^s f(u)\,du$$

mais implique également, via l'inégalité $\left|a^{1/p} - b^{1/p}\right| \leq |a-b|^{1/p}$ valable pour tous $a, b \geq 0$ et $p \geq 1$, et l'inégalité de Hölder, que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^s \left| a_t^{U^G(x_0)/\sigma(G)} \exp(-U^G(x_0)\beta^{(t)}_{a_t u}) - f(u)^{U^G(x_0)/\sigma(G)} \right| du = 0$$

ainsi (23) est vérifié si on prend pour tous $t, s \geq 0$,

$$\begin{aligned} b_t &= a_t^{(\sigma(G)-U^G(x_0))/\sigma(G)} \\ H(s) &= \rho^G(x_0) \int_0^s f(u)^{U^G(x_0)/\sigma(G)}\,du \end{aligned}$$

Revenons au cas d'un sous-graphe $G$ quelconque partitionné en cycles maximaux $G = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_{m'}$ avec $x_0 \in C_1$. Supposons que les conditions (2), (3) et (4) soient satisfaites pour une certaine renormalisation $(a_t)_{t\geq 0}$ et une fonction $F$ de classe $C^1$, strictement croissante et vérifiant $\lim_{s\to+\infty} F(s) = +\infty$, et avec $\delta(G)$ remplacé par $\widetilde{\delta}(G)$ (ou éventuellement par $\delta(C_1) \wedge \delta(G \setminus C_1)$). Par contre pour la convergence en loi que l'on espère, la condition (1) n'est évidemment plus suffisante, car la loi limite va dépendre des poids donnés par les probabilités initiales aux différents cycles $C_1, \cdots, C_{m'}$. Il faut donc la remplacer par l'existence d'une probabilité $p_0$ sur $\{1, \cdots, m'\}$ telle que

$$(25) \qquad \forall\ 1 \leq i \leq m', \qquad \lim_{t\to+\infty} m_0^{(t)}(C_i) = p_0(i)$$

(si l'on ne s'intéresse pas conjointement aux autres temps d'occupations $G^{(t)}_{T(G,t)}(x)$ pour $x \notin C_1$, voir la remarque qui suit le théorème 15 ci-dessous, on peut par exemple généraliser cette condition en supposant que $\forall\ 1 \leq i \leq m''$, $\lim_{t\to+\infty} m_0^{(t)}(\widetilde{G}_i)$ existe, où $\widetilde{G}_1 \sqcup \cdots \sqcup \widetilde{G}_{m''}$ est la partition en cellules maximales de $G \setminus C_1$, sachant que $m_0^{(t)}$ est portée par $G$).

Faisons également l'hypothèse que d'une part il existe une renormalisation $(b_t)_{t\geq 0}$ et que d'autre part pour tout $s \geq 0$, il existe une renormalisation $({}^{(s)}a_t)_{t\geq 0}$ et deux fonctions ${}^{(s)}F$, ${}^{(s)}H$ : $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telles que ${}^{(s)}F$ ne soit pas identiquement nulle et telles que uniformément pour $u, s$ dans les compacts de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} (26) \qquad & \int_0^{{}^{(s)}a_t u} \exp(-\sigma(C_1){}^{(s)}\beta_v^{(t)})\,dv &=& \ {}^{(s)}F(u) \\ (27) \qquad \lim_{t\to+\infty} b_t^{-1} & \int_0^{{}^{(s)}a_t u} \exp(-U^{C_1}(x_0){}^{(s)}\beta_v^{(t)})\,dv &=& \ {}^{(s)}H(u) \end{aligned}$$

(notamment ${}^{(s)}F$ et ${}^{(s)}H$ sont continues).

Ceci nous amène à introduire pour $s \geq 0$ la probabilité ${}^{(s)}\nu$ telle que pour tout $u \geq 0$ qui est un point de continuité de ${}^{(s)}F$, ${}^{(s)}\nu(]u, +\infty]) = \exp(-R(C_1){}^{(s)}F(u))$, puis la mesure ${}^{(s)}\mu$ image de ${}^{(s)}\nu$ par ${}^{(s)}H$.

Dans le cas où $\sigma(C_1) = \sigma(G)$, on montre facilement à $s \geq 0$ fixé, à partir des hypothèses sur $F$ et ${}^{(s)}F$ et en considérant les valeurs d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ de ${}^{(s)}a_t/a_t$ pour $t$ grand, qu'il existe $\lambda(s) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{{}^{(s)}a_t}{a_t} = \lambda(s)$$

puis que

$$\begin{array}{rcl} {}^{(s)}F(u) & = & F(\lambda(s)u+s)-F(s) \\ {}^{(s)}H(u) & = & {}^{(0)}H(\lambda(s)u+s)-{}^{(0)}H(s) \end{array}$$

Ainsi sans vraiment restreindre la généralité, on supposera que dans cette situation ${}^{(s)}a_t = a_t$, ce qui implique pour tous $s, u \geq 0$,

$$\begin{array}{rcl} {}^{(s)}F(u) & = & F(u+s)-F(s) \\ {}^{(s)}H(u) & = & {}^{(0)}H(u+s)-{}^{(0)}H(s) \end{array}$$

D'une manière similaire, si $\sigma(C_1) < \sigma(G)$, on montre que pour $s \geq 0$ fixé, $\lim_{t\to+\infty} {}^{(s)}a_t/a_t = 0$, c'est-à-dire que l'on peut notamment supposer que pour tous $t, s \geq 0$, ${}^{(s)}a_t \leq a_t$.

Ces considérations permettent de voir à partir de (2) et (4) pour les évolutions $\beta^{(t)}$, que ces mêmes conditions sont vérifiées par les évolutions ${}^{(s)}\beta^{(t)}$ et les renormalisations ${}^{(s)}a_t$, avec $\delta(G)$ remplacé par $\delta(C_1)$, uniformément pour $s$ dans des compacts de $\mathbb{R}_+$.

Pour pouvoir appliquer la proposition 14, reste encore à supposer qu'uniformément pour $s$ dans des compacts de $\mathbb{R}_+$, l'hypothèse (5) soit remplie par les évolutions ${}^{(s)}\beta^{(t)}$ (avec $G$ remplacé par $C_1$ et $a_t$ par ${}^{(s)}a_t$) et que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lim_{u\to 0_+} {}^{(s)}F(u) & = & 0 \\ \lim_{u\to+\infty} {}^{(s)}F(u) & = & +\infty \end{array} \right. \tag{28}$$

(notons que cette dernière condition est automatiquement satisfaite si $\sigma(C_1) = \sigma(G)$).

Pour la description du résultat, reprenons les familles de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies avant le théorème 10 (mais à partir de la partition en cycles maximaux et $\sigma = \sigma(G)$), en supposant que la loi initiale de la chaîne de Markov $Z$ est $p_0$, et introduisons une nouvelle suite de variables aléatoires $(\widetilde{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante ; Dans tous les cas $\widetilde{T}_0 = 0$, mais :

- Si $\sigma(C_1) = \sigma(G)$, on pose pour tout $n \geq 1$,

$$\widetilde{T}_n = \left\{ \begin{array}{ll} {}^{(T_1+\cdots+T_{n-1})}H(T_n) & \text{, si } Z_{n-1} = 1 \\ 0 & \text{, sinon} \end{array} \right.$$

- Si $\sigma(C_1) < \sigma(G)$, on considère une famille de variables aléatoires $(\widetilde{T}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes entre elles, telle que la loi conditionnelle de $\widetilde{T}_n$ sachant $Z$, $T_1, \cdots, T_{n-1}$ soit donnée par

$$\left\{ \begin{array}{ll} {}^{(T_1+\cdots+T_{n-1})}\mu & \text{, si } Z_{n-1} = 1 \\ \delta_0 & \text{, sinon} \end{array} \right.$$

Ceci suffit à déterminer la loi du processus $(Z, T, \widetilde{T})$, car sachant $Z$, $T_1, \cdots, T_{n-1}$, l'une des lois conditionnelles de $T_n$ ou de $\widetilde{T}_n$ est une masse de Dirac en 0, ce qui permet de calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle du triplet $(Z_n, T_n, \widetilde{T}_n)$ connaissant $((Z_p, T_p, \widetilde{T}_p))_{0\leq p\leq n-1}$ (les variables aléatoires $Z_n$ ,$T_n$ et $\widetilde{T}_n$ étant d'ailleurs conditionnellement indépendantes sachant ceci).

En s'inspirant des arguments des théorèmes 2 et 10 et des propositions 12 et 14, on montre le

**Théorème 15**

Sous les hypothèses précédentes, on a convergence étroite pour $t$ grand (sur $\overline{\mathbb{R}_+} \times \overline{\mathbb{R}_+} \times (\widetilde{\mathrm{S}}_{\mathrm{e}} \sqcup \{y_0\})$) de la loi de $(T^{(G,t)}/a_t, G^{(t)}_{T^{(G,t)}}(x_0)/b_t, Y^{(G,t)})$ vers celle de $(T_1 + \cdots + T_N, \widetilde{T}_1 + \cdots + \widetilde{T}_N, Z_N)$.

En fait il est clair que l'on pourrait donner des conditions qui assurent pour de bons choix de renormalisations $(b_t(x))_{t\geq 0}$, pour tout $x \in G$, une convergence étroite pour $t$ grand, de la famille $(T^{(G,t)}/a_t, (G^{(t)}_{T^{(G,t)}}(x)/b_t(x))_{x\in G}, Y^{(G,t)})$ (si $x$ et $y$ appartiennent à un même cycle maximal, il apparaîtra notamment que $G^{(t)}_{T^{(G,t)}}(x)/b_t(x)$ et $G^{(t)}_{T^{(G,t)}}(y)/b_t(y)$ sont asymptotiquement fortement corrélés), et plus généralement encore, on pourrait obtenir conjointement des résultats limites pour le processus des différentes positions de sortie des cycles maximaux avant le temps $T^{(G,t)}$, ainsi que pour les temps de sortie respectifs convenablement renormalisés (les renormalisations dépendant alors du cycle par l'intermédiaire de sa hauteur de sortie et du temps d'entrée renormalisé par $a_t$, comme $({}^{(s)}a_t)_{t,s\geq 0}$ correspondait au cycle $C_1$). Néanmoins on s'est restreint à l'énoncé du théorème 15, car il permet de ne pas trop surcharger des notations déjà lourdes tout en fournissant une bonne compréhension du comportement du processus avant sortie (si elle intervient effectivement), d'autant plus qu'il nous donne exactement les informations dont nous aurons besoin pour l'application de la section suivante.

Ainsi notamment la loi limite des $G^{(t)}_{T^{(G,t)}}(x_0)/b_t$ est celle de $\widetilde{T}_1+\cdots+\widetilde{T}_N$, cependant en général, celle-ci n'est pas facile à évaluer, car $(\widetilde{T}_0+\cdots+\widetilde{T}_n, Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas un processus de Markov. Pour qu'il le soit, il faudrait que ${}^{(s)}\mu$ ne dépende pas de $s$, mais si c'est le cas, notons $g(1)$ le nombre de passage(s) par 1 de la chaîne de Markov $Z$ et soit $(\widehat{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, indépendante de $Z$ et de loi ${}^{(0)}\mu$, alors la loi limite de $G^{(t)}_{T^{(G,t)}}(x_0)/b_t$ est celle de $\sum_{i=1}^{g(1)}\widehat{T}_n$ (par convention ceci est nul si $g(1)=0$).

Donnons des exemples où l'on est dans cette situation, tout d'abord dans le cas où $\sigma(C_1)=\sigma(G)$ : Comme après la proposition 14, supposons que (24) est vérifié, les hypothèses faites sur $F$ assurent alors que $f$ est continue (du moins qu'il en existe une version continue, c'est celle-ci que l'on considèrera désormais), que l'ensemble $A=\{s\geq 0\,/\,f(s)>0\}$ est un ouvert dense et que $\int_0^{+\infty}f(u)\,du=+\infty$. On prend ${}^{(s)}a_t=a_t$, $b_t=a_t^{1-\alpha(x_0)}$, où $\alpha(x_0)=U^{C_1}(x_0)/\sigma(G)\in[0,1[$, et notons pour $u\geq 0$, $H(u)={}^{(0)}H(u)=\rho^{C_1}(x_0)\int_0^u f^{\alpha(x_0)}(v)\,dv$. Vu les propriétés de $f$, l'application $H$ est une bijection bicontinue de $\mathbb{R}_+$ sur $[0,H_\infty[$, avec $H_\infty=\rho^{C_1}(x_0)\int_0^{+\infty}f^{\alpha(x_0)}(v)\,dv\in\overline{\mathbb{R}_+}\setminus\{0\}$, notons $H^{-1}$ son inverse. Il en découle aussi que le support de ${}^{(s)}\mu$ est exactement $[0,H_\infty-H(s)]$, ainsi si l'on veut que ${}^{(s)}\mu$ ne dépende pas de $s\geq 0$, il faut commencer par supposer que $H_\infty=+\infty$, ce que nous ferons désormais.

On calcule alors immédiatement que pour tous $u,s\geq 0$,

$$-R^{-1}(C_1)\ln({}^{(s)}\mu(]u,+\infty[))=\int_0^{H^{-1}(H(s)+u)-s}f(v+s)\,dv=\int_s^{H^{-1}(H(s)+u)}f(v)\,dv$$

Cependant cette expression est dérivable en $s$ sur $A$, et sa dérivée vaut

$$\begin{aligned}(H^{-1})'(H(s)+u)H'(s)f(H^{-1}(H(s)+u))-f(s) &= f(v)H'(s)/H'(v)-f(s)\\ &= f^{\alpha(x_0)}(s)(f^{1-\alpha(x_0)}(v)-f^{1-\alpha(x_0)}(s))\end{aligned}$$

où on a posé $v=H^{-1}(H(s)+u)\geq s$, ainsi supposer que ${}^{(s)}\mu$ ne dépend pas de $s$ revient à dire que $f$ est constante. Réciproquement, s'il existe un réel $f>0$ tel que (24) soit satisfait avec une fonction identiquement égale à $f$, alors pour tout $s\geq 0$, ${}^{(s)}\mu$ est la loi exponentielle de paramètre $R(C_1)f^{1-\alpha(x_0)}/\rho^{C_1}(x_0)$, et on peut vérifier qu'il existe deux réels $0<p_1\leq 1$ et $p_2>0$ (cf. la remarque qui suit le corollaire 15 de [10] pour leur description), tels que la loi limite des $G^{(t)}_{T^{(G,t)}}(x_0)/b_t$ soit de la forme $p_1\mathcal{E}(p_2)+(1-p_1)\delta_0$, où $\mathcal{E}(p_2)$ est la loi exponentielle de paramètre $p_2$ (le cas $p_1=1$ où on n'obtient qu'une loi $\mathcal{E}(p_2)$, et qui n'apparaissait pas dans [10], correspond aux situations pour lesquelles à partir de tous les points chargés par $p_0$, on doit nécessairement passer par $x_0$ pour sortir de $G$, ainsi par exemple ceci est satisfait si $p_0=\delta_{x_0}$).

Considérons ensuite le cas où $\sigma(C_1) < \sigma(G)$ et supposons que la convergence dans (24) soit forte : il existe une fonction $f : I\!\!R_+ \to I\!\!R_+$ telle qu'uniformément pour $s$ dans les compacts de $I\!\!R_+$,

$$\lim_{t\to+\infty} a_t \exp(-\sigma(G)\beta^{(t)}_{a_t s}) = f(s)$$

Comme ci-dessus, $f$ est continue, $A = \{s \geq 0 \,/\, f(s) > 0\}$ est un ouvert dense dans $I\!\!R_+$ et $\int_0^{+\infty} f(u)\,du = +\infty$.

Mais dans cette situation on a aussi des renormalisations $({}^{(s)}a_t)_{t,s\geq 0}$ naturelles : Il suffit de prendre pour tous $t, s \geq 0$, ${}^{(s)}a_t = a_t^{\sigma(C_1)/\sigma(G)}$, car la convergence précédente permet de voir qu'uniformément en $v, s$ dans des compacts de $I\!\!R_+$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to+\infty}\left|a_t^{\sigma(C_1)/\sigma(G)}\exp(-\sigma(C_1)\beta_{a_t s + a_t^{\sigma(C_1)/\sigma(G)}v}) - f^{\sigma(C_1)/\sigma(G)}(s)\right| \\
\leq\; &\lim_{t\to+\infty}\left|a_t^{\sigma(C_1)/\sigma(G)}\exp(-\sigma(C_1)\beta_{a_t s + a_t^{\sigma(C_1)/\sigma(G)}v}) - f^{\sigma(C_1)/\sigma(G)}(s + a_t^{\sigma(C_1)/\sigma(G)-1}v)\right| \\
&+\lim_{t\to+\infty}\left|f^{\sigma(C_1)/\sigma(G)}(s) - f^{\sigma(C_1)/\sigma(G)}(s + a_t^{\sigma(C_1)/\sigma(G)-1}v)\right| \\
=\; & 0
\end{aligned}$$

ce qui montre que (26) est satisfait avec

$$\forall\ u, s \geq 0, \qquad {}^{(s)}F(u) = f^{\sigma(C_1)/\sigma(G)}(s)u$$

et que cette convergence est forte (au sens où l'on a convergence uniforme sur les compacts de $I\!\!R_+$ des dérivées).

Notamment pour tout $s \geq 0$, ${}^{(s)}F$ ne sera pas identiquement nul, si et seulement si $A = \emptyset$, ce que l'on suppose désormais, assurant ainsi aussi la validité de la condition (28), et on peut prendre

$$\begin{aligned}
b_t &= {}^{(s)}a_t^{(\sigma(C_1)-U^{C_1}(x_0))/\sigma(C_1)} = a_t^{(\sigma(C_1)-U^{C_1}(x_0))/\sigma(G)} \\
{}^{(s)}H(u) &= \rho^{C_1}(x_0) f(s)^{U^{C_1}(x_0)/\sigma(G)} u
\end{aligned}$$

pour obtenir (27) avec une convergence forte.

On calcule que pour tous $s, u \geq 0$,

$${}^{(s)}\mu(]u, +\infty[) = \exp(-R(C_1) f^{(\sigma(C_1)-U^{C_1}(x_0))/\sigma(G)}(s)u/\rho^{C_1}(x_0))$$

ainsi ceci ne dépendra pas de $s \geq 0$, si et seulement si, comme précédemment, $f$ est constante. On aboutit alors également à la même conclusion en ce qui concerne la forme des lois limites des $G^{(t)}_{T(G,t)}(x_0)$.

# 6 Théorèmes limites pour les temps d'occupations d'algorithmes de recuit simulé généralisés

Nous allons appliquer les résultats précédents pour obtenir le comportement asymptotique du processus renormalisé des temps d'occupations en les points qui sont récurrents mais qui ne satisfont pas la loi forte des grands nombres, pour certains processus de recuit simulé généralisés ergodiques en loi. Il s'agit là d'une extension de résultats déjà présentés dans [9] et [10] pour les algorithmes de recuit classiques, cependant la preuve que nous allons donner ici est légèrement plus simple (nous n'utiliserons pas immédiatement les techniques et résultats très généraux de

[8], mais nous ferons plutôt des calculs directs mieux adaptés à notre situation), ce qui va nous permettre de traiter le cas critique qui n'avait pas été abordé dans les articles précédents. Soit $m_0$ une loi initiale sur $M$ et $\beta : I\!R_+ \to I\!R_+$ une évolution de l'inverse de la température de classe $C^1$, auxquelles on associe un processus de Markov $X$ comme dans l'introduction. Soit $x_0 \in M$, on s'intéresse donc au comportement pour $T$ grand de

$$\int_0^T \mathbb{1}_{\{x_0\}}(X_s)\, ds$$

Soit $c(M) = \max_{x\in M} c^M(x)$, sans vouloir chercher ici des hypothèses minimales, on suppose que $\beta$ finit par être croissante et qu'il existe deux réels $k > c(M)$ et $\alpha > 0$ tels que pour $s$ grand,

$$\exp(\beta_s) \sim \alpha s^{k^{-1}} \tag{29}$$

(notamment le cas trivial $c(M) = +\infty$ qui correspond au singleton $M = \{x_0\}$ est exclus).

Comme dans [9] et [10], soit $\widetilde{M}$ (resp. $\widehat{M}$) le cycle minimal contenant $N(M) = \{x \,/\, U(x) = 0\}$ dont la hauteur de sortie $\sigma(\widetilde{M})$ (resp. $\sigma(\widehat{M})$) soit supérieure ou égale (resp. strictement supérieure) à $k$. En fait, on a

$$\begin{aligned} \widetilde{M} &= \{x \in M \,/\, \forall\, y \in N(M),\ H(x,y) < k\} \\ \widehat{M} &= \{x \in M \,/\, \forall\, y \in N(M),\ H(x,y) \le k\} \end{aligned}$$

Il est commode de poser encore

$$\widehat{M} = \widetilde{M} \sqcup \{x \in \widehat{M} \,/\, U(x) = k\}$$

Alors en reprenant les preuves données dans les sections 2 et 3 de [9] (via les estimées de la section 3 de [11]), il apparaît que

**Proposition 16**

L'ensemble des points récurrents pour $X$ est $\widehat{M}$ et pour tout $x_0 \in \widehat{M}$, on a p.s.

$$\lim_{T\to+\infty} \left(\int_0^T \mu_{\beta_s}(x_0)\, ds\right)^{-1} \int_0^T \mathbb{1}_{\{x_0\}}(X_s)\, ds = 1$$

Le premier point de cette proposition est encore satisfait dans le cas critique où $k = c(M)$ (notons qu'alors $\widetilde{M}$ n'est plus nécessairement défini, mais que $\widehat{M}$ garde un sens), si $c(M) > 0$ (cependant si $c(M) = 0$, trivialement ceci reste satisfait car alors $\widehat{M} = N(M)$ et d'après (29) il faudrait que pour $s$ assez grand, $\beta_s = +\infty$) et pour le voir présentons une preuve alternative :

On considèrera toujours dans cette section la famille d'évolutions $(\beta^{(t)})_{t\ge 0}$ qui se déduit de $\beta$ par translations : Pour tous $t, s \ge 0$, $\beta^{(t)}_s = \beta_{t+s}$. Soit $(m_0^{(t)})_{t\ge 0}$ une famille de probabilités portées par $\widehat{M}^c$, on montre (par exemple à partir de la proposition 11), du fait que la hauteur de sortie maximum d'un cycle inclus dans $\widehat{M}^c$ est inférieur ou égale à $c(M) \le k$, que

$$\lim_{t\to+\infty} I\!P[T^{(\widehat{M}^c,t)} = +\infty] = 0$$

($\widehat{M}^c$ n'est pas nécessairement un sous-graphe, néanmoins on aura remarqué que cette condition est inutile pour les sections 4 et 5), ce qui implique en fait que pour tout $t \ge 0$, $I\!P[T^{(\widehat{M}^c,t)} = +\infty] = 0$.

Par contre, si les $m_0^{(t)}$ sont toutes portées par $\widehat{M}$, on obtient (voir les remarques e) ou j) de la section 5 de [11])

$$\lim_{t\to+\infty} I\!P[T^{(\widehat{M},t)} = +\infty] = 1$$

et de ces deux résultats on déduit facilement que p.s.

$$\lim_{s\to+\infty} \mathbf{I}_{\widehat{M}^c}(X_s) = 0$$

D'autre part soit $x \in \widehat{M}$, on montre encore de la même manière, que pour toute famille $(m_0^{(t)})_{t\geq 0}$ de probabilités initiales,

$$\lim_{t\to+\infty} I\!P[T^{(M\setminus\{x\},t)} = +\infty] = 0$$

c'est-à-dire en fait que pour tout $t \geq 0$, $I\!P[T^{(M\setminus\{x\},t)} = +\infty] = 0$ (mais ceci pouvait aussi se voir directement à partir de ce qui précède la proposition 11 et de la proposition 5 de [11]), et on en déduit que

$$\forall\ x \in \widehat{M}, \qquad \limsup_{s\to+\infty} \mathbf{I}_{\{x\}}(X_s) = 1$$

d'où l'assertion que l'ensemble des points récurrents pour $X$ est $\widehat{M}$.

Revenons au cas où $k > c(M)$, le comportement des temps d'occupations en les points $x_0 \in \widehat{M} \setminus \widehat{M}$ est un peu plus compliqué, et pour le comprendre, il faut introduire la famille (indexée par $T > 0$) de processus définie par

$$\forall\ s \geq 0, \qquad I_s(T, x_0) = \frac{1}{\int_0^T \mu_{\beta_u}(x_0)\, du} \int_0^{Ts} \mathbf{I}_{\{x_0\}}(X_u)\, du$$

Pour décrire leur comportement limite, soient $R(\widetilde{M})$ et $r^{\widetilde{M}}$ respectivement la constante et la probabilité associées comme dans l'introduction au cycle $\widetilde{M}$.

Outre la famille $(\beta^{(t)})_{t\geq 0}$ obtenue par translations de $\beta$, considérons la famille de probabilités initiales telle que pour tout $t \geq 0$, $m_0^{(t)} = r^{\widetilde{M}}$. Toutes les hypothèses de théorème 15 sont satisfaites avec $G = \widetilde{M}^c$ (mis à part éventuellement que celui-ci est un sous-graphe). Notons $\nu$ la loi limite de $G^{(t)}_{T^{(\widetilde{M}^c,t)}}(x_0)/t^{(k-U(x_0))/k}$, qui d'après la remarque (pour faire le lien avec celle-ci, on aura remarqué que $\sigma(C_1) - U^{C_1}(x_0) = k - U(x_0)$, où $C_1$ est le cycle maximal inclus dans $\widetilde{M}^c$ contenant $x_0$) qui suit l'énoncé de ce théorème, est une combinaison convexe de la masse de Dirac en 0 et d'une loi exponentielle (cependant ici, puisque contrairement à la section précédente $\widetilde{M}_0$ n'est pas nécessairement un sous-graphe, on peut aussi obtenir seulement une masse de Dirac, ce qui correspond aux cas où sous la probabilité initiale $r^{\widetilde{M}_i}$, on ne peut pas aller en $x_0$ avant de sortir de $\widetilde{M}_0$).

Enfin, soit $I(x_0) = (I_s(x_0))_{s\geq 0}$ le processus à accroissements indépendants de sauts, dont le processus ponctuel de Poisson des instants de sauts sur $I\!R_+$ est d'intensité $\alpha^{-k}R(\widetilde{M})s^{-1}ds$ et dont la distribution de la hauteur des sauts au temps $s > 0$ est l'image par l'homothétie de rapport $\frac{(k-U(x_0))\alpha^{U(x_0)}}{k\rho(x_0)} s^{(k-U(x_0))/k}$ de $\nu$. Alors,

**Proposition 17**

Pour $T$ grand, on a convergence des marginales finies de $I(T, x_0)$ vers celles de $I(x_0)$.

Si pour la démonstration de cette proposition l'on veut retranscrire directement la preuve donnée dans [11], on se rend rapidement compte qu'il faudrait préciser dans (29) la vitesse de convergence, et imposer par exemple que $\exp(\beta_s) = \alpha s^{k^{-1}}(1+\mathcal{O}(s^{-\delta}))$ pour un $\delta > 0$. Mais ceci provient du fait que cette démonstration est maladroite, bien qu'elle contienne tous les ingrédients pour pouvoir prouver la proposition 17. Pour illustrer ceci, nous allons plutôt traiter le cas plus difficile où $k = c(M)$, situation pour laquelle le processus limite (en loi) n'est plus nécessairement à accroissements indépendants. Sa loi n'est pas facile à décrire a priori, il vaut mieux la laisser apparaître naturellement au cours de la preuve ci-dessous.

Tout d'abord, remarquons que l'on peut se restreindre au cas où $M = \widehat{M}$. En effet, puisque $\widehat{M}$ est l'ensemble des points récurrents, pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver un $t_0 \geq 0$ assez grand tel qu'il existe un couplage entre le processus $(X_{t_0+t})_{t\geq 0}$ et l'algorithme $(\widetilde{X}_t)$ sur $(\widehat{M}, q^{\widehat{M}}, U^{\widehat{M}})$ admettant pour évolution de l'inverse de la température $\beta^{(t_0)}$ et pour loi initiale la renormalisation de la restriction à $\widehat{M}$ de la loi de $X_{t_0}$, satisfaisant

$$\mathbb{P}[\exists\ t \geq 0 \,/\, X_{t_0+t} \neq \widetilde{X}_t] \leq \epsilon$$

Il suffit ensuite d'utiliser le fait que pour tous $t_0 \geq 0$ et $x_0 \in \widehat{M}$ fixés,

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{\int_{t_0}^T \mu_{\beta_u}^{\widehat{M}}(x_0)\, du}{\int_0^T \mu_{\beta_u}(x_0)\, du} = 1$$

(cf. le corollaire 4 et l'égalité (9) appliqués avec le cycle $\widehat{M}$), et d'appliquer les résultats supposés connus pour $\widetilde{X}$ (on aura noté que $\beta^{(t_0)}$ satisfait les mêmes hypothèses que $\beta$) pour obtenir les conclusions escomptées.

Cependant notons qu'il se peut que $c(\widehat{M}) < c(M)$, ceci correspondant au cas où

$$\max_{x,y\in N(M)} H(x,y) < c(M)$$

et dans cette situation on est ramené aux propositions 16 et 17 appliquées sur $(\widehat{M}, q^{\widehat{M}}, U^{\widehat{M}})$, car alors $k > c(\widehat{M})$.

Les cas "intéressants" sont donc ceux pour lesquels il existe dans $\widehat{M}$ plusieurs cycles de hauteur de sortie égale à $k$ (chacun contenant au moins un élément de $N(M)$), notons les $\widetilde{M}_1, \cdots, \widetilde{M}_m$. On suppose donc désormais que $M = \widehat{M}$ et que $m > 1$.

Considérons les $x_0 \in M$ tels que $U(x_0) = k$. Pour eux il suffit de reprendre la preuve de la section 3 de [11] pour montrer facilement que p.s.,

$$\lim_{T\to+\infty} \left(\int_0^T \mu_{\beta_s}(x_0)\, ds\right)^{-1} \int_0^T \mathbf{1}_{\{x_0\}}(X_s)\, ds = 1$$

Comme on va le voir, ces points (mais dans notre cadre de recuit généralisé, $m > 1$ ne suffit plus à assurer qu'il en existe) sont les seuls à satisfaire ici une loi forte des grands nombres. Remarquons que si l'on considère tout le processus renormalisé des temps d'occupations $I(T, x_0)$, celui-ci converge (au sens de la convergence simple des fonctions) p.s. vers l'indicatrice $\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}$.

Nous allons dans un premier temps étudier les temps d'occupations renormalisés en les points de $\widetilde{M}_1 \sqcup \cdots \sqcup \widetilde{M}_m$, mais avant ceci intéressons-nous au comportement du temps d'occupation en l'un des $\widetilde{M}_i$, $1 \leq i \leq m$. Pour cela, il est commode d'introduire $\widetilde{M}_0 = M \setminus (\widetilde{M}_1 \sqcup \cdots \sqcup \widetilde{M}_m)$ et de noter $\Pi$ l'application

$$\begin{array}{rcl} M & \rightarrow & \{0, 1, \cdots, m\} \\ x & \mapsto & i, \text{ si } x \in \widetilde{M}_i \end{array}$$

Soit $s > 0$ fixé, on pose pour $u \geq 0$,

$$\begin{aligned} Y_u^{(T,s)} &= \Pi(X_{T(s+u)}) \\ \widetilde{T}_0^{(T,s)} &= 0 \\ T_0^{(T,s)} &= \inf\{u \geq 0 \,/\, Y_u^{(T,s)} \neq 0\} \end{aligned}$$

puis par récurrence, pour tout $n \in I\!N$,

$$\begin{aligned} Z_n^{(T,s)} &= Y_{T_n^{(T,s)}}^{(T,s)} \\ \widetilde{T}_{n+1}^{(T,s)} &= \inf\{u \geq T_n^{(T,s)} \,/\, Y_u^{(T,s)} \neq Z_n^{(T,s)}\} \\ T_{n+1}^{(T,s)} &= \inf\{u \geq \widetilde{T}_{n+1}^{(T,s)} \,/\, Y_u^{(T,s)} \neq 0\} \end{aligned}$$

Soit $n \in I\!N$ fixé, pour rendre compte du comportement en loi pour $T$ grand de $((\widetilde{T}_p^{(T,s)}, T_p^{(T,s)}, Z_p^{(T,s)}))_{0\leq p\leq n}$, considérons une nouvelle chaîne de Markov homogène $\widetilde{Z} = (\widetilde{Z}_p)_{p\in I\!N}$ sur $M^* = \{\widetilde{M}_1, \cdots, \widetilde{M}_{m+m'}\}$, où $\widetilde{M}_{m+1}, \cdots, \widetilde{M}_{m+m'}$ sont les cycles maximaux inclus dans $\widetilde{M}_0$, telle que la probabilité de transition de $\widetilde{M}_i$ à $\widetilde{M}_j$ pour $1 \leq i, j \leq m+m'$, soit $r^{\widetilde{M}_i}(\widetilde{M}_j)$, $r^{\widetilde{M}_i}$ représentant comme d'habitude la probabilité de sortie associée au cycle $\widetilde{M}_i$.

Soit les temps d'arrêt

$$\begin{aligned} S &= \inf\{p \in I\!N \,/\, \widetilde{Z}_p \in \{\widetilde{M}_1, \cdots, \widetilde{M}_m\}\} \\ S^* &= \inf\{p \in I\!N^* \,/\, \widetilde{Z}_p \in \{\widetilde{M}_1, \cdots, \widetilde{M}_m\}\} \end{aligned}$$

Si $\widetilde{l}$ est une probabilité sur $M^*$, on note $l$ la loi sur $\{1, \cdots, m\}$ donnée par

$$\forall\, 1 \leq i \leq m, \qquad l(i) = I\!P_{\widetilde{l}}[\widetilde{Z}_S = \widetilde{M}_i]$$

où le $\widetilde{l}$ en indice indique que l'on part avec cette probabilité pour loi initiale de $\widetilde{Z}$. De même, pour $1 \leq i, j \leq m$, notons

$$r(i,j) = I\!P_{\delta_i}[\widetilde{Z}_{S^*} = \widetilde{M}_j]$$

Par ailleurs, soit $m_{Ts}$ la loi de $X_{Ts}$, par regroupement celle-ci fournit naturellement une loi $\widetilde{l}^{(T,s)}$ sur $M^*$ qui elle même se transforme par la procédure précédente en une loi $l^{(T,s)}$ sur $\{1, \cdots, m\}$, on désignera par $\widehat{Z}^{(T,s)}$ la chaîne de Markov sur $\{1, \cdots, m\}$ admettant $(r(i,j))_{1\leq i,j\leq m}$ pour matrice de transition et de loi initiale $l^{(T,s)}$.

Ensuite introduisons une suite $(\widehat{T}_p^{(T,s)})_{p\in I\!N}$ de variables aléatoires telle que $\widehat{T}_0^{(T,s)} = 0$ et telle que pour tout $p \in I\!N$, $\widehat{T}_{p+1}^{(T,s)}$ et $\widehat{Z}_{p+1}^{(T,s)}$ soient conditionnellement indépendants sachant $((\widehat{Z}_{p'}^{(T,s)}, \widehat{T}_{p'}^{(T,s)}))_{0\leq p'\leq p}$ et que la loi conditionnelle de $\widehat{T}_{p+1}^{(T,s)}$ sachant $((\widehat{Z}_{p'}^{(T,s)}, \widehat{T}_{p'}^{(T,s)}))_{0\leq p'\leq p}$ admette pour densité

$$\frac{\alpha^{-k} R(\widetilde{M}_i)}{s+u} \left(\frac{s+u}{s+t}\right)^{\alpha^{-k}R(\widetilde{M}_i)+1}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda(dt)$ sur $[u, +\infty[$, avec $(i,u) = (\widehat{Z}_p^{(T,s)}, \widehat{T}_p^{(T,s)})$ (rappelons que $R(\widetilde{M}_i)$ est la constante associée au cycle $\widetilde{M}_i$ comme dans l'introduction).

Alors en reprenant les résultats de la section 4 pour évaluer les positions et temps de sortie renormalisés (ici par $T$) de $\widetilde{M}_0$, on voit facilement par $2n+1$ conditionnements successifs, que pour toute fonction $f$ continue à support compact sur $(\{1, \cdots, m\} \times I\!R_+ \times I\!R_+)^{n+1}$, on a

$$\text{(30)} \qquad \lim_{T\to+\infty} I\!E[f((Z_p^{(T,s)}, \widetilde{T}_p^{(T,s)}, T_p^{(T,s)})_{0\leq p\leq n})] - I\!E[f((\widehat{Z}_p^{(T,s)}, \widehat{T}_p^{(T,s)}, \widehat{T}_p^{(T,s)})_{0\leq p\leq n})] = 0$$

Mais on a mieux : Soit $s' > 0$ fixé, et si $(t_p)_{p\geq 0}$ est une suite croissante de $\mathbb{R}_+$, notons

$$N_{s'}((t_p)_{p\geq 0}) = \inf\{p \geq 0 \,/\, t_p > s'\}$$

Par le biais de la proposition 11, il apparaît qu'il existe une constante $\eta > 0$ suffisamment petite telle que si l'on a une majoration du type

$$\forall\ (z_p, \widetilde{t}_p, t_p)_{0\leq p\leq n} \in (\{1,\cdots,m\}\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+)^{n+1}, \qquad \left|f((z_p, \widetilde{t}_p, t_p)_{0\leq p\leq n})\right| \leq K(1+t_{n\wedge N_{s'}((t_p)_{0\leq p\leq n})})^\eta$$

pour une certaine constante $K \geq 0$ (notamment si $f$ est bornée), alors la convergence (30) est encore vérifiée, pour peu, comme d'habitude, que l'ensemble de discontinuité de $f$ soit négligeable pour toutes les lois des $(\widehat{Z}_p^{(T,s)}, \widetilde{T}_p^{(T,s)}, \widehat{T}_p^{(T,s)})_{0\leq p\leq n}$ (on se sera servi ici du fait que celles-ci ne dépendent de $T$ que par l'intermédiaire de la loi de $\widehat{Z}_0^{(T,s)}$ et d'un argument de compacité).

Notre but est d'étendre cette convergence à des fonctions bornées $f : (\{1,\cdots,m\}\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions telle que l'on puisse écrire

$$\forall\ ((z_p, \widetilde{t}_p, t_p))_{p\geq 0} \in (\{1,\cdots,m\}\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}},$$

$$f((z_p, \widetilde{t}_p, t_p)_{p\geq 0}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{N_{s'}((t_p)_{p\geq 0})=n} f_n(((z_p, \widetilde{t}_p, t_p))_{0\leq p\leq n})$$

et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : (\{1,\cdots,m\}\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+)^{n+1} \to \mathbb{R}$ ait un ensemble de discontinuité négligeable pour chacune des lois des $((\widehat{Z}_p^{(T,s)}, \widetilde{T}_p^{(T,s)}, \widehat{T}_p^{(T,s)}))_{0\leq p\leq n}$.

Pour ceci, il suffit de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}(\limsup_{T\to+\infty} \mathbb{P}[N^{(T,s,s')} \geq n]) = 0 \tag{31}$$

et que

$$\lim_{n\to+\infty}(\limsup_{T\to+\infty} \mathbb{P}[\widehat{N}^{(T,s,s')} \geq n]) = 0 \tag{32}$$

où on a posé

$$\begin{aligned} N^{(T,s,s')} &= N_{s'}((T_p^{(T,s)})_{p\geq 0}) \\ \widehat{N}^{(T,s,s')} &= N_{s'}((\widehat{T}_p^{(T,s)})_{p\geq 0}) \end{aligned}$$

Ce dernier point est le plus simple : Toujours du fait que $\widehat{Z}^{(T,s)}$ ne dépend de $T$ que par sa probabilité initiale, il est clair que (32) est impliqué par

$$\forall\ T > 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}[\widehat{N}^{(T,s,s')} \geq n] = 0$$

ce qui est relativement immédiat (en effet, il existe $\eta_1 > 0$ et $\eta_2 > 0$ tels que pour tout $p \geq 0$ et tout $T > 0$, $\mathbb{P}[\widehat{T}_{p+1}^{(T,s)} \geq \widehat{T}_p^{(T,s)} + \eta_1 | ((\widehat{Z}_{p'}^{(T,s)}, \widehat{T}_{p'}^{(T,s)}))_{0\leq p'\leq p}] \geq \eta_2$ (prendre $\eta_2 = \min_{1\leq i\leq m}(s/s+\eta_1)^{\alpha^{-k}R(\widetilde{M}_i)}$), ainsi par exemple en considérant un couplage avec une suite $(B_p)_{p\geq 0}$ de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{0,\eta_1\}$ telles que $\mathbb{P}[B_p = \eta_1] = \eta_2$, on obtient par comparaison avec $(\sum_{p'=0}^p B_p)_{p\geq 0}$ le résultat annoncé, mais on pourrait aussi utiliser la représentation donnée un peu plus loin de $((\widehat{Z}_p^{(T,s)}, \widehat{T}_p^{(T,s)}))_{p\in\mathbb{N}}$ comme étant presque les positions et temps de sauts d'un certain processus de Markov, et reprendre la preuve ci-dessous de (31)).

Pour la preuve de (31), on va adapter un calcul de [10] : Pour $1 \leq i \leq m$, soit $\phi_i$ l'indicatrice de $\widetilde{M}_i$. On a pour tous $s, s' > 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{0<u\leq Ts'} \phi_i(X_{Ts+u}) - \phi_i(X_{(Ts+u)-}) &= \phi_i(X_{T(s+s')}) - \phi_i(X_{Ts}) \\ &= \int_{Ts}^{T(s+s')} L_{\beta_u}\phi_i(X_u)\,du + M_{T(s+s')}^{\phi_i} - M_{Ts}^{\phi_i} \end{aligned}$$

où $(M_u^{\phi_i})_{u\geq 0}$ est une martingale. Intégrons par rapport à ces processus en $Ts'$ le processus prévisible $\mathbb{R}_+ \ni u \mapsto \phi_i(X_{(Ts+u)-})$ pour obtenir

$$\begin{aligned} N_i^{(T,s,s')} &= -\sum_{0<u\leq Ts'} \phi_i(X_{(Ts+u)-})(\phi_i(X_{Ts+u}) - \phi_i(X_{(Ts+u)-})) \\ &= -\int_{Ts}^{T(s+s')} \phi_i(X_u) L_{\beta_u}\phi_i(X_u)\, du + -\int_{Ts}^{T(s+s')} \phi_i(X_{u-}) dM_u^{\phi_i} \end{aligned}$$

où $N_i^{(T,s,s')}$ est le nombre de sorties de $\widetilde{M}_i$ par $X$ entre les instants $Ts$ et $T(s+s')$. En passant aux espérances, du fait que $\mathbb{R}_+ \ni v \mapsto \int_{Ts}^{T(s+v)} \phi_i(X_{u-}) dM_u^{\phi_i}$ est une martingale, il apparaît que

$$\mathbb{E}[N_i^{(T,s,s')}] = -\int_{Ts}^{T(s+s')} \mathbb{E}[\phi_i(X_u) L_{\beta_u}\phi_i(X_u)]\, du$$

Cependant, soit $x \in \widetilde{M}_i$ et pour $v \geq 0$, soit $\psi_v$ l'unique solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} L_{\beta_v}\psi_v &=& \mathbb{1}_{\{x\}} - \mu_{\beta_v}(x) \\ \mu_{\beta_v}(\psi_v) &=& 0 \end{array} \right.$$

on a vu dans les sections 2 et 3 de [11] que pour deux constantes $K \geq 0$ et $\delta > 0$ (indépendantes de $v \geq 0$),

$$\begin{aligned} \|\psi_v\| &\leq K \exp((k - U(x))\beta_v) \\ \left\| \frac{d}{dv}(\exp[(U(x)-k)\beta_v]\psi_v) \right\| &\leq K \exp(-\delta\beta_v) \left| \frac{d\beta_v}{dv} \right| \end{aligned}$$

Soit $l \geq k - U(x)$, en utilisant alors le fait que

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[ \int_{Ts}^{T(s+s')} \exp(-l\beta_u) \mathbb{1}_{\{x\}}(X_u)\, du \right] \\ &= \int_{Ts}^{T(s+s')} \exp(-l\beta_u)\mu_{\beta_u}(x)\, du - \mathbb{E}\left[ \int_{Ts}^{T(s+s')} \frac{d}{du}(\exp(-l\beta_u)\psi_u)(X_u)\, du \right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[ \exp(-l\beta_{T(s+s')})\psi_{T(s+s')}(X_{T(s+s')}) \right] - \mathbb{E}[\exp(-l\beta_{Ts})\psi_{Ts}(X_{Ts})] \end{aligned}$$

et l'équivalence (29), on montre facilement que

$$\sup_{T>0} \mathbb{E}\left[ \int_{Ts}^{T(s+s')} \exp(-l\beta_u) \mathbb{1}_{\{x\}}(X_u)\, du \right] < +\infty$$

Or pour tout $x \in M$, on a

$$\phi_i(x) L_{\beta_u}\phi_i(x) = -\sum_{(x,y)\in \mathrm{F}_s(\widetilde{M}_i)} \exp(-\beta_u V(x,y)) q(x,y)$$

et par ce qui précède on obtient donc

$$\sup_{T>0} -\int_{Ts}^{T(s+s')} \mathbb{E}[\phi_i(X_u) L_{\beta_u}\phi_i(X_u)]\, du < +\infty$$

d'où en fin de compte

$$\sup_{T>0} \mathbb{E}[N^{(T,s,s')}] \leq \sum_{1\leq i\leq m} \sup_{T>0} \mathbb{E}[N_i^{(T,s,s')}] < +\infty$$

puis (31).

Remarquons que le même calcul appliqué au cycle $\widehat{M}$ permet de retrouver qu'il n'y a qu'un nombre fini de sorties (et donc d'entrées) de $\widehat{M}$ pour l'algorithme $X$.

Cette convergence peut aussi s'interpréter de la manière suivante :
Soit $\check{Z}^{(T,s)} = (\check{Z}_t^{(T,s)})_{t\geq 0}$ le processus stochastique défini par

$$\forall\ t \geq 0, \qquad \check{Z}_t^{(T,s)} = \widehat{Z}_n^{(T,s)}, \qquad \text{si } \widehat{T}_n^{(T,s)} \leq t < \widehat{T}_{n+1}^{(T,s)}$$

Notons que les $\widehat{T}_n^{(T,s)}$ ne sont pas tout à fait les temps de sauts de $\check{Z}^{(T,s)}$, car il se peut que $\widehat{Z}_n^{(T,s)} = \widehat{Z}_{n+1}^{(T,s)}$. Appelons d'ailleurs $(\breve{T}_n^{(T,s)})_{n\in\mathbb{N}}$ ces temps de sauts (en convenant que $\breve{T}_0^{(T,s)} = 0$) et $(\breve{Z}_n^{(T,s)})_{n\in\mathbb{N}}$ les positions correspondantes du processus $\check{Z}^{(T,s)}$. On vérifie facilement que la loi de $(\breve{Z}_{n+1}^{(T,s)}, \breve{T}_{n+1}^{(T,s)})$ sachant $((\breve{Z}_p^{(T,s)}, \breve{T}_p^{(T,s)}))_{0\leq p\leq n}$ ne dépend que de $(\breve{Z}_n^{(T,s)}, \breve{T}_n^{(T,s)})$ et qu'elle est donnée pour tous $1 \leq i \neq j \leq m$ et $t, u \geq 0$ par

$$(33) \qquad \mathbb{P}[\breve{Z}_{n+1}^{(T,s)} = i, \breve{T}_{n+1}^{(T,s)} \geq t + \breve{T}_n^{(T,s)} \,|\, \breve{Z}_n^{(T,s)} = j, \breve{T}_n^{(T,s)} = u] = \frac{r(j,i)}{1 - r(j,j)} \left(\frac{s+u}{s+u+t}\right)^{\alpha^{-k}R(\widetilde{M}_j)(1-r(j,j))}$$

En effet, notons $\eta = \alpha^{-k}R(\widetilde{M}_j)$ et $\gamma = r(j,j) \in ]0,1[$. Soit $(\widehat{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires positives, telles que $\widehat{T}_0 = 0$ et telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de $\widehat{T}_{n+1}$ sachant $(\widehat{T}_p)_{0\leq p\leq n}$ ne dépende que de $\widehat{T}_n$ et soit donnée par

$$\forall\ v \geq 0, \qquad \mathbb{P}[\widehat{T}_{n+1} \geq \widehat{T}_n + v \,|\, \widehat{T}_n] = \left(\frac{s' + \widehat{T}_n}{s' + \widehat{T}_n + v}\right)^{\eta}$$

où on a posé $s' = s + u$. On calcule alors que la densité de la loi de $\widehat{T}_n$ est donnée (par rapport à $dt$ sur $\mathbb{R}_+$) par

$$\begin{aligned}
&\int_{0\leq t_1\leq t_2\leq\cdots\leq t_{n-1}\leq t} \eta\frac{(s'+t_{n-1})^\eta}{(s'+t)^{\eta+1}}\eta\frac{(s'+t_{n-2})^\eta}{(s'+t_{n-1})^{\eta+1}}\cdots\eta\frac{(s')^\eta}{(s'+t_1)^{\eta+1}}\,dt_1\cdots dt_{n-1}\\
&= \frac{\eta^n(s')^\eta}{(s'+t)^{\eta+1}}\int_{0\leq t_1\leq t_2\leq\cdots\leq t_{n-1}\leq t}\frac{1}{s'+t_{n-1}}\cdots\frac{1}{s'+t_1}\,dt_1\cdots dt_{n-1}\\
&= \frac{1}{n!}\frac{\eta^n(s')^\eta}{(s'+t)^{\eta+1}}\int_{[0,t]^{n-1}}\frac{1}{s'+t_{n-1}}\cdots\frac{1}{s'+t_1}\,dt_1\cdots dt_{n-1}\\
&= \frac{1}{n!}\frac{\eta^n(s')^\eta}{(s'+t)^{\eta+1}}\ln^{n-1}\left(\frac{s'+t}{s'}\right)
\end{aligned}$$

Soit $N$ une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}^*$ indépendante de $(\widehat{T}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}[N = n] = \gamma^{n-1}(1-\gamma)$ (avec les notations de (33), $N$ représente le nombre de $\widehat{T}_p^{(T,s)}$ compris dans $]\breve{T}_n^{(T,s)}, \breve{T}_{n+1}^{(T,s)}]$). Il suffit en fait de voir que la loi de $\widehat{T}_N$ admet pour densité par rapport à $dt$

$$\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \frac{\eta(1-\gamma)}{s'}\left(\frac{s'}{s+t}\right)^{\eta(1-\gamma)+1}$$

ce qui découle de

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\gamma^{n-1}(1-\gamma)\frac{1}{n!}\frac{(s')^\eta\eta^n}{(s'+t)^{\eta+1}}\ln^{n-1}\left(\frac{s'+t}{s'}\right) = \frac{\eta(1-\gamma)(s')^\eta}{(s'+t)^{\eta+1}}\exp(\gamma\eta\ln(s'+t/s'))$$

D'après la section 8.9.6 de [7], les égalités (33) montrent que $\check{Z}^{(T,s)}$ est un processus de Markov inhomogène sur $\{1, \cdots, m\}$ dont l'intensité de saut de $i$ à $j$, $1 \leq i \neq j \leq m$, à l'instant $t \geq 0$ est donnée par

$$p_{s+t}(i,j) = \alpha^{-k} R(\widetilde{M}_i) r(i,j) \frac{1}{t+s}$$

Sur ces formules, il apparaît que $\check{Z}^{(T,s)}$ n'est autre qu'un processus de Markov homogène changé de temps. Plus précisément, soit pour $s > 0$ et $t \geq 0$,

$$\tau(s,t) = \ln\left(\frac{t+s}{s}\right)$$

et $\widehat{Z}^{(T,s)}$ le processus de Markov homogène dont les intensités de transitions sont données par $(p_1(i,j))_{1 \leq i \neq j \leq m}$ et dont la loi initiale est $l^{(T,s)}$. Alors on a l'égalité en loi des processus $(\check{Z}_t^{(T,s)})_{t \geq 0}$ et $(\widehat{Z}^{(T,s)}_{\tau(s,t)})_{t \geq 0}$.

Changeons les notations, en remplaçant $s + s'$ par $s'$ (on a donc $s' > s$). On peut déduire de la convergence que nous avons montrée précédemment que pour toute fonction $f$ sur $\{0, 1, \cdots, m\}$,

$$\lim_{T \to +\infty} \mathbb{E}\left[ f(\Pi(X_{Ts'})) \mathbb{1}_{\left\{T^{(T,s)}_{N^{(T,s,s'-s)}-1} \leq s' < \widetilde{T}^{(T,s)}_{N^{(T,s,s'-s)}}\right\}}\right] - \mathbb{E}[f(\check{Z}^{(T,s)}_{s'-s})] = 0$$

c'est-à-dire en fait (en considérant $f \equiv 1$),

$$\lim_{T \to +\infty} \mathbb{E}[f(\Pi(X_{Ts'}))] - \mathbb{E}[f(\widehat{Z}^{(T,s)}_{\tau(s,s'-s)})] = 0$$

Mais $s'$ étant fixé, en faisant tendre $s$ vers 0 et en utilisant l'ergodicité en loi de $\widehat{Z}^{(T,s)}$ (uniformément en sa loi initiale), on montre facilement que tout point d'adhérence pour les lois des $\Pi(X_{Ts'})$ sur $\{0, 1, \cdots, m\}$ pour $T$ grand est nécessairement la probabilité invariante $\mu$ pour le générateur associé aux intensités $(p_1(i,j))_{1 \leq i \neq j \leq m}$, 0 étant asymptotiquement de masse nulle, c'est-à-dire que l'on a convergence vers cette loi (on renvoit à la fin de cette section pour une description plus explicite de cette mesure). Ceci permet ensuite de voir, $s > 0$ étant à nouveau fixé, que

$$\lim_{T \to +\infty} l^{(T,s)} = \mu$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $s' > s$, notons $\mathcal{D}_n([0, s'-s[)$ l'ensemble des élements $((z_p, \widetilde{t}_p, t_p))_{0 \leq p \leq n}$ de $(\{1, \cdots, m\} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)^{n+1}$ tels que $0 = \widetilde{t}_0 \leq t_0 < \widetilde{t}_1 \leq t_1 < \cdots < \widetilde{t}_n \leq t_n$ et $t_{n-1} < s' - s \leq t_n$. On munit $\mathcal{D}_n([0, s'-s[)$ de la topologie héritée de celle du produit $\{1, \cdots, m\} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Soit $\mathcal{D}([0, s'-s[) = \sqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_n([0, s'-s[)$ muni de la topologie engendrée par la réunion des topologies précédentes (chacun des $\mathcal{D}_n([0, s'-s[)$ est donc à la fois ouvert et fermé).

Soit $\varphi : \mathcal{D}([0, s'-s[) \to \mathbb{D}([0, s'-s[\,; \{0, 1, \cdots, m\})$ tel que l'image par $\varphi$ de $((z_p, \widetilde{t}_p, t_p))_{0 \leq p \leq n} \in \mathcal{D}_n([0, s'-s[)$ soit la fonction $x$ donnée par

$$\forall\, t \in [0, s'-s[, \qquad x_t = \begin{cases} z_p & \text{, si } t_p \leq t < \widetilde{t}_{p+1} \text{ pour un } 0 \leq p < n \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases}$$

L'application $\varphi$ est surjective mais pas tout à fait injective, néanmoins soit $\mathcal{T}$ la topologie la plus fine qui rende $\varphi$ continue. Cette topologie est strictement moins forte que la topologie de Skorokhod sur l'espace des trajectoires càdlàg $\mathbb{D}([0, s'-s[\,; \{\underbrace{0}, 1, \cdots, m\})$ (cependant si dans ce qui précède on oublie les $\widetilde{t}_p$, ce qui est à faire dans les cas où $\widetilde{M}_0 = \emptyset$, on retrouve cette topologie, mais ceci aurait été faux si on avait considéré $\mathbb{D}([0, s'-s]\,; \{0, 1, \cdots, m\})$).

Soit $f$ une fonction bornée sur $\mathbb{D}([0,s'-s[\,;\{0,1,\cdots,m\})$, alors

$$\lim_{T\to+\infty} \mathbb{E}[f(Y^{(T,s)})] = \mathbb{E}[f(\check{Z}^{(s)})]$$

si l'ensemble de discontinuité de $f$ est négligeable pour la loi de $\check{Z}^{(s)}$, où ce dernier est le processus de Markov sur $\{1,\cdots,m\}$ de loi initiale $\mu$ et dont la famille d'intensités de transitions à l'instant $t\geq 0$ est $(p_{s+t}(i,j))_{1\leq i,j\leq m}$.

Notamment si on ne s'intéresse qu'au processus $(\widetilde{Y}_t^{(T,s)})_{0\leq t<s'-s}$ défini par

$$\forall\ t\in[0,s'-s[,\qquad \widetilde{Y}_t^{(T,s)} = Z_p^{(T,s)},\ \text{si}\ T_p^{(T,s)}\leq t< T_{p+1}^{(T,s)}\ \text{pour}\ p\geq 0$$

alors on a convergence étroite de $\widetilde{Y}^{(T,s)}$ vers la loi de $(\check{Z}_t^{(s)})_{0\leq t<s'-s}$ relativement à la topologie de Skorokhod sur $\mathbb{D}([0,s'-s[\,;\{1,\cdots,m\})$, mais aussi sur $\mathbb{D}([0,s'-s]\,;\{1,\cdots,m\})$, car l'ensemble des trajectoires où les topologies de Skorokhod et $\mathcal{T}$ (ou dumoins celle que l'on aurait introduit de la même manière sur cet espace) ne coïncident pas est négligeable pour la loi de $(\check{Z}_t^{(s)})_{0\leq t\leq s'-s}$.

Ainsi les marginales finies du processus de temps d'occupation de $\widetilde{M}_i$

$$\mathbb{R}_+\ni t\mapsto \frac{1}{\int_0^T \mu_{\beta_u}(\widetilde{M}_i)\,du}\int_{Ts}^{T(s+t)} \mathbb{1}_{\widetilde{M}_i}(X_u)\,du$$

convergent en loi vers celles du processus

$$\mathbb{R}_+\ni t\mapsto \frac{1}{\sum_{x\in N(\widetilde{M}_i)}\rho(x)}\int_0^t \mathbb{1}_{\{i\}}(\check{Z}_u^{(s)})\,du$$

Du fait que les processus sont issus de 0, croissants et continus, on en déduit que l'on a aussi ici convergence étroite pour la topologie de la norme uniforme localement sur les compacts (cf. le théorème 3.37(a) p. 318 de [8], celui-ci est donné pour la topologie de Skorokhod, mais de la même manière il est satisfait pour la topologie uniforme locale).

Soit $\widehat{Z}=(\widehat{Z}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ le processus de Markov stationnaire sur $\{1,\cdots,m\}$ d'intensités de transitions $(p_1(i,j))_{1\leq i\neq j\leq m}$ (et dont la loi de $\widehat{Z}_t$ est donc $\mu$ pour tout $t\in\mathbb{R}$) et considérons le processus $I^{(s)}(\widetilde{M}_i)=(I_t^{(s)}(\widetilde{M}_i))_{t\geq 0}$ donné par

$$\forall\ t\geq 0,\qquad I_t^{(s)}(\widetilde{M}_i)=\begin{cases}0 & ,\ \text{si}\ t\leq s\\ (\sum_{x\in N(\widetilde{M}_i)}\rho(x))^{-1}\int_s^t \mathbb{1}_{\{i\}}(\widehat{Z}_{\ln(u)})\,du & ,\ \text{sinon}\end{cases}$$

Il est clair que $I^{(s)}(\widetilde{M}_i)$ a même loi que le processus $\widetilde{I}^{(s)}(\widetilde{M}_i)$ défini par

$$\forall\ t\geq 0,\qquad \widetilde{I}_t^{(s)}(\widetilde{M}_i)=\begin{cases}0 & ,\ \text{si}\ t\leq s\\ (\sum_{x\in N(\widetilde{M}_i)}\rho(x))^{-1}\int_0^{t-s} \mathbb{1}_{\{i\}}(\check{Z}_u^{(s)})\,du & ,\ \text{sinon}\end{cases}$$

Cependant quand $s$ tend vers 0, $I^{(s)}(\widetilde{M}_i)$ converge (partout) uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}_+$ (et même sur $\mathbb{R}_+$, puisque $\sup_{t\geq 0}\left|I_t^{(s)}(\widetilde{M}_i)-I_t^{(0)}(\widetilde{M}_i)\right|\leq (\sum_{x\in N(\widetilde{M}_i)}\rho(x))^{-1}s$) vers le processus $I^{(0)}(\widetilde{M}_i)=(I_t^{(0)}(\widetilde{M}_i))_{t\geq 0}$ qui est défini par la même formule (on laissera désormais tomber les (0) en exposant). Notons $Q_{\widetilde{M}_i}$ sa loi, c'est une probabilité portée par les fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ issues de 0.

Pour prouver la convergence en loi des marginales finies du processus

$$\mathbb{R}_+\ni s\mapsto \frac{1}{\int_0^T \mu_{\beta_u}(\widetilde{M}_i)\,du}\int_0^{Ts} \mathbb{1}_{\widetilde{M}_i}(X_u)\,du$$

vers celles du processus canonique sous $Q_{\widetilde{M}_i}$, il suffit par exemple de montrer que

$$\lim_{\epsilon\to 0_+}\limsup_{T\to+\infty}\frac{1}{\int_0^T\mu_{\beta_u}(\widetilde{M}_i)\,du}\mathbb{E}\left[\int_0^{T\epsilon}\mathbb{1}_{\widetilde{M}_i}(X_u)\,du\right]=0 \tag{34}$$

Mais pour cela, soit pour $v\geq 0$, $\psi_v$ l'unique solution de

$$\left\{\begin{array}{rcl} L_{\beta_v}\psi_v & = & \mathbb{1}_{\widetilde{M}_i}-\mu_{\beta_v}(\widetilde{M}_i)\\ \mu_{\beta_v}(\psi_v) & = & 0\end{array}\right.$$

et rappelons qu'il existe une constante $K\geq 0$ telle que pour tout $v\geq 0$

$$\begin{array}{rcl}\|\psi_v\| & \leq & K\exp(k\beta_v)\\ \left\|\dfrac{d}{dv}\psi_v\right\| & \leq & K\exp(k\beta_v)\left|\dfrac{d\beta_v}{dv}\right|\end{array}$$

L'égalité (34) découle alors immédiatement de

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\int_0^{T\epsilon}\mathbb{1}_{\widetilde{M}_i}(X_u)\,du\right]\\ &=\int_0^{T\epsilon}\mu_{\beta_u}(\widetilde{M}_i)\,du-\mathbb{E}\left[\int_0^{T\epsilon}\frac{d\psi_u}{du}(X_u)\,du\right]+\mathbb{E}[\psi_{T\epsilon}(X_{T\epsilon})]-\mathbb{E}[\psi_0(X_0)]\end{aligned}$$

et des équivalences (29) et

$$\int_0^T\mu_{\beta_u}(\widetilde{M}_i)\,du\sim\sum_{x\in N(\widetilde{M}_i)}\rho(x)T$$

pour $T$ grand.

On en déduit comme précédemment que la convergence du processus renormalisé des temps d'occupations de $\widetilde{M}_i$ vers $Q_{\widetilde{M}_i}$ a également lieu au sens de la convergence étroite associée à la topologie de la norme uniforme locale sur $\mathbb{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$, qui est l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, et on a même en fait convergence du processus à valeurs dans $\mathbb{R}^m$

$$\left(\left(\frac{1}{\int_0^T\mu_{\beta_u}(\widetilde{M}_i)\,du}\int_0^{Ts}\mathbb{1}_{\widetilde{M}_i}(X_u)\,du\right)_{1\leq i\leq m}\right)_{s\geq 0}$$

vers le processus $((I_s(\widetilde{M}_i))_{1\leq i\leq m})_{s\geq 0}$.

Soit maintenant $x_0$ appartenant à l'un des $M_i$, avec $1\leq i\leq m$, une démarche similaire, mais en utilisant cette fois en plus le théorème 2 avec le cycle $\widetilde{M}_i$ et les calculs suivant la proposition 14, permet de voir que le processus renormalisé des temps d'occupations en $x_0$ converge en loi (encore pour la topologie étroite relative à la norme uniforme locale sur $\mathbb{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$) vers le processus

$$\left(\left(\sum_{x\in N(\widetilde{M}_i)}\rho(x)\right)^{-1}(1-k^{-1}U(x_0))\int_0^s u^{-k^{-1}U(x_0)}\mathbb{1}_{\{i\}}(\widehat{Z}_{\ln(u)})\,du\right)_{s\geq 0}$$

Plus précisément, si pour $x_0\in\sqcup_{1\leq i\leq m}\widetilde{M}_i$, on note $1\leq i(x_0)\leq m$ l'indice tel que $x_0\in\widetilde{M}_{i(x_0)}$, on a convergence étroite dans $\mathbb{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+^{\mathrm{card}(\sqcup_{1\leq i\leq m}\widetilde{M}_i)})$ du processus $((I_s(T,x_0))_{x_0\in\sqcup_{1\leq i\leq m}\widetilde{M}_i})_{s\geq 0}$ vers

$$\left(\left(\left(\sum_{x\in N(\widetilde{M}_{i(x_0)})}\rho(x)\right)^{-1}(1-k^{-1}U(x_0))\int_0^s u^{-k^{-1}U(x_0)}\mathbb{1}_{\{i(x_0)\}}(\widehat{Z}_{\ln(u)})\,du\right)_{x_0\in\sqcup_{1\leq i\leq m}\widetilde{M}_i}\right)_{s\geq 0}$$

Reste à s'intéresser aux (éventuels) points $x_0 \in \widetilde{M}_0$ tels que $U(x_0) < k$. Pour ceux-ci on ne va pas avoir convergence des processus renormalisés des temps d'occupations vers un processus continu, mais vers un processus de sauts (i.e. qui à tout instant $s \geq 0$ est la somme des ses sauts antérieurs à $s$), et celui-ci ne s'obtient pas seulement comme une fonctionnelle de $\widehat{Z}$, car ce processus ne contient plus assez d'information (notamment il a perdu la trace de certains passages en $\widetilde{M}_0$).

Pour décrire les modifications à lui apporter, reprenons une chaîne de Markov (à temps discret) $\tilde{Z}$ définie comme précédemment sur $M^* = \{\widetilde{M}_1, \cdots, \widetilde{M}_{m+m'}\}$. Posons

$$S_0 = \min\{p \geq 0 \,/\, \tilde{Z}_p \in \{\widetilde{M}_1, \cdots, \widetilde{M}_m\}\}$$

puis par récurrence pour tout $n \in I\!N$,

$$S_{n+1} = \min\{p > S_n \,/\, \tilde{Z}_p \in \{\widetilde{M}_1, \cdots, \widetilde{M}_m\}\}$$

Notons également $A_0 = 0$ puis pour tout $n \in I\!N$,

$$A_{n+1} = \begin{cases} 1 - A_n & \text{, si } S_{n+1} > S_n + 1 \\ A_n & \text{, sinon} \end{cases}$$

La suite $(A_n)_{n \in I\!N}$ est donc à valeurs dans $\{0, 1\}$ et $A_{n+1} \neq A_n$ si et seulement si la chaîne $\tilde{Z}$ a pris des valeurs dans $\{\widetilde{M}_{m+1}, \cdots, \widetilde{M}_{m+m'}\}$ entre les temps $S_n$ et $S_{n+1}$. Pour $n \in I\!N$, soit $\underline{\hat{Z}}_n = (\tilde{Z}_{S_n}, A_n)$ et remarquons que le processus $\underline{\hat{Z}} = (\underline{\hat{Z}}_n)_{n \in I\!N}$ est une chaîne de Markov homogène sur $\underline{M} = \{1, \cdots, m\} \times \{0, 1\}$, en convenant désormais d'identifier $\widetilde{M}_i$ avec $i$, pour $1 \leq i \leq m$.

Introduisons également une suite $(\widehat{T}_p)_{p \in I\!N}$ de variables aléatoires telle que $\widehat{T}_0 = 0$ et telle que pour tout $p \in I\!N$, $\widehat{T}_{p+1}$ et $\underline{\hat{Z}}_{p+1}$ soient conditionnellement indépendants sachant $((\underline{\hat{Z}}_{p'}, \widehat{T}_{p'}))_{0 \leq p' \leq p}$ et que la loi conditionnelle de $\widehat{T}_{p+1}$ sachant $((\underline{\hat{Z}}_{p'}, \widehat{T}_{p'}))_{0 \leq p' \leq p}$ admette pour densité

$$\alpha^{-k} R(\widetilde{M}_i) \exp(-\alpha^{-k} R(\widetilde{M}_i)(t - u))$$

par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda(dt)$ sur $[u, +\infty[$ avec $(i, u) = (\tilde{Z}_{S_p}, \widehat{T}_p)$. On définit ensuite un processus stochastique $\underline{Z} = (\underline{Z}_t)_{t \geq 0}$ par

$$\forall\, t \geq 0, \qquad \underline{Z}_t = \underline{\hat{Z}}_n \qquad \text{, si } \widehat{T}_n \leq t < \widehat{T}_{n+1}$$

Comme précédemment, on montre facilement que $\underline{Z}$ est un processus de Markov homogène à valeurs dans $\underline{M}$ (bien que les $\widehat{T}_n$ ne soient pas nécessairement tous ses instants de sauts).

Soit $\underline{\mu}$ sa mesure invariante, on considèrera désormais $\underline{Z} = (\underline{Z}_t)_{t \in I\!R}$ le processus de Markov stationnaire qui a même intensités de transitions que notre précédent $\underline{Z}$ (ainsi notamment pour tout $t \in I\!R$, $\underline{Z}_t$ est de loi $\underline{\mu}$). Si on ne regarde que les coordonnées de $\underline{Z}$ sur le facteur $\{1, \cdots, m\}$ de $\underline{M}$, on retrouve le processus $\widehat{Z}$ qui est intervenu un peu plus haut, et on les notera d'ailleurs désormais de la même manière. D'autre part, on posera aussi $\underline{A} = (\underline{A}_t)_{t \in I\!R}$ le processus des coordonnées sur le facteur $\{0, 1\}$ de $\underline{M}$, de sorte que $\underline{Z} = (\widehat{Z}, \underline{A})$. Un des intérêts de $\underline{Z}$ est que l'ensemble des exponentielles des instants de sauts de $\underline{A}$ va contenir les temps de sauts d'une représentation du processus limite (au sens de la convergence étroite des marginales finies) des $I(T, x_0)$ pour $T$ grand.

Pour décrire la hauteur des sauts, soit $1 \leq i, j \leq m$ tels que la transition de $(i, 0)$ à $(j, 1)$ (ou, ce qui revient au même, de $(i, 1)$ à $(j, 0)$) soit permise pour $\underline{Z}$, et notons $C$ l'ensemble de tels couples $(i, j)$. Pour $t > 0$, considérons $X^{(t)}$ un processus de Markov sur $M$ associé à $(q, V)$, à l'évolution $\beta^{(t)} = (\beta_{t+s})_{s\geq 0}$ et dont la loi initiale $m_0^{(t)}$ est la renormalisation de la restriction de $r^{\widetilde{M}_i}$ à $\widetilde{M}_0$. On peut alors appliquer le théorème 15 avec l'ensemble $G = \widetilde{M}_0$ pour obtenir avec

$$\begin{array}{rcl} a_t & = & t^{k^{-1}\sigma(\widetilde{M}_0)} \\ b_t & = & t^{1-k^{-1}U(x_0)} \end{array}$$

la convergence étroite de $(T^{(\widetilde{M}_0,t)}/a_t, G^{(t)}_{T^{(\widetilde{M}_0,t)}}(x_0)/b_t, Y^{(\widetilde{M}_0,t)})$ vers une certaine mesure sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times (M \setminus \widetilde{M}_i)$. Soit un triplet de variables aléatoires $(T^{(\infty)}, G^{(\infty)}(x_0), Y^{(\infty)})$ admettant cette probabilité pour loi, et notons $\underline{\nu}^{(i,j)}(x_0)$ la loi conditionnelle de $G^{(\infty)}(x_0)$ sachant que $Y^{(\infty)} = j$. On peut montrer que sous nos hypothèses, $\underline{\nu}^{(i,j)}(x_0)$, tout comme la loi de $G^{(\infty)}(x_0)$, est une combinaison convexe d'une masse de Dirac en 0 et d'une loi exponentielle (essentiellement ceci est dû au fait qu'une chaîne de Markov homogène absorbée conditionnée à être absorbée en l'un des points absorbants fixé est encore une chaîne de Markov homogène absorbée, voir par exemple la section 3.2.9 de [7]), ceci au sens large, car on peut n'avoir qu'une masse de Dirac en 0 ou qu'une loi exponentielle.

Soit $(H_p^{(i,j)})_{p\in\mathbb{Z},(i,j)\in C}$ une famille de variables aléatoires réelles, indépendantes entre elles et indépendantes de $\underline{Z}$, telles que les $H_p^{(i,j)}$, pour $p \in \mathbb{Z}$, soient de loi $\underline{\nu}^{(i,j)}(x_0)$. Soit également $(\tau_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ une énumération des sauts de $\underline{A}$, on peut par exemple prendre

$$\tau_0 = \inf\{t \geq 0 \,/\, \underline{A}_{t-} \neq \underline{A}_t\}$$

puis par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$,

$$\tau_{p+1} = \inf\{t > \tau_p \,/\, \underline{A}_{t-} \neq \underline{A}_t\}$$

et

$$\tau_{-p-1} = \sup\{t < \tau_{-p} \,/\, \underline{A}_{t-} \neq \underline{A}_t\}$$

(mais remarquons que ces derniers ne sont plus des temps d'arrêt).

Posons ensuite pour $s \geq 0$,

$$I_s(x_0) = \sum_{\exp(\tau_p)\leq s} (1 - k^{-1}U(x_0))\alpha^{U(x_0)}\rho^{-1}(x_0)\exp((1 - k^{-1}U(x_0))\tau_p)H_p^{(\widehat{Z}_{\tau_p-},\widehat{Z}_{\tau_p})}$$

Alors $(I_s(T, x_0))_{s\geq 0}$ converge au sens de la convergence étroite des marginales finies vers $(I_s(x_0))_{s\geq 0}$.

Soit $\widehat{M}_0 = \{x \in \widetilde{M}_0 \,/\, U(x) < k\}$. En considérant comme ci-dessus la loi conditionnelle $\underline{\bar{\nu}}^{(i,j)}$ sur $\mathbb{R}_+^{\widehat{M}_0}$ de $(G^{(\infty)}(x_0))_{x_0\in\widehat{M}_0}$ sachant que $Y^{(\infty)} = j$ (avant de passer à la limite en $t$ grand, chacun des $G^{(t)}_{T^{(\widetilde{M}_0,t)}}(x_0)$, pour $x_0 \in \widehat{M}_0$, aura été renormalisé par $t^{1-k^{-1}U(x_0)}$), il est également possible de donner un théorème limite pour le processus de tous les temps d'occupations renormalisés $((I_s(T, x))_{x\in M})_{s\geq 0}$ pour $T$ grand, mais la probabilité $\underline{\bar{\nu}}^{(i,j)}$ est délicale à décrire, ce qui réduit l'intérêt de cette généralisation.

Par ailleurs, dans la définition précédente de $I(x_0)$ pour $x_0 \in \widehat{M}_0$, si l'une des lois $\underline{\nu}^{(i,j)}(x_0)$, pour $(i, j) \in C$, charge 0, les $\tau_p$ ne seront pas tous de "vrais" temps de sauts de $I(x_0)$ (il se peut même qu'avec une probabilité strictement positive, il n'existe aucun $x_1 \in \widehat{M}_0$ tel qu'un $\tau_p$ donné soit un temps de saut de $I(x_1)$). Mais si on le désire, on peut faire disparaître, pour un $x_0 \in \widehat{M}_0$ fixé, ces temps de sauts de hauteur nulle tout en gardant une description similaire, car il suffit de remplacer dans les définitions précédentes le processus $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la suite $(A_n(\widetilde{M}_{i_0}))_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$A_{n+1}(\widetilde{M}_{i_0}) = \begin{cases} 1 - A_n(\widetilde{M}_{i_0}) & \text{, s'il existe } S_n < p < S_{n+1} \text{ tel que } \widetilde{Z}_p \in \widetilde{M}_{i_0} \\ A_n(\widetilde{M}_{i_0}) & \text{, sinon} \end{cases}$$

où $m+1 \leq i_0 \leq m+m'$ est tel que $x_0 \in \widetilde{M}_{i_0}$. Plus précisément, on peut même le faire conjointement pour tous les $x \in \widetilde{M}_{i_0}$, ce dernier cycle étant nécessairement inclus dans $\widehat{M}_0$ s'il en contient l'un des éléments. Pour $(i,j) \in C$ et $x_0 \in \widetilde{M}_{i_0}$, notons $\underline{\nu}^{(i,j)}(x_0) = a^{(i,j)}(x_0)\delta_0 + (1 - a^{(i,j)}(x_0))\mathcal{E}(b^{(i,j)}(x_0))$, avec $0 \leq a^{(i,j)}(x_0) \leq 1$ et $b^{(i,j)}(x_0) > 0$, on se rend immédiatement compte que $a^{(i,j)}(x_0)$ ne dépend pas du choix de $x_0 \in \widetilde{M}_{i_0}$, ce qui nous amène à poser $C(\widetilde{M}_{i_0}) = \{(i,j) \in C \,/\, a^{(i,j)}(x_0) < 1\}$, puis pour $(i,j) \in C(\widetilde{M}_{i_0})$ et $t \in \mathbb{R}$, $v^{(i,j)}(t)$ le vecteur de $\mathbb{R}^{\widetilde{M}_{i_0}}$ de composantes $((1-k^{-1}U(x_0))\alpha^{U(x_0)}(\rho(x_0)b^{(i,j)}(x_0))^{-1}\exp((1-k^{-1}U(x_0))t))_{x_0 \in \widetilde{M}_{i_0}}$.

On construit comme précédemment un processus de Markov stationnaire $\underline{Z}(\widetilde{M}_{i_0}) = ((\widehat{Z}_t, \underline{A}_t(\widetilde{M}_{i_0})))_{t \in \mathbb{R}}$ et on note $(\tau_p(\widetilde{M}_{i_0}))_{p \in \mathbb{Z}}$ une énumération des sauts de $\underline{A}\,(\widetilde{M}_{i_0})$, en remarquant que p.s., $(\widehat{Z}_{\tau_p-(\widetilde{M}_{i_0})}, \widehat{Z}_{\tau_p(\widetilde{M}_{i_0})}) \in C(\widetilde{M}_{i_0})$. Alors on peut représenter le processus $(I(x_0))_{x_0 \in \widetilde{M}_{i_0}}$ sous la forme

$$\forall\, s \geq 0, \qquad (I_s(x_0))_{x_0 \in \widetilde{M}_{i_0}} = \sum_{\exp(\tau_p) \leq s} v^{(\widehat{Z}_{\tau_p -}, \widehat{Z}_{\tau_p})}(\tau_p) H_p$$

où $(H_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ est une famille de variables aléatoires de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, indépendantes entre elles et indépendantes de $\underline{Z}(\widetilde{M}_{i_0})$.

D'autre part, remarquons que la proposition 17 se déduit facilement de ces résultats, car elle correspond au cas $m = 1$ (et dans cette situation $(\tau_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ est un processus ponctuel de Poisson d'intensité $\alpha^{-k}R(\widetilde{M})\lambda$, où $\lambda$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$).

Pour clore cette section, on va vérifier en se basant partiellement sur les résultat obtenus ci-dessus, que les algorithmes précédents, avec $k \geq c(M)$, sont ergodiques en loi : Il existe une probabilité $\mu_\infty$ telle que quelle que soit la loi initiale du processus, la loi de $X_t$ converge vers $\mu_\infty$ pour $t$ grand. Plus précisément, ici $\mu_\infty$ est donné par

$$\mu_\infty = \lim_{\beta \to +\infty} \mu_\beta$$

i.e.,

$$\forall\, x \in M, \qquad \mu_\infty(x) = \begin{cases} (\sum_{y \in N(M)} \rho(y))^{-1} \rho(x) & \text{, si } x \in N(M) \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases}$$

Remarquons que le fait que $\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}[\exists\, s \geq t \,/\, X_s \notin \widehat{M}] = 0$ permet à nouveau de se restreindre au cas $M = \widehat{M}$ (en utilisant (9) pour voir que l'on obtient la bonne probabilité à la limite).

Commençons par montrer que

$$\forall\, 1 \leq i \leq m, \qquad \mu(i) = \mu_\infty(\widetilde{M}_i) \tag{35}$$

(rappelons que $\mu$ est la mesure invariante de $\widehat{Z}$), et pour ceci reconsidérons la chaîne de Markov $\widetilde{Z}$ à valeurs dans $\{1, \cdots, m+m'\}$ dont le noyau de probabilités de transitions est donné par

$$\forall\, i \neq j \in \{1, \cdots, m+m'\}, \qquad \widetilde{q}(i,j) = r^{\widetilde{M}_i}(\widetilde{M}_j)$$

On note $\widetilde{\mu}$ la mesure invariante associée à $\widetilde{Z}$. Cependant comme précédemment, soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les temps d'atteintes successifs de $\{1, \cdots, m\}$ par $\widetilde{Z}$, il est bien connu que $(\widetilde{Z}_{S_n})_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène sur $\{1, \cdots, m\}$ dont la probabilité invariante $\bar{\mu}$ est la renormalisation de la restriction de $\widetilde{\mu}$ à $\{1, \cdots, m\}$ (ceci peut se voir en appliquant par exemple la loi forte des grands nombres à $(\widetilde{Z}_n)_{n \geq 0}$ et à $(\widetilde{Z}_{S_n})_{n \geq 0}$), or par définition on voit facilement que $\mu$ est la renormalisation en une probabilité de la mesure $\bar{\nu}$ donnée par

$$\forall\, 1 \leq i \leq m, \qquad \bar{\nu}(i) = R^{-1}(\widetilde{M}_i)\bar{\mu}(i)$$

On est donc ramené à calculer $\bar{\mu}$. Revenons à $\mu_\beta$, pour $\beta \geq 0$, on a pour tout $x \in M$,

$$\sum_{y \neq x} \mu_\beta(x) q_\beta(x,y) = \sum_{y \neq x} \mu_\beta(y) q_\beta(y,x)$$

ainsi en sommant sur $x \in \widetilde{M}_i$, avec $1 \leq i \leq m+m'$ fixé, et en enlevant les termes apparaissant dans les deux membres, on obtient (puisque $M = \widehat{M}$),

$$\sum_{j \neq i} \sum_{x \in \widetilde{M}_i,\, y \in \widetilde{M}_j} \mu_\beta(x) q_\beta(x,y) = \sum_{j \neq i} \sum_{x \in \widetilde{M}_i,\, y \in \widetilde{M}_j} \mu_\beta(y) q_\beta(y,x)$$

Cependant pour de tels couples de points $(x,y)$, on a $U(x)+V(x,y) = U(y)+V(y,x) = k$, ainsi en faisant tendre $\beta$ vers $+\infty$, il apparaît que

$$\sum_{j \neq i} \sum_{x \in \widetilde{M}_i,\, y \in \widetilde{M}_j} \rho(x) q(x,y) = \sum_{j \neq i} \sum_{x \in \widetilde{M}_i,\, y \in \widetilde{M}_j} \rho(y) q(y,x)$$

ce qui du fait que

$$\begin{aligned} r^{\widetilde{M}_i}(\widetilde{M}_j) &= R^{-1}(\widetilde{M}_i) \sum_{x \in \widetilde{M}_i,\, y \in \widetilde{M}_j} \rho^{\widetilde{M}_i}(x) q(x,y) \\ &= (R(\widetilde{M}_i) \sum_{z \in N(\widetilde{M}_i)} \rho(z))^{-1} \sum_{x \in \widetilde{M}_i,\, y \in \widetilde{M}_j} \rho(x) q(x,y) \end{aligned}$$

s'écrit encore,

$$\sum_{j \neq i} \left( R(\widetilde{M}_i) \sum_{z \in N(\widetilde{M}_i)} \rho(z) \right) \widetilde{q}(i,j) = \sum_{j \neq i} \left( R(\widetilde{M}_j) \sum_{z \in N(\widetilde{M}_j)} \rho(z) \right) \widetilde{q}(j,i)$$

Ceci montre que $\widetilde{\mu}$ est la renormalisation en une probabilité de la mesure $\nu$ sur $\{1, \cdots, m+m'\}$ définie par

$$\forall\ 1 \leq i \leq m+m', \qquad \nu(i) = R(\widetilde{M}_i) \sum_{x \in N(\widetilde{M}_i)} \rho(x)$$

d'où en fin de compte le résultat annoncé (35).

Par ailleurs, notons que si $(m_0^{(t)})_{t \geq 0}$ est une famille de probabilités initiales portées par $\widetilde{M}_i$, avec $1 \leq i \leq m$ fixé, et si $\epsilon : I\!\!R_+ \to I\!\!R_+$ est un fonction telle que $\lim_{t \to +\infty} \epsilon(t)/t = 0$, alors par une application du rappel 1,

$$\lim_{t \to +\infty} I\!\!P[T^{(\widetilde{M}_i, t)} \leq \epsilon(t)] = 0$$

(où comme d'habitude, $X^{(t)}$ est associé à $m_0^{(t)}$ et à $\beta^{(t)}$ la translatée dans le temps par $t$ de $\beta$).

Ainsi via (9), (35) et le fait que l'on a déjà vu que la distribution de $\Pi(X_t)$ converge pour $t$ grand vers $\mu$, pour obtenir que la loi de $X_t$ converge vers $\mu_\infty$, il suffit de voir que l'on peut trouver une fonction $\epsilon$ vérifiant la condition précédente telle que si $(Y^{(t)})$ désigne un processus de Markov sur $(\widetilde{M}_i, q^{\widetilde{M}_i}, V^{\widetilde{M}_i})$ associé à $m_0^{(t)}$ et à $\beta^{(t)}$, alors la loi de $Y_{\epsilon(t)}^{(t)}$ converge pour $t$ grand vers $\mu_\infty^{\widetilde{M}_i} = \lim_{\beta \to +\infty} \mu_\beta^{\widetilde{M}_i}$.

Mais ceci se prouve par exemple par un calcul classique d'évolution d'entropie :

Notons pour $t, s \geq 0$, $m_s^{(t)}$ la loi de $Y_s^{(t)}$ et

$$I_s^{(t)} = \sum_{x \in \widetilde{M}_i} \ln \left( \frac{m_s^{(t)}}{\mu_{\beta_s^{(t)}}^{\widetilde{M}_i}}(x) \right) m_s^{(t)}(x)$$

En reprenant les calculs de la section 2 de [11], il apparaît qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} I_s^{(t)} &\leq -K \exp(-c(\widetilde{M}_i)\beta_s^{(t)}) I_s^{(t)} - \frac{d}{ds}\beta_s^{(t)} \sum_{x\in\widetilde{M}_i} \frac{d}{d\beta} \ln(\mu_\beta^{\widetilde{M}_i}(x))\Big|_{\beta=\beta_s^{(t)}} m_s^{(t)}(x) \\ &= -K \exp(-c(\widetilde{M}_i)\beta_s^{(t)}) I_s^{(t)} - \frac{d}{ds}\beta_s^{(t)} \sum_{x\in\widetilde{M}_i} \frac{d}{d\beta} \ln(\mu_\beta^{\widetilde{M}_i}(x))\Big|_{\beta=\beta_s^{(t)}} (m_s^{(t)}(x) - \mu_{\beta_s^{(t)}}^{\widetilde{M}_i}(x))\end{aligned}$$

Or en variation totale, on a $\left\|m_s^{(t)} - \mu_{\beta_s^{(t)}}^{\widetilde{M}_i}\right\|_{\mathrm{vt}} \leq \sqrt{2}\sqrt{I_s^{(t)}}$ (cf. l'équation (1.12) p. 199 de [13]), ainsi le second terme du membre de droite peut se majorer en valeur absolue par $\sqrt{2}\left\|\frac{d}{d\beta}\ln(\mu_\beta^{\widetilde{M}_i})\Big|_{\beta=\beta_s^{(t)}}\right\|_\infty \left|\frac{d}{ds}\beta_s^{(t)}\right| \sqrt{I_s^{(t)}}$, et le fait que pour tout $x \in \widetilde{M}_i$, $\mu_\beta^{\widetilde{M}_i}(x)$ est une certaine fraction rationnelle en les variables $(q_\beta(y,z))_{y\neq z\in\widetilde{M}_i}$ montre que $\sup_{\beta\geq 0}\left\|\frac{d}{d\beta}\ln(\mu_\beta^{\widetilde{M}_i})\right\|_\infty$ est fini (plus précisément, $\lim_{\beta\to+\infty}\left\|\frac{d}{d\beta}\ln(\mu_\beta^{\widetilde{M}_i})\right\|_\infty = \left\|U^{\widetilde{M}_i}\right\|_\infty = \left\|U|_{\widetilde{M}_i}\right\|_\infty < k$).

Posons $J_s^{(t)} = \sqrt{I_s^{(t)}}$, et ne considérons que les $t \geq t_0$ où $t_0$ est assez grand pour que $\beta^{(t_0)}$ soit croissant, on a alors pour une constante $K > 0$,

$$\frac{d}{ds} J_s^{(t)} \leq K\left(-\exp(-c(\widetilde{M}_i)\beta_s^{(t)}) J_s^{(t)} + \frac{d}{ds}\beta_s^{(t)}\right)$$

ce qui s'intègre pour donner

$$\begin{aligned} J_s^{(t)} &\leq J_0^{(t)} \exp\left[-K\int_0^s \exp(-c(\widetilde{M}_i)\beta_u^{(t)})\,du\right] + K\int_0^s \exp\left[-K\int_u^s \exp(-c(\widetilde{M}_i)\beta_v^{(t)})\,dv\right] \frac{d}{du}\beta_u^{(t)}\,du \\ &\leq J_0^{(t)} \exp[-Ks\exp(-c(\widetilde{M}_i)\beta_s^{(t)})] + K(\beta_s^{(t)} - \beta_0^{(t)})\end{aligned}$$

Cependant on a $c(\widetilde{M}_i) < k$, ainsi en prenant $\epsilon(t) = t^{(k+c(\widetilde{M}_i))/2}$, on obtient

$$\lim_{t\to+\infty} J_{\epsilon(t)}^{(t)} = 0$$

car pour une certaine constante $K > 0$ indépendante de $t$, on a $J_0^{(t)} \leq K(1+\ln(\beta_t))$ et d'après l'hypothèse (29), asymptotiquement en $t$ grand, $\beta_t = k^{-1}\ln(t) + \ln(\alpha) + \mathcal{O}(1)$, ce qui termine la preuve de l'ergodicité en loi annoncée.

Remarquons que la démonstration précédente est surtout intéressante dans le cas critique $k = c(M)$, car dans les autres situations $k > c(M)$, il est possible d'adapter le calcul d'entropie directement au processus $X$, sans même se restreindre à $\widehat{M} = M$.

# References


[1] O. Catoni and R. Cerf. The exit path of a Markov chain with rare transitions. Prépublication LMENS - 95 - 23 de l'Ecole Normale Supérieure, 1995.

[2] C. Dellacherie and P.A. Meyer. *Probabilités et potentiel ; théorie des martingales.* Hermann, 1980.

[3] J.-D. Deuschel and C. Mazza. $L^2$ convergence of time nonhomogeneous Markov processes: I. spectral estimates. *The Annals of Applied Probability*, 4(4):1012–1056, 1994.

[4] M.I. Freidlin and A.D. Wentzell. *Random Perturbations of Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 1984.

[5] C.R. Hwang and S.J. Sheu. On the weak reversibility condition in simulated annealing. *Soochow Journal of Mathematics*, 15(2):159–170, 1989.

[6] C.R. Hwang and S.J. Sheu. Singular perturbed Markov chains and exact behaviors of simulated annealing processes. *Journal of Theoretical Probability*, 5(2):223–249, 1992.

[7] M. Iosifescu. *Finite Markov Processes and Their Applications*. Wiley, 1980.

[8] J. Jacod and A.N. Shiryaev. *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer-Verlag, 1987.

[9] L. Miclo. Remarques sur l'ergodicité des algorithmes de recuit simulé sur un graphe. *Stochastic Processes and their Applications*, 58:329–360, 1995.

[10] L. Miclo. Problème de sortie discret et théorèmes limites pour les temps d'occupations du recuit simulé. Prépublication 08-96 du Laboratoire de Statistique et Probabilités, Université Toulouse III, France, 1996.

[11] L. Miclo. Sur les problèmes de sortie discrets inhomogènes. A paraître dans *The Annals of Applied Probability*, 1996.

[12] E. Olivieri and E. Scoppola. Markov chains with exponentially small transition probabilities: first exit problem from a general domain. I. the reversible case. *Journal of Statistical Physics*, 79(3/4):613–647, 1995.

[13] D.W. Stroock. Logarithmic Sobolev inequalities for Gibbs states. In G. Dell'Antonio and U. Mosco, editors, *Dirichlet Forms*, Lecture Notes in Mathematics 1563, pages 194–228. Springer-Verlag, 1993.

[14] A. Trouvé. *Parallélisation massive du recuit simulé*. PhD thesis, Université Paris 11, Janvier 1993. Thèse de doctorat.

Laboratoire de Statistique et Probabilités
Université Paul Sabatier et CNRS
118, route de Narbonne
31062 Toulouse cedex, France