

Relations entre isopérimétrie et trou spectral pour les chaînes de Markov finies

Laurent Miclo

Laboratoire de Statistique et Probabilités, UMR C5583,
Université Paul Sabatier et CNRS,
118, route de Narbonne,
F-31062 Toulouse Cedex, France.
e-mail: miclo@cict.fr

Reçu: 12 août 1997 / Version révisée: 9 novembre 1998

Abstract. Let G be a finite and connected graph, we will note by $l(G)$ the maximum length of an injective path in G . We will show (by two distinct proofs, one using sub-trees of G and the other based on multiflows of paths) that $\sup_{(P, \mu) \in \mathcal{R}(G)} I(P, \mu) / \lambda(P, \mu) = l(G)$, where the supremum is taken over all Markovian kernels P reversible with respect to a probability μ and whose allowed transitions are given by the edges of G , and where $I(P, \mu)$ (respectively $\lambda(P, \mu)$) is the isoperimetric constant (resp. the spectral gap) associated to the couple (P, μ) . Then we will study more precisely the same supremum, but where the probability μ is also fixed. These results give optimal minorations of the spectral gap which are linear with respect to the isoperimetric constant (and not quadratic, as in the Cheeger inequality), and we will give several examples on infinite graphs.

Mathematics Subject Classification (1991): Primary 49R05, 05C50; secondary 60J10, 05C38, 05C05

Résumé. Soit G un graphe connexe fini et notons $l(G)$ la plus grande longueur d'un chemin injectif dans G . Nous montrerons (par deux preuves distinctes, l'une utilisant des sous-arbres de G et l'autre des multiflots de

Key words and phrases: Finite Markov kernels – reversible probabilities – isoperimetry, (modified) spectral gaps – underlying graphs and trees – paths and Poincaré's methods

chemins) que $\sup_{(P, \mu) \in \mathcal{R}(G)} I(P, \mu) / \lambda(P, \mu) = I(G)$, où le supremum est pris sur tous les couples (P, μ) formés d'un noyau markovien P qui est réversible par rapport à la probabilité μ et dont les transitions permises sont données par les arêtes de G , et où $I(P, \mu)$ (respectivement $\lambda(P, \mu)$) est la constante isopérimétrique (resp. le trou spectral) associé à (P, μ) . Puis nous étudierons plus précisément le supremum de ce quotient de constantes ergodiques quand la probabilité μ est de plus fixée, en faisant intervenir certaines inégalités de Hardy discrètes, avec des poids déterminés par μ sur les sous-arbres de G . Ces résultats fournissent donc des minoration du trou spectral linéaires en la constante isopérimétrique (et non plus quadratiques comme dans l'inégalité de Cheeger), et nous les illustrerons par divers exemples sur des graphes infinis.

1. Introduction

L'étude de diverses constantes ergodiques s'est beaucoup développé récemment, car elles permettent de comprendre quantitativement la vitesse de convergence vers l'équilibre d'algorithmes stochastiques, qui eux mêmes sont motivés par des applications dans des domaines aussi différents que l'informatique théorique, la combinatoire, l'optimisation sur de grandes structures discrètes, la physique statistique etc. Dans un article précédent [11], nous avons donné pour les noyaux markoviens réversibles sur un ensemble fini de taille fixée, un encadrement du trou spectral qui est linéaire en la constante isopérimétrique. Si cette dernière quantité est petite devant le cardinal de l'ensemble, il s'agit d'une alternative intéressante à l'inégalité de Cheeger traditionnelle, dans le contexte de comparaisons de constantes ergodiques (voir par exemple, [2], [8], [6], [12], [4], [17] ...). Notre but ici est de préciser ce résultat dans la situation où les noyaux markoviens admettent un graphe sous-jacent fixé, puis en imposant que la probabilité réversible soit de plus donnée. Ceci nous permettra de mieux comprendre deux familles d'exemples (définis sur des ensembles infinis) également présentées dans [11], en les faisant apparaître comme des sous-cas d'une propriété plus générale.

Plus précisément, soit $n \in \mathbb{N}^*$, on notera $V_n = \{0, \dots, n\}$ et \mathcal{R}_n l'ensemble des couples (P, μ) formé d'une matrice markovienne $P = (P(i, j))_{0 \leq i, j \leq n}$ réversible par rapport à la probabilité $\mu = (\mu(i))_{0 \leq i \leq n}$. A un tel élément de \mathcal{R}_n , on associe les quantités suivantes : la constante isopérimétrique

$$I(P, \mu) = \inf_{A \subset V_n, 0 < \mu(A) \leq 1/2} \frac{\mu(\mathbf{1}_A P(\mathbf{1}_{A^c}))}{\mu(A)} \quad (1)$$

et le trou spectral

$$\lambda(P, \mu) = \inf_{f \in \mathbb{L}^2(\mu) \setminus \text{Vect}(\mathbf{1})} \frac{\mu(f(\text{Id} - P)(f))}{\mu(f^2) - \mu(f)^2}$$

(si μ est une masse de Dirac, on convient respectivement que $I(P, \mu) = 1$ et $\lambda(P, \mu) = 2$).

Cependant, on préférera ici remplacer cette constante par sa soeur, $\tilde{\lambda}(P, \mu)$, qui sera dit trou spectral modifié, et dont la définition s'apparente plus à celle de $I(P, \mu)$:

$$\tilde{\lambda}(P, \mu) = \inf_{f \in H(\mu) \setminus \{0\}} \frac{\mu(f(\text{Id} - P)(f))}{\mu(f^2)}$$

où $H(\mu) = \{f \in \mathbb{L}^2(\mu) / f \geq 0 \text{ et } \mu(\{f = 0\}) \geq 1/2\}$ (si μ est une masse de Dirac, on pose $\tilde{\lambda}(P, \mu) = 1$).

Cet échange n'est pas très scandaleux, car on a vérifié dans [11] que l'on a toujours $\tilde{\lambda}(P, \mu) \leq \lambda(P, \mu) \leq 2\tilde{\lambda}(P, \mu)$. Le principal résultat de [11] affirme que

$$\forall (P, \mu) \in \mathcal{R}_n, \quad \frac{I(P, \mu)}{n} \leq \tilde{\lambda}(P, \mu) \leq I(P, \mu) \quad (2)$$

(la seconde inégalité est triviale). Nous y avons aussi constaté que l'on pouvait parfois améliorer la première inégalité en remplaçant n par d'autres quantités relatives à la structure de graphe sous-jacent au noyau markovien, si l'on faisait des hypothèses particulières sur la géométrie de ce dernier, et l'objectif de cet article est de présenter un résultat relativement général dans cette direction.

Rappelons que le graphe $G(P, \mu) = (V(P, \mu), E(P, \mu))$ associé naturellement à $(P, \mu) \in \mathcal{R}_n$ est celui admettant $V(P, \mu) = \{i \in V_n / \mu(i) > 0\}$ pour ensemble des sommets et $E(P, \mu) = \{\{i, j\} \subset V(P, \mu) / i \neq j \text{ et } P(i, j) > 0\}$ pour ensemble des arêtes (sans boucles et non orientées, on aura remarqué que par réversibilité, pour $i, j \in V(P, \mu), P(i, j) > 0 \Leftrightarrow P(j, i) > 0$). Notons que le graphe $G(P, \mu)$ est connexe avec $V(P, \mu) = V_n$ si et seulement si P est irréductible, ce qui est aussi équivalent au fait que μ charge tous les points et $I(P, \mu) > 0$ (ou $\tilde{\lambda}(P, \mu) > 0$).

Soit $G = (V, E)$ un graphe sur un ensemble V . Un chemin de G est une suite finie $(x_i)_{0 \leq i \leq p}$ d'éléments de V tels que pour tout $1 \leq i \leq p, \{x_{i-1}, x_i\}$ soit une arête de G , on dira aussi que ce chemin va de x_0 à x_p et que sa longueur est p . On appellera $l(G)$ le maximum des longueurs de chemins de G ne se recoupant pas (parfois également dits injectifs). Enfin on posera également, si $V = V_n$,

$$\mathcal{R}_n(G) = \{(P, \mu) \in \mathcal{R}_n / G(P, \mu) = G\}$$

Nous pouvons maintenant énoncer notre premier résultat, qui étend (2) :

Théorème 1. Soit $(P, \mu) \in \mathcal{R}_n$, on a

$$\tilde{\lambda}(P, \mu) \geq \frac{I(P, \mu)}{l(G(P, \mu))}$$

et plus précisément, si G est un graphe connexe donné sur V_n ,

$$\sup_{(P, \mu) \in \mathcal{R}_n(G)} \frac{I(P, \mu)}{\tilde{\lambda}(P, \mu)} = l(G)$$

Avant de considérer des exemples, faisons quelques rappels sur le cadre général : de la même manière (simplement en remplaçant $A \subset V_n$ par $A \in \mathcal{V}$ dans (1)), on définit les constantes $I(P, \mu)$ et $\tilde{\lambda}(P, \mu)$ pour un noyau markovien P réversible par rapport à une probabilité μ sur un espace mesurable quelconque (V, \mathcal{V}) . Si \mathcal{A} est une sous-tribu de \mathcal{V} , on note $\mu_{\mathcal{A}}$ la restriction de μ à \mathcal{A} et $P_{\mathcal{A}}$ l'opérateur markovien $E_{\mathcal{A}} \circ P \circ I_{\mathcal{A}}$ sur $\mathbb{L}^2(V, \mathcal{A}, \mu_{\mathcal{A}})$, où $I_{\mathcal{A}}$ est l'injection canonique de $\mathbb{L}^2(V, \mathcal{A}, \mu_{\mathcal{A}})$ dans $\mathbb{L}^2(V, \mathcal{V}, \mu)$, et $E_{\mathcal{A}}$ est l'opérateur de projection orthogonale de $\mathbb{L}^2(V, \mathcal{V}, \mu)$ sur $\mathbb{L}^2(V, \mathcal{A}, \mu_{\mathcal{A}})$. Il est clair (on renvoie par exemple à [10]) que cette opération fait augmenter les constantes précédentes : $I(P_{\mathcal{A}}, \mu_{\mathcal{A}}) \geq I(P, \mu)$ et $\tilde{\lambda}(P_{\mathcal{A}}, \mu_{\mathcal{A}}) \geq \tilde{\lambda}(P, \mu)$. De plus, si $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de sous-tribus de \mathcal{V} telles que $\mathcal{V} = \sigma(\mathcal{A}_n; n \in \mathbb{N})$, alors (voir par exemple les preuves données dans [10]),

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} I(P_{\mathcal{A}_n}, \mu_{\mathcal{A}_n}) &= I(P, \mu) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}(P_{\mathcal{A}_n}, \mu_{\mathcal{A}_n}) &= \tilde{\lambda}(P, \mu) \end{aligned}$$

On en déduit que si on note $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ l'ensemble des sous-tribus de \mathcal{V} qui sont finies, on a

$$\begin{cases} I(P, \mu) = \sup_{\mathcal{A} \in \mathcal{F}(\mathcal{V})} I(P_{\mathcal{A}}, \mu_{\mathcal{A}}) \\ \tilde{\lambda}(P, \mu) = \sup_{\mathcal{A} \in \mathcal{F}(\mathcal{V})} \tilde{\lambda}(P_{\mathcal{A}}, \mu_{\mathcal{A}}) \end{cases} \quad (3)$$

(la séparabilité de \mathcal{V} n'est pas exigé, car par exemple pour $\tilde{\lambda}(P, \mu)$, quand on approche cet infimum à l'aide d'une fonction de $H(\mu)$ presque minimisante, il suffit ensuite de s'intéresser à la tribu engendrée par cette fonction, qui elle est séparable, et on peut alors utiliser la procédure d'approximation précédente avec des suites croissantes $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ formées de sous-tribus finies).

L'application la plus caractéristique du théorème 1 concerne les arbres: pour ceux-ci $l(G) = \text{diam}(G)$, le diamètre de G (que l'on aura muni de sa distance usuelle ; pour tous $x, y \in S$, $d_G(x, y)$ est le nombre d'arête(s)

de l'unique chemin ne se recoupant pas allant de x à y), et on a donc, pour $(P, \mu) \in \mathcal{R}_n$, si $G(P, \mu)$ est un arbre,

$$\tilde{\lambda}(P, \mu) \geq \frac{I(P, \mu)}{\text{diam}(G(P, \mu))} \tag{4}$$

Cette relation peut s'étendre à d'autres types de graphes (car $I(G) = \text{diam}(G)$ n'est pas exclusivement satisfait par les arbres), mais on pouvait voir directement, sans faire appel à la seconde partie du théorème 1, qu'il n'est pas possible de la prolonger à tous les couples réversibles (P, μ) , du moins dès que $n \geq 2$, essentiellement car $\{(P, \mu) \in \mathcal{R}_n / \text{diam}(G(P, \mu)) = 1\}$ est dense dans \mathcal{R}_n .

Notons que (4) peut s'étendre à des couples réversibles qui possède une structure arborescente non localement finie, à condition évidemment qu'elle admette un diamètre fini. Plus précisément, soit par exemple $N \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1, \mathcal{E}_1), \dots, (E_N, \mathcal{E}_N)$ des espaces mesurables séparables et fortement séparés (i.e. tous les singletons sont des éléments de la tribu), et posons $V = \{0\} \sqcup E_1 \sqcup (E_1 \times E_2) \sqcup \dots \sqcup (E_1 \times \dots \times E_N)$ que l'on munit de la tribu \mathcal{V} engendrée naturellement par les tribus produits $\mathcal{E}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_i$, $1 \leq i \leq N$, sur chacun des éléments de la somme. Pour $1 \leq i \leq N$ et $x = (e_1, \dots, e_i) \in E_1 \times \dots \times E_i$, on pose $p(x) = \{(e_1, \dots, e_{i-1})\}$ (en convenant que $p(x) = \{0\}$, si $i = 1$) et $n(x) = i$, puis $p(0) = \emptyset$ et $n(0) = 0$.

Considérons un noyau P sur (V, \mathcal{V}) réversible par rapport à une probabilité μ et satisfaisant :

$$\forall x \in S, \quad P(x, p(x) \sqcup \{x\} \sqcup (\{x\} \times E_{n(x)+1})) = 1$$

(en convenant que $E_{N+1} = \emptyset$).

On déduit alors du théorème 1 que

$$\frac{I(P, \mu)}{2N} \leq \tilde{\lambda}(P, \mu) \leq I(P, \mu)$$

En effet, la seconde inégalité est trivialement toujours satisfaite et pour la première on procède par approximations, en utilisant le fait que si pour tout $1 \leq i \leq N$, $(\mathcal{A}_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de sous-tribus finies de \mathcal{E}_i telle que $\mathcal{E}_i = \sigma(\mathcal{A}_n^{(i)}; n \in \mathbb{N})$, alors en notant pour $n \in \mathbb{N}$, \mathcal{A}_n la tribu engendrée sur V par les tribus produits $\mathcal{A}_n^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n^{(i)}$, $1 \leq i \leq N$, sur chacun des éléments de la somme, on a $\mathcal{V} = \sigma(\mathcal{A}_n; n \in \mathbb{N})$, ce qui permet de se ramener aux cas des noyaux finis dont le graphe sous-jacent est un arbre (car on aura remarqué que la structure d'arbre est conservée par chacun des couples réversibles réduits $(P_{\mathcal{A}_n}, \mu_{\mathcal{A}_n})$).

Remarquons que ce résultat étend celui que nous avons présenté dans [11] pour les arbres radiaux pointés, qui correspondent à un sous-cas extrêmement particulier (la preuve était d'ailleurs complètement différente et

était basée sur la structure de certains vecteurs propres relatifs aux noyaux réduits associés).

En fait l'hypothèse de séparabilité des tribus \mathcal{E}_i , $1 \leq i \leq N$, est inutile, il suffit pour le voir (les détails étant lâchement laissés au lecteur) de se servir du constat suivant : soit (E_1, \mathcal{E}_1) et (E_2, \mathcal{E}_2) deux espaces mesurables et \mathcal{A} une sous-tribu séparable de $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$. Soit μ une probabilité sur $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$. Il existe alors deux sous-tribus séparables, respectivement \mathcal{B} et \mathcal{C} de \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 , telles que $\mathbb{L}^1(\mathcal{A}, \mu) \subset \mathbb{L}^1(\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}, \mu)$.

Le second type d'exemples est à l'origine de cet article (qui répond par l'affirmative à la question de la dernière remarque (b) de [10]), il s'agit aussi de noyaux sur des espaces (éventuellement) infinis, mais qui admettent une structure « étoilée de rayon fini » : soit (E, \mathcal{E}) un espace mesurable fortement séparé (mais on n'exige pas non plus de séparabilité), on considère l'ensemble $S = \{0\} \sqcup (E \times \{1, \dots, N\})$ que l'on munit de sa tribu \mathcal{V} naturellement déduite de \mathcal{E} . On s'intéresse aux noyaux réversibles (P, μ) tels que

$$\forall e \in E, \forall 1 \leq i \leq N, \quad P((e, i), \{0\} \sqcup (\{e\} \times \{1, \dots, N\})) = 1$$

car pour ceux-ci, on a

$$\frac{I(P, \mu)}{2N} \leq \tilde{\lambda}(P, \mu) \leq I(P, \mu) \quad (5)$$

Ce résultat se prouve également par approximation (en considérant les sous-tribus finies de \mathcal{E} et en utilisant (3)), ce qui fournit en fait une preuve alternative à celle donnée dans [11]. D'ailleurs (5) est a priori moins bon que la borne inférieure obtenue dans cet article, car N y remplaçait $2N$, mais nous l'avons prouvé sous l'hypothèse supplémentaire que $\mu(\{0\}) > 1/2$. Cependant on peut récupérer ce facteur 2, car de manière générale, comme on le verra au cours de la preuve, on peut améliorer la première partie du théorème 1 de la manière suivante :

Considérons à nouveau un couple $(P, \mu) \in \mathcal{R}_n$ quelconque. Notons $B(\mu)$ l'ensemble des $A \subset V_n$ tels que $\mu(A) \geq 1/2$, et pour $A \in B(\mu)$, notons $l_{G(P, \mu)}(A)$ la plus grande longueur d'un chemin (pour $G(P, \mu)$) injectif, qui est issu de A et qui en dehors de son point initial ne repasse plus par A . On pose ensuite

$$l(P, \mu) = \max_{A \in B(\mu)} l_{G(P, \mu)}(A) \leq l(G(P, \mu))$$

Proposition 2. *Pour tout $(P, \mu) \in \mathcal{R}_n$, on a*

$$\tilde{\lambda}(P, \mu) \geq \frac{I(P, \mu)}{l(P, \mu)}$$

Notamment s'il existe un point $x_0 \in V_n$ tel que $\mu(x_0) \geq 1/2$, $l(P, \mu)$ est la plus grande longueur d'un $G(P, \mu)$ -chemin injectif issu de x_0 .

Remarquons aussi que des exemples plus complexes où il reste possible d'appliquer le théorème 1 peuvent s'obtenir en combinant les deux types précédents.

Le plan de l'article est le suivant : dans les deux prochaines sections on donnera une preuve du théorème 1 qui fait jouer un rôle crucial aux noyaux dont le graphe sous-jacent est un arbre. On présentera ensuite dans la section 4 une autre démonstration de ce résultat, basée sur des considérations de chemins, par le biais de variantes de méthodes de Poincaré optimales pour la constante isopérimétrique. Dans la cinquième section, on s'intéressera au même problème, quand de plus la probabilité μ est fixée, mais le résultat étant plus difficile à formuler, on renvoie au théorème 10 pour son énoncé. On reconsidèrera cette question dans la dernière section, mais avec le trou spectral remplacé par la constante de Sobolev-logarithmique. Enfin, un appendice sera consacré aux inégalités de Hardy avec poids sur les arbres discrets, que l'on aura utilisées pour évaluer certaines quantités apparues dans les deux sections précédentes.

2. Où l'on se ramène à certains arbres pointés

Nous allons donc dans cette section réduire la difficulté du problème, en montrant qu'il suffit de considérer certaines situations particulières.

Pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, donnons-nous un graphe connexe $G = (V_n, E)$ sur V_n , μ une probabilité sur V_n qui en charge tous les points et $f \in H_*(\mu)$, où ce dernier est l'ensemble des fonctions $f \in H(\mu) \setminus \{0\}$ telles que la restriction de f à $\{f > 0\}$ soit injective. On note $\mathcal{R}_n(G, \mu)$ (respectivement $\tilde{\mathcal{R}}_n(G, \mu)$) l'ensemble des noyaux markoviens P sur V_n qui sont réversibles par rapport à μ et tels que $G(P, \mu) = G$ (resp. $G(P, \mu)$ soit un sous-graphe connexe de G , au sens de l'inclusion de l'ensemble des arêtes). Nous cherchons ici à bien minorer

$$\inf_{P \in \mathcal{R}_n(G, \mu)} \frac{\mu(f(\text{Id} - P)(f))}{\mu(f^2)I(P, \mu)} = \frac{1}{\mu(f^2)} \inf_{P \in \tilde{\mathcal{R}}_n(G, \mu)} \frac{\mu(f(\text{Id} - P)(f))}{I(P, \mu)}$$

A priori, on a

$$\inf_{P \in \mathcal{R}_n(G, \mu)} \frac{\mu(f(\text{Id} - P)(f))}{I(P, \mu)} \geq \inf_{P \in \tilde{\mathcal{R}}_n(G, \mu)} \frac{\mu(f(\text{Id} - P)(f))}{I(P, \mu)}$$

mais par un simple argument de continuité, du fait de la densité de $\mathcal{R}_n(G, \mu)$ dans $\tilde{\mathcal{R}}_n(G, \mu)$, on se persuade que l'on a en fait une égalité, et on se contentera donc de s'intéresser au terme de droite.

Commençons par revenir, dans le cas fini, sur la procédure de restriction à une sous-tribu décrite après l'énoncé du théorème 1 : si $V = V_n$ (muni de la tribu de toutes ses sous-parties), les sous-tribus sont en correspondance naturelle avec les partitions de V_n , et on préférera travailler avec ces dernières. Ainsi à une partition $\mathcal{A} = (A_0, \dots, A_p)$ de V_n et à un couple $(P, \mu) \in \mathcal{R}_n$, on associe $(P_{\mathcal{A}}, \mu_{\mathcal{A}}) \in \mathcal{R}_p$ de la manière suivante :

$$\forall 0 \leq i \leq p, \quad \mu_{\mathcal{A}}(i) = \mu(A_i)$$

$$\forall 0 \leq i, j \leq p, \quad P_{\mathcal{A}}(i, j) = \begin{cases} \mu^{-1}(A_i) \sum_{x \in A_i, y \in A_j} \mu(x) P(x, y) & , \text{ si } \mu(A_i) \neq 0 \\ \delta_{i,j} & , \text{ sinon} \end{cases}$$

(avec les notations de l'introduction, il s'agit, du moins si μ charge tous les A_i , $0 \leq i \leq p$, ce qui sera toujours vérifié ci-dessous, du couple $(P_{\bar{\mathcal{A}}}, \mu_{\bar{\mathcal{A}}})$, où $\bar{\mathcal{A}}$ est la tribu engendrée par \mathcal{A}). Comme on l'a déjà indiqué, on a $I(P_{\mathcal{A}}, \mu_{\mathcal{A}}) \geq I(P, \mu)$.

Soit $f : V_n \rightarrow \mathbb{R}$ qui est constante sur chacun des éléments de la partition (i.e. qui est $\bar{\mathcal{A}}$ -mesurable), on notera tout naturellement $f_{\mathcal{A}}$ la fonction définie sur V_p par

$$\forall 0 \leq i \leq p, \quad \forall x \in A_i, \quad f_{\mathcal{A}}(i) = f(x)$$

Pour une telle fonction, remarquons qu'en désignant par $\mu(\cdot|\bar{\mathcal{A}})$ l'espérance conditionnelle par rapport à $\bar{\mathcal{A}}$ sous μ , on a

$$\begin{aligned} \mu(f(\text{Id} - P)(f)) &= \mu(\mu(f|\bar{\mathcal{A}})(\text{Id} - P)(\mu(f|\bar{\mathcal{A}}))) \\ &= \mu(\mu(f|\bar{\mathcal{A}})\mu[(\text{Id} - P)(\mu(f|\bar{\mathcal{A}}))|\bar{\mathcal{A}}]) \\ &= \mu_{\mathcal{A}}(f_{\mathcal{A}}(\text{Id} - P_{\mathcal{A}})(f_{\mathcal{A}})) \end{aligned}$$

et clairement $\mu(f^2) = \mu_{\mathcal{A}}(f_{\mathcal{A}}^2)$.

Ainsi il apparaît que pour $f \in H(\mu) \setminus \{0\}$,

$$\frac{\mu(f(\text{Id} - P)(f))}{\mu(f^2)I(P, \mu)} \geq \frac{\mu_{\mathcal{A}}(f_{\mathcal{A}}(\text{Id} - P_{\mathcal{A}})(f_{\mathcal{A}}))}{\mu_{\mathcal{A}}(f_{\mathcal{A}}^2)I(P_{\mathcal{A}}, \mu_{\mathcal{A}})}$$

où $\mathcal{A} = (A_0, \dots, A_p)$ est la partition associée à la tribu engendrée par f . De cette manière, en introduisant le graphe $G_{\mathcal{A}}$ sur V_p dont l'ensemble des arêtes est $\{\{i, j\} \subset V_p / \exists x \in A_i \text{ et } y \in A_j \text{ tels que } \{x, y\} \in E\}$, on se ramène à ne considérer désormais que le cas où en plus $\{f = 0\}$ est un singleton, c'est-à-dire où toutes les valeurs prises par f sont distinctes.

Soit $\mathcal{T}(G)$ l'ensemble des sous-graphes de G qui sont des arbres (connexes sur V_n par définition). Le but de cette section est de démontrer le résultat suivant :

Proposition 3. *Sous les hypothèses précédentes (notamment celles auxquelles on s'est ramené sur f), on a*

$$\inf_{P \in \tilde{\mathcal{H}}_n(G, \mu)} \frac{\mu(f(\text{Id} - P)(f))}{I(P, \mu)} = \inf_{T \in \mathcal{F}(G)} \inf_{P \in \mathcal{H}_n(T, \mu)} \frac{\mu(f(\text{Id} - P)(f))}{I(P, \mu)}$$

Manifestement, il suffit de montrer l'inégalité

$$\inf_{P \in \tilde{\mathcal{H}}_n(G, \mu)} \frac{\mu(f(\text{Id} - P)(f))}{I(P, \mu)} \geq \inf_{T \in \mathcal{F}(G)} \inf_{P \in \mathcal{H}_n(T, \mu)} \frac{\mu(f(\text{Id} - P)(f))}{I(P, \mu)}$$

Preuve. A une matrice markovienne P réversible par rapport à μ , associons

$$M(P) = (\mu(x)P(x, y))_{\{x, y\} \in \hat{V}_n} \in \mathcal{M}(G)$$

où $\hat{V}_n = \{\{x, y\} \subset V_n / x \neq y\}$ et où $\mathcal{M}(G)$ est l'ensemble des tableaux triangulaires $M = (M(e))_{e \in \hat{V}_n}$ dont tous les éléments sont positifs et tels que $e \notin E \Rightarrow M(e) = 0$.

Pour $M \in \mathcal{M}(G) \setminus \{0\}$, posons

$$I_\mu(M) = \inf_{A \subset V_n, 0 < \mu(A) \leq 1/2} \frac{\sum_{x \in A, y \in A^c} M(\{x, y\})}{\mu(A)}$$

$$\Lambda_f(M) = \sum_{\{x, y\} \in \hat{V}_n} M(\{x, y\})(f(y) - f(x))^2$$

$$E(M) = \{\{x, y\} \in \hat{V}_n / M(\{x, y\}) > 0\}$$

Rappelons que toutes les valeurs prises par f sont distinctes, ce qui implique notamment la stricte positivité de Λ_f sur $\mathcal{M}(G) \setminus \{0\}$. On a alors

$$\inf_{P \in \tilde{\mathcal{H}}_n(G, \mu)} \frac{\mu(f(\text{Id} - P)(f))}{I(P, \mu)} = \inf_{M \in \mathcal{M}(G) \setminus \{0\}} \frac{\Lambda_f(M)}{I_\mu(M)} \tag{6}$$

En effet, d'une part remarquons que pour $P \in \tilde{\mathcal{H}}_n(G, \mu)$, $\mu(f(\text{Id} - P)(f)) = \Lambda_f(M(P))$ et $I(P, \mu) = I_\mu(M(P))$, et d'autre part que les applications I_μ et Λ_f sont homogènes d'ordre 1 (à défaut d'être linéaire, pour I_μ) et que pour $M \in \mathcal{M}(G) \setminus \{0\}$, soit $(V_n, E(M))$ n'est pas connexe, auquel cas $I_\mu(M) = 0$, d'où $\Lambda_f(M)/I_\mu(M) = +\infty$, soit il existe $R > 0$ assez grand et $P \in \tilde{\mathcal{H}}_n(G, \mu)$ tels que $M = RM(P)$.

D'ailleurs le fait que l'application

$$F : \mathcal{M}(G) \setminus \{0\} \ni M \mapsto \frac{\Lambda_f(M)}{I_\mu(M)} \in]0, +\infty]$$

satisfait pour tout $t > 0$ et tout $M \in \mathcal{M}(G)$, $F(tM) = F(M)$, montre que l'infimum définissant le second membre de (6) est atteint. Notons $\mathcal{N}(G)$ l'ensemble de ces minima globaux de F et soit

$$C = \min_{M \in \mathcal{N}(G)} c(M)$$

où $c(M) = \text{card}\{\{x, y\} \in \hat{V}_n / M(x, y) > 0\}$.

Considérons $M \in \mathcal{N}(M)$ tel que $c(M) = C$. Notre objectif est de prouver que le graphe T canoniquement associé à M sur V_n (qui admet $E(M) \subset E$ comme ensemble d'arêtes, et que l'on sait déjà être connexe) est un arbre, ce qui évidemment montrera la proposition. Pour cela nous allons adopter un raisonnement par l'absurde, en supposant donc qu'il n'en est pas ainsi.

Plus précisément, on appellera boucle une suite finie (x_0, x_1, \dots, x_s) d'éléments distincts de V_n , avec $s \geq 2$, tels que pour tout $0 \leq i \leq s$, $\{x_i, x_{i+1}\} \in E(M)$, en convenant que $x_{s+1} = x_0$ (en fait l'ensemble $\{x_0, x_1, \dots, x_s\}$ sera abusivement aussi désigné par le terme de boucle). On fera l'hypothèse (à contredire) qu'il existe au moins une boucle.

Mais étudions tout d'abord l'ensemble

$$\mathcal{B} = \left\{ B \subset V_n / 0 < \mu(B) \leq 1/2 \text{ et } \sum_{x \in B, y \in B^c} M(\{x, y\}) = I_\mu(M) \mu(B) \right\}$$

des parties où est atteinte la « constante isopérimétrique » $I_\mu(M)$, car le fait qu'il existe $x_\infty \in V_n$ (l'antécédant par f de 0) tel que $\mu(x_\infty) \geq 1/2$ va lui conférer une structure particulière à partir de laquelle on se convaincra que T est un arbre.

Une première remarque utile est que pour toute arête $e \in E(M)$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $e \in \partial B$, la frontière de B , qui est l'ensemble $\{\{x, y\} \in E(M) / x \in B, y \notin B\}$. En effet, si ceci n'était pas satisfait, on pourrait diminuer un peu la valeur de $M(e)$ sans modifier $I_\mu(M)$, cependant cette opération ferait immédiatement décroître strictement $\Lambda_f(M)$, du fait que $(\nabla f)^2(e) > 0$, où on a noté $(\nabla f)^2(e) = (f(y) - f(x))^2$ si $e = \{x, y\}$.

Notons $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \setminus \{x_\infty\}$. Les propriétés importantes de $\tilde{\mathcal{B}}$ sont isolées dans le résultat suivant :

Lemme 4. *Soient $B_1, B_2 \in \tilde{\mathcal{B}}$, on a $B_1 \cup B_2 \in \tilde{\mathcal{B}}$ et si $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, alors $B_1 \cap B_2 \in \tilde{\mathcal{B}}$. Mais surtout, dans tous les cas, si $x \in B_1 \cap B_2^c$ et $y \in B_2 \cap B_1^c$ alors $\{x, y\} \notin E(M)$. Par ailleurs, si K est une boucle, alors il existe $B \in \tilde{\mathcal{B}}$ tel que les composantes connexes de $K \cap B$ pour le graphe induit sur K par T soient des singletons.*

Preuve du lemme. Soient $B_1, B_2 \in \tilde{\mathcal{B}}$ et considérons $B = B_1 \cup B_2$ ainsi que $\check{B} = \{\{x, y\} \in E(M) / x \in B_1 \cap B_2^c \text{ et } y \in B_2 \cap B_1^c\}$. On calcule que

$$\sum_{e \in \partial B} M(e) = \sum_{e \in \partial B_1} M(e) + \sum_{e \in \partial B_2} M(e) - \sum_{e \in \partial(B_1 \cap B_2)} M(e) - 2 \sum_{e \in \check{B}} M(e)$$

(en convenant que $\partial \emptyset = \emptyset$ et $\sum_{\emptyset} = 0$).

Cependant, on a toujours $\sum_{e \in \partial(B_1 \cap B_2)} M(e) \geq I_\mu(M) \mu(B_1 \cap B_2)$ (ceci est trivial si $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ et découle sinon du fait que $0 < \mu(B_1 \cap B_2) \leq 1/2$), ce qui permet de se rendre compte que

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \partial B} M(e) &\leq \sum_{e \in \partial B_1} M(e) + \sum_{e \in \partial B_2} M(e) - I_\mu(M) \mu(B_1 \cap B_2) \\ &= I_\mu(M) (\mu(B_1) + \mu(B_2) - \mu(B_1 \cap B_2)) \\ &= I_\mu(M) \mu(B) \end{aligned}$$

On en déduit, en utilisant que $0 < \mu(B) \leq \mu(\{x_\infty\}^c) \leq 1/2$, que $B \in \tilde{\mathcal{B}}$, puis nécessairement que

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \partial(B_1 \cap B_2)} M(e) &= I_\mu(M) \mu(B_1 \cap B_2) \\ \sum_{e \in \check{B}} M(e) &= 0 \end{aligned}$$

ce qui justifie les deux premières phrases du lemme.

Pour la dernière, soit $K = (x_0, \dots, x_s)$ une boucle. On note \mathcal{K} l'ensemble $\{B \cap K / B \in \tilde{\mathcal{B}} \text{ et } B \cap K \neq \emptyset\}$, il est clair que $\mathcal{K} \neq \emptyset$ (pour le voir il suffit de considérer $B \in \tilde{\mathcal{B}}$ tel que $\partial B \ni \{x_0, x_1\}$), et soit un élément $B_0 \in \mathcal{K}$ de cardinal minimal. Si B_0 ne devait pas convenir, il existerait $0 \leq i \leq s$ tel que $e \stackrel{\text{déf.}}{=} \{x_i, x_{i+1}\} \subset B_0 \cap K$ (toujours en convenant que $x_{s+1} = x_0$). Or il existe $B \in \tilde{\mathcal{B}}$ tel que $e \in \partial B$ et en considérant alors $B \cap B_0 \in \mathcal{K}$, on obtiendrait une contradiction. \square

Une autre notion commode dans ce contexte semble être celle de points de fuite : soit $x \in V_n \setminus \{x_\infty\}$, un point de fuite de x est un voisin y de x (au sens où $\{x, y\} \in E(M)$) qui satisfait pour tout $B \in \tilde{\mathcal{B}}$, $y \in B \Rightarrow x \in B$ (notamment si x_∞ est un voisin de x , c'en est automatiquement un point de fuite).

Remarquons que tout point $x \in V \setminus \{x_\infty\}$ admet au moins un point de fuite. En effet, notons y_1, \dots, y_r les voisins de x , si aucun d'eux n'était un point de fuite de x , ceci signifierait que pour tout $1 \leq i \leq r$, on peut trouver $B_i \in \tilde{\mathcal{B}}$ tel que $y_i \in B_i$ et $x \notin B_i$. Mais en posant alors $B' = \cup_{1 \leq i \leq r} B_i$

et $B = B' \sqcup \{x\}$, on aurait $B' \in \tilde{\mathcal{B}}$, d'où $\sum_{e \in \partial B} M(e) < \sum_{e \in \partial B'} M(e) = I_\mu(M)\mu(B') < I_\mu(M)\mu(B)$, ce qui n'est pas possible, par définition de $I_\mu(M)$, car $0 < \mu(B) \leq 1/2$.

Considérons ensuite une boucle $K = (x_0, \dots, x_s)$, d'après le lemme 4 et à une réindexation près, on peut supposer qu'il existe $B \in \tilde{\mathcal{B}}$ tel que $x_0 \in B$ mais $x_1 \notin B$ et $x_s \notin B$.

Montrons que x_1 et x_p sont alors des points de fuite de x_0 : soit $B_1 \in \tilde{\mathcal{B}}$ tel que $B_1 \ni x_1$, si $x_0 \notin B_1$, on se retrouve dans le cas où $x_0 \in B \cap B_1^c$ et $x_1 \in B_1 \cap B^c$, ce qui d'après le lemme 4 interdirait à $\{x_0, x_1\}$ d'appartenir à $E(M)$, ce qui n'est pas satisfait. De la même manière il apparaît que x_s est un point de fuite de x_0 .

A partir de x_1 , suivons des points de fuite, disons successivement $z_2, \dots, z_r = x_\infty$ (on finit toujours par arriver en x_∞ par finitude de V_n , car un chemin obtenu en suivant des points de fuite ne peut pas revenir sur ses pas, sinon il existerait deux points voisins $x \neq x' \in V_n$ tels que pour tout $B \in \tilde{\mathcal{B}}$, $x \in B \Leftrightarrow x' \in B$, or ceci est contradictoire avec le fait qu'il existe $B \in \tilde{\mathcal{B}}$ tel que $\{x, x'\} \in \partial B$). De manière identique, à partir de x_p , suivons des points de fuites, $z'_2, \dots, z'_{r'} = x_\infty$, jusqu'à arriver en x_∞ . Notons $q = \min\{2 \leq i \leq r/z_i \in \{z'_2, \dots, z'_{r'}\}\}$ et $2 \leq q' \leq r'$ tel que $z_p = z'_{q'}$. On construit ainsi une nouvelle boucle $K' = (x_0, x_1, z_2, \dots, z_p, z'_{q-1}, \dots, z'_1, x_p)$.

Notons \check{K}_1 (respectivement \check{K}_2) l'ensemble des arêtes $\{\{x_0, x_1\}, \{x_1, z_2\}, \dots, \{z_{q-1}, z_q\}\}$ (resp. $\{\{x_0, x_p\}, \{x_p, z'_2\}, \dots, \{z'_{q'-1}, z'_{q'}\}\}$). Quitte à échanger les rôles des indices 1 et 2, on supposera que

$$\sum_{e \in \check{K}_1} M(e)(\nabla f)^2(e) \geq \sum_{e \in \check{K}_2} M(e)(\nabla f)^2(e) \tag{7}$$

Le cycle K' que l'on vient de construire a la particularité suivante : si $B \in \tilde{\mathcal{B}}$, alors de trois choses l'une ; soit $B \supset K'$, soit $B \cap K' = \emptyset$, soit enfin

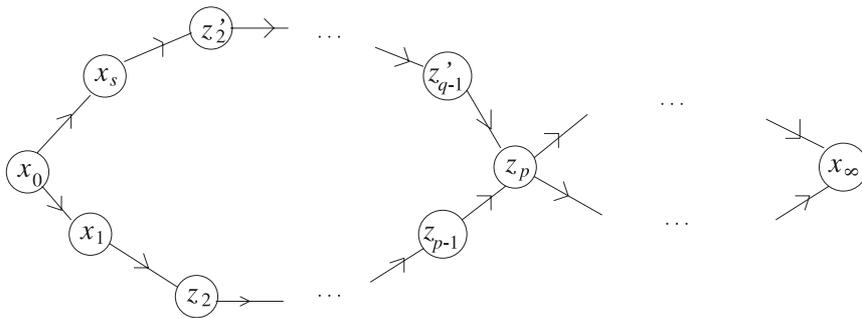


Figure 1 les flèches $\textcircled{x} \rightarrow \textcircled{y}$ indiquent que y est un point de fuite de x .

$\partial B \cap (\check{K}_1 \cup \check{K}_2)$ est constitué de deux arêtes e et e' , l'une appartenant à \check{K}_1 et l'autre à \check{K}_2 .

Pour $0 \leq t \leq t_1 \stackrel{\text{déf.}}{=} \min_{e \in \check{K}_1} M(e)$, considérons le tableau triangulaire $M_t \in \mathcal{M}(G)$ défini par

$$\forall e \in E, \quad M_t(e) = \begin{cases} M(e) - t & , \text{ si } e \in \check{K}_1 \\ M(e) + t & , \text{ si } e \in \check{K}_2 \\ M(e) & , \text{ sinon} \end{cases}$$

et notons $\tilde{\mathcal{B}}_t$ l'ensemble associé à M_t de la même manière que $\tilde{\mathcal{B}}$ était associé à M .

Par construction, vu la forme des intersections des éléments de \mathcal{B} avec K' (on aura remarqué que pour tout $0 \leq t \leq t_1$, $\sum_{y \neq x_\infty} M_t(\{x_\infty, y\}) = \sum_{y \neq x_\infty} M(\{x_\infty, y\})$, car soit $x_\infty \notin K'$, soit $x_\infty = z_p$), pour t assez petit, $I_\mu(M) = I_\mu(M_t)$ et $\tilde{\mathcal{B}}_t = \tilde{\mathcal{B}}$, mais a priori il se peut que pour un $t_0 \in]0, t_1[$, $\tilde{\mathcal{B}}_{t_0}$ contienne un nouvel ensemble, qui n'appartenait pas à $\tilde{\mathcal{B}}$, tout en continuant à contenir tous les ensembles de $\tilde{\mathcal{B}}$ (t_0 étant le plus petit $0 < t_0 < t_1$ tel que $\tilde{\mathcal{B}}_{t_0} \neq \tilde{\mathcal{B}}$). Nous allons maintenant vérifier que ceci n'est pas possible : en effet appelons B_* un élément de $\tilde{\mathcal{B}}_{t_0} \setminus \tilde{\mathcal{B}}$, il est clair (sinon $\sum_{e \in \partial B_*} M(e)/\mu(B_*)$ n'aurait pas pu descendre au niveau $I_\mu(M)$) que nécessairement $B_* \cap \{z_1, z_2, \dots, z_p\}$ est non vide, où on a posé $z_1 = x_1$. On se convainc également qu'il existe $1 \leq i \leq p$ tel qu'en posant $x' = z_i$ puis $x = z_{i-1}$ si $i \geq 2$ et $x = x_0$ si $i = 1$, on ait $x' \in B_*$ et $x \notin B_*$. Soit $B \in \tilde{\mathcal{B}}$ tel que $\{x, x'\} \in \partial B$, puisque x' est un point de fuite de x , B contient obligatoirement x et on a aussi $B \in \tilde{\mathcal{B}}_{t_0}$. On se retrouve dans la situation suivante : $x \in B \cap B_*^c$ et $x' \in B_* \cap B^c$, ce qui d'après le lemme 4 (appliqué avec M remplacé par M_{t_0}) n'est pas possible si $M_{t_0}(e) > 0$ et si M_{t_0} minimise F . Il reste donc à constater que $[0, t_1] \ni t \mapsto \Lambda_f(M_t)$ est décroissante, ce qui découle de (7).

Le raisonnement précédent montre donc que

$$[0, t_1] \ni t \mapsto \frac{\Lambda_f(M_t)}{I_\mu(M_t)}$$

est décroissante, d'où il ressort en fait que $F(M_{t_1}) = F(M)$. Mais ceci fournit la contradiction recherchée, car on a fait disparaître une arête de $E(M)$, i.e. $c(M_{t_1}) < c(M)$, et on a donc bien prouvé que T était un arbre. \square

Remarque. On peut a posteriori donner l'interprétation suivante des points de fuite : tout point $x \in V_n \setminus \{x_\infty\}$ admet un unique point de fuite, qui « indique la direction de x_∞ à partir de x dans l'arbre T ». On peut également facilement décrire $\tilde{\mathcal{B}}$: considérons x_∞ comme la racine de l'arbre T , et pour tout $x \in V_n$, notons T_x l'ensemble des descendants de x (x compris), alors $\tilde{\mathcal{B}} = \{\cup_{1 \leq i \leq p} T_{x_i}; p \in \mathbb{N}^*, x_1, \dots, x_p \in V_n \setminus \{x_\infty\}\}$. Ceci permet

d’ailleurs, connaissant T et μ , d’obtenir, à une constante multiplicative près, le $M \in \mathcal{M}(T)$ minimisant $\Lambda_f(M)/I_\mu(M)$: notons x_1, \dots, x_r les feuilles de T et $e_i, 1 \leq i \leq r$, les arêtes qui y arrivent respectivement, on commence par poser $M(e_i) = \mu(e_i)$ pour $1 \leq i \leq r$, puis on remonte ensuite l’arbre, en utilisant qu’alors $I_\mu(M) = 1$. Ceci sera exploité dans la section 5.

Un arbre pointé $\bar{G} = (V, E, x_\infty)$ est un arbre (V, E) dans lequel on a choisi un sommet particulier $x_\infty \in V$. Si $V = V_n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{R}_n(\bar{G})$ l’ensemble des couples $(P, \mu) \in \mathcal{R}_n$ tels que $G(P, \mu) = (V_n, E)$ et tels que $\mu(x_\infty) \geq 1/2$. Par ailleurs, on associe à l’arbre pointé \bar{G} l’entier $l_*(\bar{G})$ qui est la longueur maximum d’un (V_n, E) -chemin ne se recoupant pas et issu de x_∞ (c’est-à-dire la distance maximale d’une feuille de \bar{G} à sa racine x_∞). Pour $l \in \mathbb{N}^*$, posons également $\tilde{\mathcal{T}}_n(l)$ l’ensemble des arbres pointés \bar{G} sur V_n tels que $l_*(\bar{G}) \leq l$.

Le second membre divisé par $\mu(f^2)$ de l’égalité de la proposition 3 est minoré par

$$\inf_{\bar{G} \in \tilde{\mathcal{T}}_n(l(G))} \inf_{(P, \mu) \in \mathcal{R}_n(\bar{G})} \frac{\tilde{\lambda}(P, \mu)}{I(P, \mu)}$$

et en fin de compte, on a donc obtenu, en passant à des infima en f (on aura noté que $\tilde{\lambda}(P, \mu) = \inf_{f \in H_*(\mu)} \mu(f(\text{Id} - P)(f))/\mu(f^2)$, par densité de $H_*(\mu)$ dans $H(\mu) \setminus \{0\}$), puis en μ (seul le graphe G reste fixé),

$$\inf_{(P, \mu) \in \mathcal{R}_n(G)} \frac{\tilde{\lambda}(P, \mu)}{I(P, \mu)} \geq \inf_{1 \leq p \leq n} \inf_{\bar{G} \in \tilde{\mathcal{T}}_p(l(G))} \inf_{(P, \mu) \in \mathcal{R}_p(\bar{G})} \frac{\tilde{\lambda}(P, \mu)}{I(P, \mu)}$$

Une conséquence de la section suivante est que l’on a en fait une égalité ci-dessus.

Remarque. Si au début de cette section on avait supposé $f \in H(\mu) \setminus \{0\}$ au lieu de $f \in H_*(\mu)$, on n’aurait pas pu conclure comme ci-dessus, car $l(G)$ aurait été remplacé par $\max_{\mathcal{A}} l(G_{\mathcal{A}})$ où le maximum est pris sur toutes les partitions de V_n , or ce nombre est en général beaucoup plus grand que $l(G)$, car des regroupements non connexes de points permettent de faire des sauts (considérer par exemple un arbre binaire fini de hauteur plus grande que 3).

3. Où l’on traite certains arbres pointés

Nous allons ici, dans un premier temps, étudier plus spécifiquement le cas où le couple réversible (P, μ) est associé à une structure d’arbre pointé, ce qui permettra de conclure à la première inégalité du théorème 1, et ensuite on verra à partir d’exemples que cette minoration est optimale, au sens de l’égalité donnée dans le théorème.

Notons $\tilde{\mathcal{T}}_n = \cup_{1 \leq l \leq n-1} \tilde{\mathcal{T}}_n(l)$ l’ensemble des arbres pointés sur V_n .

Proposition 5. Avec les notations précédentes, soit $\bar{T} = (V_n, E, x_\infty) \in \bar{\mathcal{T}}_n$ et $(P, \mu) \in \mathcal{R}_n(\bar{T})$. On a alors

$$\tilde{\lambda}(P, \mu) \geq \frac{I(P, \mu)}{l_*(\bar{T})}$$

Preuve. La démonstration est basée sur une récurrence sur n . Pour diminuer le cardinal de l'ensemble V_n , on va réutiliser la procédure décrite avant la proposition 3. Remarquons juste que si $G(P, \mu)$ est un arbre et si chaque élément $A_i, 0 \leq i \leq p$, de la partition \mathcal{A} est connexe pour $G(P, \mu)$, alors $G(P_{\mathcal{A}}, \mu_{\mathcal{A}})$ reste un arbre.

L'initiation de la récurrence en $n = 1$ est triviale, car pour tout $(P, \mu) \in \mathcal{R}_1, \tilde{\lambda}(P, \mu) = I(P, \mu)$ et $l_*(\bar{T}) = 1$ pour tout $\bar{T} \in \bar{\mathcal{T}}_1$. Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons le résultat établi pour tout $1 \leq p \leq n$, tout $\bar{T} \in \bar{\mathcal{T}}_p$ et tout $(P, \mu) \in \mathcal{R}_p(\bar{T})$. Donnons-nous ensuite $\bar{T} = (V_{n+1}, E, x_\infty) \in \bar{\mathcal{T}}_{n+1}$ et $(P, \mu) \in \mathcal{R}_{n+1}(\bar{T})$. Il apparaît sans difficulté qu'il existe une fonction $f \in H(\mu) \setminus \{0\}$ telle que

$$\tilde{\lambda}(P, \mu) = \frac{\mu(f(I - P)(f))}{\mu(f^2)}$$

et que l'on peut toujours s'arranger pour que $f(x_\infty) = 0$ (car si ce n'est pas le cas, nécessairement $\mu(x_\infty) = 1/2$ et f est de la forme $r \mathbf{1}_{\{x_\infty\}}$ avec $r > 0$, mais on peut alors la remplacer par $\mathbf{1}_{V_n \setminus \{x_\infty\}}$). Remarquons que f « croît en s'éloignant de x_∞ », au sens où si $\{x, y\} \in E$ et si $d(y, x_\infty) = d(x, x_\infty) + 1$ (d désignant la distance naturelle sur (V, E)), alors $f(y) \geq f(x)$.

En effet, il suffit sinon de considérer la fonction g définie par

$$\forall z \in V_n, \quad g(z) = \begin{cases} f(z) + f(x) - f(y) & , \text{ si } z \in T_y \\ f(z) & , \text{ sinon} \end{cases}$$

(rappelons que T_y est le sous-arbre issu de y , la racine de l'arbre T étant x_∞), pour se rendre compte de la contradiction

$$\frac{\mu(g(I - P)(g))}{\mu(g^2)} < \frac{\mu(f(I - P)(f))}{\mu(f^2)}$$

Notons x_1, \dots, x_r les voisins de x_∞ dans l'arbre $T = (V_n, E)$, puis posons $f_i = f \mathbf{1}_{T_{x_i}}$ pour $1 \leq i \leq r$. Du fait de la structure d'arbre et puisque $f(x_\infty) = 0$, on vérifie immédiatement que pour $0 \leq i \neq j \leq r$,

$$\mu(f_i f_j) = 0 \quad \text{et} \quad \mu(f_i P(f_j)) = 0$$

ce qui fait apparaître que

$$\forall 0 \leq i \leq r, \quad \mu(f_i(I - P)(f_i)) = \tilde{\lambda}(P, \mu)\mu(f_i^2)$$

Si $r > 1$, soit $1 \leq i_0 \leq r$ tel que $f_{i_0} \neq 0$, et considérons \mathcal{A} la partition formée de $V_n \setminus T_{x_{i_0}}$ et des singletons de $T_{x_{i_0}}$. Il apparaît alors, en se servant de l'appartenance $f_{i_0, \mathcal{A}} \in H(\mu_{\mathcal{A}})$, que

$$\frac{\tilde{\lambda}(P, \mu)}{I(P, \mu)} \geq \frac{\tilde{\lambda}(P_{\mathcal{A}}, \mu_{\mathcal{A}})}{I(P_{\mathcal{A}}, \mu_{\mathcal{A}})}$$

ce qui d'après l'hypothèse de récurrence se minore encore par $1/l_*(T_{\mathcal{A}}, V_n \setminus T_{x_{i_0}})$ (i.e. le rôle de x_∞ est joué par l'élément $V_n \setminus T_{x_{i_0}}$ dans l'arbre $T_{\mathcal{A}}$ qui se déduit naturellement de T via la partition \mathcal{A}), et il reste à utiliser que $l_*(T_{\mathcal{A}}, V_n \setminus T_{x_{i_0}}) \leq l_*(\bar{T})$ pour se persuader du résultat escompté.

Le cas intéressant correspond donc à $r = 1$: x_∞ admet un unique voisin z_1 . Intéressons-nous maintenant aux voisins de ce point qui sont différents de x_∞ , s'il n'y en a qu'un, appelons le z_2 , et sinon posons $p = 1$. On continue ainsi de suite jusqu'à obtenir z_1, \dots, z_p , où pour chaque $1 \leq i \leq p - 1$, z_i a deux voisins, l'un d'eux étant z_{i+1} , et z_p a au moins trois voisins. Notons f_1 la fonction définie par

$$\forall x \in V_n, \quad f_1(x) = \begin{cases} f(z_p) & , \text{ si } x \in T_{z_p} \\ f(x) & , \text{ sinon} \end{cases}$$

et soit $f_2 = f - f_1$, qui est bien une application positive d'après une remarque précédente.

Il est clair que

$$\begin{aligned} \mu(f_1(I - P)(f_2)) &= \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V_{n+1}} \mu(x)P(x, y)(f_1(y) - f_1(x))(f_2(y) - f_2(x)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

de sorte que

$$\mu(f(I - P)(f)) = \mu(f_1(I - P)(f_1)) + \mu(f_2(I - P)(f_2))$$

Cependant si \mathcal{A}_1 (resp. \mathcal{A}_2) est la partition formée de T_{z_p} et des singletons $\{x_\infty\}, \{z_1\}, \dots, \{z_{p-1}\}$ (resp. de $\{x_\infty, z_1, \dots, z_{p-1}\}$ et des singletons de T_{z_p}), on a

$$\mu(f_1(I - P)(f_1)) = \mu_{\mathcal{A}_1}(f_{1, \mathcal{A}_1}(I - P_{\mathcal{A}_1})(f_{1, \mathcal{A}_1}))$$

$$\mu(f_2(I - P)(f_2)) = \mu_{\mathcal{A}_2}(f_{2, \mathcal{A}_2}(I - P_{\mathcal{A}_2})(f_{2, \mathcal{A}_2}))$$

et on peut alors utiliser l'hypothèse de récurrence (ou (2) si $T_{z_p} = \{z_p\}$), du fait que $f_{1,\mathcal{A}_1} \in H(\mu_{\mathcal{A}_1})$ et $f_{2,\mathcal{A}_2} \in H(\mu_{\mathcal{A}_2})$, pour obtenir

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{A}_1}(f_{1,\mathcal{A}_1}(I - P_{\mathcal{A}_1})(f_{1,\mathcal{A}_1})) &\geq \frac{I(P_{\mathcal{A}_1}, \mu_{\mathcal{A}_1})}{L_1} \mu_{\mathcal{A}_1}(f_{1,\mathcal{A}_1}^2) \\ &\geq \frac{I(P, \mu)}{L_1} \mu(f_1^2) \\ \mu_{\mathcal{A}_2}(f_{2,\mathcal{A}_2}(I - P_{\mathcal{A}_2})(f_{2,\mathcal{A}_2})) &\geq \frac{I(P_{\mathcal{A}_2}, \mu_{\mathcal{A}_2})}{L_2} \mu_{\mathcal{A}_2}(f_{2,\mathcal{A}_2}^2) \\ &\geq \frac{I(P, \mu)}{L_2} \mu(f_2^2) \end{aligned}$$

où $L_1 = p$ et $L_2 = l_*(T_{\mathcal{A}_2}, \{x_\infty, z_1, \dots, z_{p_1}\})$.

Or pour tout $x \in V_n$, on a

$$2f_1(x)f_2(x) \leq \frac{L_2}{L_1} f_1^2(x) + \frac{L_1}{L_2} f_2^2(x)$$

ce qui montre que $(f_1 + f_2)^2 \leq (L_1 + L_2)(f_1^2/L_1 + f_2^2/L_2)$, puis que $\mu(f^2)/(L_1 + L_2) \leq \mu(f_1^2)/L_1 + \mu(f_2^2)/L_2$, et en regroupant les estimées précédentes, on en déduit que

$$\frac{\mu(f(I - P)(f))}{\mu(f^2)} \geq \frac{I(P, \mu)}{L_1 + L_2}$$

On termine la preuve en remarquant que $L_1 + L_2 \leq l_*(\bar{T})$. □

Remarque. (a) On aurait pu dans la démonstration précédente se contenter de poser

$$\forall x \in V_n, \quad f_1(x) = \begin{cases} f(z_1) & , \text{ si } x \in T_{z_1} \\ f(x) & , \text{ sinon} \end{cases}$$

et $f_2 = f - f_1$, ce qui évite de faire appel à (2). Néanmoins nous pensons que dans la pratique, si l'on veut, pour un $(P, \mu) \in \mathcal{R}_n(\bar{T})$ particulier, une meilleure minoration de $\tilde{\lambda}(P, \mu)/I(P, \mu)$ que la borne générale donnée ici, il sera parfois plus avantageux (quand on peut expliciter un $L_1 < p$) de reprendre la preuve avec le f_1 décrit précédemment.

(b) Pour ce qui concerne la proposition 2, il suffit de noter que les arguments développés dans la section précédente font apparaître que pour tout $(P, \mu) \in \mathcal{R}_n$,

$$\frac{\tilde{\lambda}(P, \mu)}{I(P, \mu)} \geq \inf_{1 \leq p \leq n} \inf_{\bar{T} \in \bar{\mathcal{T}}_p(l(P, \mu))} \inf_{(P', \mu') \in \mathcal{R}_p(\bar{T})} \frac{\tilde{\lambda}(P', \mu')}{I(P', \mu')}$$

Nous allons maintenant vérifier que si $G = (V_n, E)$ est un graphe connexe fixé, alors

$$\sup_{(P, \mu) \in \mathcal{R}_n(G)} \frac{I(P, \mu)}{\tilde{\lambda}(P, \mu)} \geq l(G)$$

car ce qui précède prouvant l'inégalité inverse, il en découlera que l'on a en fait une égalité.

Soit $(x_0, \dots, x_{l(G)})$ un G -chemin injectif de longueur maximale. Soit $V' = \{x_0, \dots, x_{l(G)}\}$ que l'on munit de l'ensemble d'arêtes $E' = \{\{x_i, x_{i+1}\} / 0 \leq i \leq l(G) - 1\} \subset E$.

Soit $0 < \epsilon < 1$, on a vu dans [11] que pour tout $i > 0$, il existait un noyau markovien P' sur V' réversible par rapport à une certaine probabilité μ' chargeant tous les points de V' , le couple (P', μ') étant tel que

$$\forall x \neq y \in V', \quad P'(x, y) > 0 \iff \{x, y\} \in E'$$

$$I(P', \mu') < i$$

$$\frac{I(P', \mu')}{\tilde{\lambda}(P', \mu')} \geq l(G) - \epsilon$$

(ceci servait à prouver que (2) est optimal).

Nous allons ci-dessous perturber légèrement (P', μ') pour le transformer en un couple réversible $(P, \mu) \in \mathcal{R}_n(G)$ satisfaisant

$$\frac{I(P, \mu)}{\tilde{\lambda}(P, \mu)} \geq l(G) - 2\epsilon \quad (8)$$

ce qui impliquera bien l'estimation voulue, ϵ étant arbitrairement petit.

Pour ceci, supposons que i a été choisi suffisamment petit, disons $i < 1/n^2$. Soit $0 < \eta < 1/(n - l(G))$, on définit une probabilité μ_η sur V_n en posant

$$\forall x \in V_n, \quad \mu_\eta(x) = \begin{cases} (1 - \eta(n - l(G)))\mu'(x) & , \text{ si } x \in V' \\ \eta & , \text{ sinon} \end{cases}$$

(notamment si $n = l(G)$, c'est-à-dire $V' = V_n$, on a $\mu_\eta = \mu$).

On considère également la matrice P_η donnée par

$$\forall x, y \in V_n, \quad P_\eta(x, y) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x \neq y \text{ et } \{x, y\} \notin E \\ 1/n & , \text{ si } x \notin V' \text{ et } \{x, y\} \in E \\ \eta/(n\mu_\eta(x)) & , \text{ si } x \in V' \text{ et } \{x, y\} \in E \setminus E' \\ (1 - \epsilon)P'(x, y) & , \text{ si } \{x, y\} \in E' \\ 1 - \sum_{z \neq x} P_\eta(x, z) & , \text{ si } x = y \end{cases}$$

qui n'est pas a priori markovienne, car certaines entrées $P_\eta(x, x)$ pour $x \in V'$ peuvent être négatives, mais qui du moins le sera pour η assez petit, disons $0 < \eta < \eta_0$. On vérifie alors que P_η est réversible par rapport à μ_η et que $G(P_\eta, \mu_\eta) = G$ est satisfait.

Il reste à se convaincre que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0_+} I(P_\eta, \mu_\eta) = (1 - \epsilon)I(P', \mu')$$

$$\limsup_{\eta \rightarrow 0_+} \tilde{\lambda}(P_\eta, \mu_\eta) \leq (1 - \epsilon)\tilde{\lambda}(P', \mu')$$

car ceci montre qu'en choisissant $\eta > 0$ assez petit, on obtient un couple (P_η, μ_η) satisfaisant (8).

La seconde inégalité provient du fait que l'application $\tilde{\lambda} : \mathcal{R}_n \rightarrow [0, 1]$ est semi-continue supérieurement, que $\lim_{\eta \rightarrow 0_+} \mu_\eta = \mu'$ et de la convergence de la sous-matrice indexée par $V' \times V'$ de P_η , pour η petit, vers $(1 - \epsilon)P'$. La fonction $I : \mathcal{R}_n \rightarrow [0, 1]$ est également scs., mais ceci est évidemment insuffisant pour prouver la première convergence. Si μ' chargeait tous les points de V_n (i.e. $I(G) = n$) on pourrait conclure, car on sait que I (ou $\tilde{\lambda}$) est continue en les couples $(P, \mu) \in \mathcal{R}_n$ tels que le support de μ soit V_n , mais typiquement ceci n'est pas satisfait. Considérons plutôt une suite d'éléments de $]0, \eta_0[$, $(\eta_p)_{p \geq 1}$, décroissante vers 0 et telle que $I(P_{\eta_p}, \mu_{\eta_p})$ converge.

Pour tout $p \geq 1$, soit $A_p \subset V_n$ tel que $\mu_{\eta_p}(A_p) \leq 1/2$ et $\mu_{\eta_p}(\mathbf{1}_{A_p} P_{\eta_p}(\mathbf{1}_{A_p^c})) = I(P_{\eta_p}, \mu_{\eta_p})\mu_{\eta_p}(A_p)$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que A_p ne dépend pas de p , on le notera alors A . Si on devait avoir $A \cap V' = \emptyset$ (ce qui impose notamment que $n > I(G)$), il apparaîtrait que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} I(P_{\eta_p}, \mu_{\eta_p}) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\eta_p}(\mathbf{1}_{A_p} P_{\eta_p}(\mathbf{1}_{A_p^c}))}{\mu_{\eta_p}(A_p)} \geq \frac{1}{n(n - I(G))} > \frac{1}{n^2}$$

Or si $B \subset V'$ est tel que $\mu'(B) \leq 1/2$ et $\mu'(\mathbf{1}_B P'(\mathbf{1}_{B^c})) = I(P', \mu')\mu'(B)$, on calcule que

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} I(P_{\eta_p}, \mu_{\eta_p}) &\leq \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\eta_p}(\mathbf{1}_B P_{\eta_p}(\mathbf{1}_{B^c}))}{\mu_{\eta_p}(B)} \\ &= (1 - \epsilon) \frac{\mu'(\mathbf{1}_B P'(\mathbf{1}_{B^c}))}{\mu'(B)} = (1 - \epsilon)I(P', \mu') < \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

ce qui fournit une contradiction. Ainsi $A \cap V' \neq \emptyset$ et on constate alors, en notant $A' = A \cap V'$ que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\eta_p}(\mathbf{1}_{A_p} P_{\eta_p}(\mathbf{1}_{A_p^c}))}{\mu_{\eta_p}(A_p)} = (1 - \epsilon) \frac{\mu'(\mathbf{1}_{A'} P'(\mathbf{1}_{A'^c}))}{\mu'(A')} \geq (1 - \epsilon)I(P', \mu')$$

ce qui permet de conclure sans difficulté.

Remarque. (a) En fait on a aussi pour tout graphe connexe G fixé sur V_n ,

$$\sup_{(P, \mu) \in \mathcal{R}_n(G)} \frac{I(P, \mu)}{\lambda(P, \mu)} = l(G) \quad (9)$$

En effet, l'inégalité

$$\sup_{(P, \mu) \in \mathcal{R}_n(G)} \frac{I(P, \mu)}{\lambda(P, \mu)} \leq l(G)$$

découle de la majoration $\tilde{\lambda}(P, \mu) \leq \lambda(P, \mu)$ et du théorème 1, et pour l'inégalité inverse, il suffit de reprendre la preuve ci-dessus, car on a vu dans [11] que l'on pouvait trouver un couple réversible (P', μ') sur V' satisfaisant les conditions précédentes, mais avec $\tilde{\lambda}(P', \mu')$ remplacé par $\lambda(P', \mu')$.

(b) Il est possible de montrer que dès que $n \geq 2$, le supremum dans (9) n'est jamais atteint.

4. Liens avec les méthodes de Poincaré

Nous allons présenter dans cette section une preuve alternative du théorème 1 et de la proposition 2, d'ailleurs un peu plus simple que celle qui précède (!), mais où n'apparaît aucune description de la structure de certains « éléments minimisants », ce qui la rend moins susceptible d'admettre des prolongements, comme ceux que nous donnerons dans la section suivante. Commençons par décrire sommairement l'idée directrice de la démarche, qui est inspirée de la section 3.3 de [14]. Les méthodes de Poincaré sont une technique de minoration du trou spectral ou de la constante isopérimétrique basée sur des considérations de chemins. Nous verrons qu'il en existe une version (utilisant des flots multiples, qui ont été introduits par Diaconis et Stroock [4] puis surtout par Sinclair [17]) qui est optimale pour la constante isopérimétrique, au sens où la minoration est en fait une égalité. Or cette procédure se transpose naturellement pour donner une minoration du trou spectral modifié, et la comparaison entre les deux méthodes fournit immédiatement la proposition 2 (le théorème 1 en découle via les exemples de la fin de la section précédente).

Plus précisément, soient $G = (V_n, E)$ un graphe connexe sur V_n et $(P, \mu) \in \mathcal{R}_n(G)$ fixés. On introduit les notations suivantes : \mathcal{A}_μ et $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ désigneront respectivement les ensembles $\{A \subset V_n / 0 < \mu(A) \leq 1/2\}$ et $\{(A, x) \in \mathcal{A}_\mu \times V_n / x \in A\}$, puis pour $(A, x) \in \hat{\mathcal{A}}_\mu$ donné, soit $\Gamma_{A,x}$ l'ensemble des G -chemins injectifs qui aboutissent en x et dont le seul

point n appartenant pas à A est le point de départ. Les éléments de $\Gamma_{A,x}$ sont parfois appelés des flots allant de A^c à x , et un flot multiple, $\phi_{A,x}$, allant de A^c à x , sera simplement une probabilité sur $\Gamma_{A,x}$. Un flot multiple (global) ϕ consistera en la donnée pour tout $(A, x) \in \hat{\mathcal{A}}_\mu$ d'une telle probabilité $\phi_{A,x}$. On notera Φ leur ensemble. Soit donc $\phi = (\phi_{A,x})_{(A,x) \in \hat{\mathcal{A}}_\mu} \in \Phi$, on lui associe la quantité $B(\phi)$ définie par

$$B(\phi) = \max_{A \in \mathcal{A}_\mu} \max_{e \in E} \frac{1}{m_{P,\mu}(e)} \sum_{x \in A} \mu(x) \sum_{\gamma \in \Gamma_{A,x}, \gamma \ni e} \phi_{A,x}(\gamma)$$

où $m_{P,\mu}(e) = \mu(x)P(x, y)$ si $e = \{x, y\}$, et où l'expression $\gamma \ni e$ signifie que le chemin γ emprunte l'arête (non orientée) e . Avec cette interprétation, un chemin sera aussi vu comme un ensemble particulier d'arête(s) (d'ailleurs si on sait a priori que le chemin est injectif et si on connaît son point de départ, comme ce sera toujours le cas ci-dessous, on peut le reconstruire à partir de l'ensemble d'arêtes non orientées qu'il détermine).

Proposition 6. *On a*

$$I(P, \mu) = \sup_{\phi \in \Phi} \frac{1}{B(\phi)}$$

L'inégalité $I(P, \mu) \geq \sup_{\phi \in \Phi} 1/B(\phi)$ est un exemple de minoration par une méthode de Poincaré (un peu différente de celle suggérée à la suite du théorème 3.3.6 de [14]) et le fait que l'on ait une égalité dit que celle-ci est optimale : la meilleure application possible d'une inégalité $I(P, \mu) \geq 1/B(\phi)$, avec $\phi \in \Phi$, fournit la bonne constante.

Preuve. Soient $A \in \mathcal{A}_\mu$ et $\phi \in \Phi$. Tout d'abord vérifions que

$$\frac{\mu(\mathbf{I}_A P(\mathbf{I}_{A^c}))}{\mu(A)} \geq \frac{1}{B(\phi)} \tag{10}$$

En effet, pour $x \in A$ et $\gamma \in \Gamma_{A,x}$, on a

$$1 = \mathbf{I}_A(x) \leq \sum_{e \in \gamma} |d\mathbf{I}_A(e)|$$

où $|d\mathbf{I}_A(e)| = |\mathbf{I}_A(x') - \mathbf{I}_A(y')|$ si $e = \{x', y'\} \in E$.

Il apparaît ainsi que

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sum_{x \in A} \mathbf{I}_A(x) \mu(x) \\ &\leq \sum_{x \in A} \mu(x) \sum_{\gamma \in \Gamma_{A,x}} \phi_{A,x}(\gamma) \sum_{e \in \gamma} |d\mathbf{I}_A(e)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{e \in E} m_{P, \mu}(e) |d\mathbf{I}_A(e)| \frac{1}{m_{P, \mu}(e)} \sum_{x \in A} \mu(x) \sum_{\gamma \in \Gamma_{A, x}, \gamma \ni e} \phi_{A, x}(\gamma) \\
&\leq B(\phi) \sum_{e \in E} m_{P, \mu}(e) |d\mathbf{I}_A(e)| \\
&= B(\phi) \mu(\mathbf{I}_A P(\mathbf{I}_A^c))
\end{aligned}$$

d'où découle (10). En prenant le minimum en $A \in \mathcal{A}_\mu$, on obtient que

$$I(P, \mu) \geq \frac{1}{B(\phi)}$$

puis en passant au supremum en ϕ , l'inégalité de Poincaré

$$I(P, \mu) \geq \sup_{\phi \in \Phi} \frac{1}{B(\phi)}$$

est démontrée.

Pour la réciproque introduisons de nouvelles notations : si $\phi \in \Phi$, $A \in \mathcal{A}_\mu$ et $e \in E$, on pose

$$g_{\phi, A}(e) = \frac{1}{m_{P, \mu}(e)} \sum_{x \in A} \mu(x) \sum_{\gamma \in \Gamma_{A, x}, \gamma \ni e} \phi_{A, x}(\gamma)$$

puis

$$\mathcal{A}_\mu(\phi) = \{A' \in \mathcal{A}_\mu / \max_{e \in E} g_{\phi, A'}(e) = B(\phi)\}$$

$$E(\phi, A) = \{e' \in E / g_{\phi, A}(e') = \max_{e \in E} g_{\phi, A}(e)\}$$

et enfin

$$N(\phi) = \sum_{A \in \mathcal{A}_\mu(\phi)} \text{card}(E(\phi, A))$$

Par des arguments usuels de compacité et de continuité, on constate que $\inf_{\phi \in \Phi} B(\phi)$ est en fait atteint, et parmi les éléments $\phi \in \Phi$ réalisant ce minimum, considérons-en un dont $N(\phi)$ est minimal. On le notera $\phi^{(0)}$ et soit ensuite $A_0 \in \mathcal{A}_\mu(\phi^{(0)})$. Mais on va plutôt s'intéresser à un autre ensemble $A_1 \subset A_0$ défini de la manière suivante : il s'agit de l'ensemble des points $x_1 \in A_0$ pour lesquels il existe $x_0 \in A_0$, $\gamma_0 \in \Gamma_{A_0, x_0}$ avec $\phi_{A_0, x_0}^{(0)}(\gamma_0) > 0$, et $e_0 \in E(\phi^{(0)}, A_0) \cap \gamma_0$, qui satisfont la propriété suivante : x_1 est un élément de γ_0 qui se trouve après e_0 , comme l'indique schématiquement la figure ci-dessous.

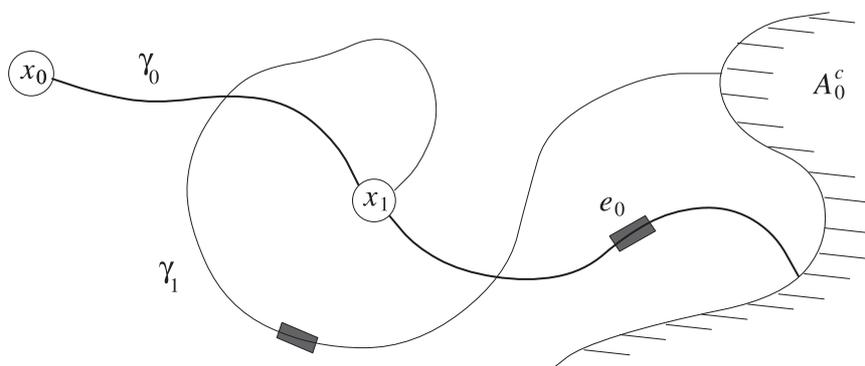


Figure 2 γ_0 et γ_1 sont respectivement représentés par le trait épais et le trait fin, et les rectangles désignent des arêtes de $E(\phi^{(0)}, A_0)$.

Avec ces notations, considérons un autre chemin $\gamma_1 \in \Gamma_{A_0, x_1}$, nous allons prouver par l'absurde que nécessairement $\gamma_1 \cap E(\phi^{(0)}, A_0) \neq \emptyset$ (et ceci sans faire l'hypothèse que $\phi_{A_0, x_1}(\gamma_1) > 0$).

Notons γ'_0 la portion de γ_0 qui va de x_1 à x_0 et γ''_0 celle qui va de A_0^c à x_1 . Quitte à remplacer x_1 par la première intersection de γ_1 avec γ'_0 , on peut supposer que γ_1 et γ'_0 ont x_1 pour seul sommet commun. On désignera alors par $\gamma_2 \in \Gamma_{A_0, x_0}$ la concaténation des chemins γ_1 suivi de γ'_0 .

Pour $0 < t \leq t_0 \stackrel{\text{déf.}}{=} \phi_{A_0, x_0}^{(0)}(\gamma_0)$, on définit $\phi^{(t)} \in \Phi$ en transférant de la masse donnée par $\phi^{(0)}$ à γ_0 vers γ_2 de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{A}_\mu \setminus \{A_0\}, \forall x \in A, \quad \phi_{A,x}^{(t)} &= \phi_{A,x}^{(0)} \\ \forall x \in A_0 \setminus \{x_0\}, \quad \phi_{A_0,x}^{(t)} &= \phi_{A_0,x}^{(0)} \\ \forall \gamma \in \Gamma_{A_0, x_0}, \quad \phi_{A_0, x_0}^{(t)}(\gamma) &= \begin{cases} \phi_{A_0, x_0}^{(0)}(\gamma_0) - t & , \text{ si } \gamma = \gamma_0 \\ \phi_{A_0, x_0}^{(0)}(\gamma_1) + t & , \text{ si } \gamma = \gamma_2 \\ \phi_{A_0, x_0}^{(0)}(\gamma) & , \text{ sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

On calcule que pour tout $A \in \mathcal{A}_\mu$ et tout $e \in E$,

$$\begin{aligned} g_{\phi^{(t)}, A}(e) &= \begin{cases} g_{\phi^{(0)}, A_0}(e) - t\mu(x_0)/m_{P,\mu}(e), & \text{ si } A = A_0 \text{ et } e \in \gamma_0 \setminus \gamma_2 (= \gamma''_0 \setminus \gamma_1 \subset \gamma''_0) \\ g_{\phi^{(0)}, A_0}(e) + t\mu(x_0)/m_{P,\mu}(e), & \text{ si } A = A_0 \text{ et } e \in \gamma_2 \setminus \gamma_0 (= \gamma_1 \setminus \gamma''_0 \subset \gamma_1) \\ g_{\phi^{(0)}, A}(e), & \text{ sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Par l'hypothèse à contredire que $\gamma_1 \cap E(\phi^{(0)}, A_0) = \emptyset$, il est clair que pour $t > 0$ assez petit, disons $0 < t \leq t_1 \leq t_0$,

$$\forall e \in \gamma_1, \quad g_{\phi^{(t)}, A_0}(e) < g_{\phi^{(t)}, A_0}(e_0) < g_{\phi^{(0)}, A_0}(e_0) = B(\phi^{(0)})$$

ce qui implique notamment que

$$\max_{e \in E} g_{\phi^{(t)}, A_0}(e) \leq \max_{e \in E} g_{\phi^{(0)}, A_0}(e)$$

et pour $A \in \mathcal{A}_\mu \setminus \{A_0\}$,

$$\max_{e \in E} g_{\phi^{(t)}, A}(e) = \max_{e \in E} g_{\phi^{(0)}, A}(e)$$

Considérons les deux situations qui peuvent apparaître : tout d'abord si $\mathcal{A}_\mu(\phi^{(0)}) = \{A_0\}$, alors pour $t > 0$ suffisamment petit, on a aussi $\mathcal{A}_\mu(\phi^{(t)}) = \{A_0\}$, ce qui admet pour conséquence que

$$\max_{e \in E} g_{\phi^{(t)}, A_0}(e) = \max_{e \in E} g_{\phi^{(0)}, A_0}(e)$$

(sinon $B(\phi^{(t)}) < B(\phi^{(0)})$) et ainsi $\phi^{(t)}$ minimise également B . Mais on aura aussi pour $0 < t \leq t_1$, $N(\phi^{(t)}) < N(\phi^{(0)})$, car on a enlevé e_0 de $E(\phi^{(t)}, A_0)$ sans rajouter d'autres arêtes, ce qui est en contradiction avec le choix de $\phi^{(0)}$.

Supposons maintenant que $\mathcal{A}_\mu(\phi^{(0)}) \neq \{A_0\}$, ce qui nous assure que pour $0 < t \leq t_1$, $B(\phi^{(t)}) = B(\phi^{(0)})$, c'est-à-dire que $\phi^{(t)}$ est aussi un minima global pour B . Cependant on a $N(\phi^{(t)}) < N(\phi^{(0)})$ pour $0 < t \leq t_1$, car soit $A_0 \notin \mathcal{A}_\mu(\phi^{(t)})$ et on a donc retiré $\text{card}(E(\phi^{(0)}, A_0)) \geq 1$ de la sommation dans $N(\phi^{(t)})$, soit comme précédemment, on a au moins enlevé e_0 de $E(\phi^{(t)}, A_0)$.

Ainsi on se rend compte que l'on a toujours $\gamma_1 \cap E(\phi^{(0)}, A_0) \neq \emptyset$.

Un premier intérêt de cette partie A_1 est que pour tout $e \in \partial A_1$ (qui ici est l'ensemble des arêtes $\{x, y\} \in E$ avec $x \in A_1$ et $y \notin A_1$), on a $e \in E(\phi^{(0)}, A_0)$. En effet, soit $e = \{x, y\} \in \partial A_1$, avec disons $x \in A_1$ et $y \notin A_1$. Si $y \in A_0$, pour tout $\gamma \in \Gamma_{A_0, y}$ avec $\phi_{A_0, y}^{(0)}(\gamma) > 0$, on a $\gamma \cap E(\phi^{(0)}, A_0) = \emptyset$, sinon on aurait $y \in A_1$. Or en considérant $\gamma' = \gamma \sqcup \{e\} \in \Gamma_{A_0, x}$, on a nécessairement $\gamma' \cap E(\phi^{(0)}, A_0) \neq \emptyset$, d'où $e \in E(\phi^{(0)}, A_0)$. On conclut de la même manière si $y \in A_0^c$, en prenant $\gamma' = \{e\} \in \Gamma_{A_0, x}$.

Une autre particularité de A_1 est que si $x \in A_0$ et $\gamma \in \Gamma_{A_0, x}$ sont tels que $\phi_{A_0, x}^{(0)}(\gamma) > 0$ et qu'il existe $e_0 \in \gamma \cap E(\phi^{(0)}, A_0)$, alors $x \in A_1$ et $\gamma \cap \partial A_1$ est réduit à un singleton, car tous les sommets qui se trouvent après la première arête appartenant à $E(\phi^{(0)}, A_0)$ sont dans A_1 .

En reprenant la première partie de la preuve et en tenant compte de ces remarques, on se convainc alors que

$$\frac{\mu(\mathbf{I}_{A_1} P(\mathbf{I}_{A_1^c}))}{\mu(A_1)} = \frac{1}{B(\phi^{(0)})}$$

(on aura noté que $A_1 \in \mathcal{A}_\mu$, car μ charge tous les points de V_n).

En effet, pour $x \in A_1$ et $\gamma \in \Gamma_{A_0,x}$ tel que $\phi_{A_0,x}^{(0)}(\gamma) > 0$, d'après ce qui précède,

$$\mathbf{I}_{A_1}(x) = \sum_{e \in \gamma} |d\mathbf{I}_{A_1}(e)|$$

(un seul terme de cette somme étant non nul), d'où

$$\mathbf{I}_{A_1}(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{A_0,x}} \phi_{A_0,x}^{(0)}(\gamma) \sum_{e \in \gamma} |d\mathbf{I}_{A_1}(e)|$$

puis

$$\begin{aligned} \mu(A_1) &= \sum_{x \in A_1} \mu(x) \sum_{\gamma \in \Gamma_{A_0,x}} \phi_{A_0,x}^{(0)}(\gamma) \sum_{e \in \gamma \cap \partial A_1} 1 \\ &= \sum_{e \in \partial A_1} m_{P,\mu}(e) \frac{1}{m_{P,\mu}(e)} \sum_{x \in A_1} \mu(x) \sum_{\gamma \in \Gamma_{A_0,x}, \gamma \ni e} \phi_{A_0,x}^{(0)}(\gamma) \\ &= \sum_{e \in \partial A_1} m_{P,\mu}(e) \frac{1}{m_{P,\mu}(e)} \sum_{x \in A_0} \mu(x) \sum_{\gamma \in \Gamma_{A_0,x}, \gamma \ni e} \phi_{A_0,x}^{(0)}(\gamma) \\ &= \sum_{e \in \partial A_1} m_{P,\mu}(e) B(\phi^{(0)}) \\ &= \min_{\phi \in \Phi} B(\phi) \mu(\mathbf{I}_{A_1} P(\mathbf{I}_{A_1^c})) \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure (et en fin de compte on pourrait remplacer le supremum par un maximum dans cette proposition). \square

Comme annoncé, la méthode ci-dessus s'adapte sans difficulté pour donner une minoration du trou spectral modifié. En reprenant les notations précédentes, on note pour $\phi = (\phi_{A,x})_{(A,x) \in \hat{\mathcal{A}}_\mu} \in \Phi$,

$$C(\phi) = \max_{A \in \mathcal{A}_\mu} \max_{e \in E} \frac{1}{m_{P,\mu}(e)} \sum_{x \in A} \mu(x) \sum_{\gamma \in \Gamma_{A,x}, \gamma \ni e} |\gamma| \phi_{A,x}(\gamma)$$

où $|\gamma|$ désigne la longueur du chemin γ .

Proposition 7. *On a*

$$\tilde{\lambda}(P, \mu) \geq \max_{\phi \in \Phi} \frac{1}{C(\phi)}$$

Preuve. La démonstration est traditionnelle : soient $f \in H(\mu)$ et $\phi \in \Phi$, il faut voir que

$$\frac{\mu(f(\text{Id} - P)(f))}{\mu(f^2)} \geq \frac{1}{C(\phi)}$$

Soit $A = \{f > 0\} \in \mathcal{A}_\mu$, puisque f s'annule sur A^c , on obtient pour $x \in A$ et $\gamma \in \Gamma_{A,x}$, par une application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$f^2(x) \leq |\gamma| \sum_{e \in \gamma} (df)^2(e)$$

où on a évidemment posé $(df)^2(e) = (f(y') - f(x'))^2$ si $e = \{x', y'\}$.

Il reste alors à écrire que

$$\begin{aligned} \mu(f^2) &= \sum_{x \in A} f^2(x) \mu(x) \\ &\leq \sum_{x \in A} \mu(x) \sum_{\gamma \in \Gamma_{A,x}} |\gamma| \phi_{A,x}(\gamma) \sum_{e \in \gamma} (df)^2(e) \\ &= \sum_{e \in E} m_{P,\mu}(e) (df)^2(e) \frac{1}{m_{P,\mu}(e)} \sum_{x \in A} \mu(x) \sum_{\gamma \in \Gamma_{A,x}, \gamma \ni e} |\gamma| \phi_{A,x}(\gamma) \\ &\leq C(\phi) \sum_{e \in E} m_{P,\mu}(e) (df)^2(e) \\ &= C(\phi) \mu(f(\text{Id} - P)(f)) \end{aligned}$$

pour démontrer l'inégalité de Poincaré énoncée dans la proposition. \square

Pour se persuader que la proposition 2 est satisfaite, il suffit de noter que pour $A \in \mathcal{A}_\mu$, $x \in A$ et $\gamma \in \Gamma_{A,x}$, $|\gamma| \leq l(P, \mu)$, ce qui implique que pour $\phi \in \Phi$, $C(\phi) \leq l(P, \mu) B(\phi)$.

Remarque. Tout naturellement on se demande si l'on a une égalité dans la proposition 7, mais nous pensons que du moins sous cette forme, ceci est faux. On peut cependant introduire des poids : pour chaque $A \in \mathcal{A}_\mu$, $x \in A$ et $\gamma \in \Gamma_{A,x}$, soit $\omega_{A,x,\gamma}$ une fonction strictement positive sur γ , vu comme un ensemble d'arêtes. On a alors évidemment

$$f^2(x) \leq \omega(A, x, \gamma) \sum_{e \in \gamma} \frac{1}{\omega_{A,x,\gamma}(e)} (df)^2(e)$$

où

$$\omega(A, x, \gamma) = \sum_{e \in \gamma} \omega_{A,x,\gamma}(e)$$

ce qui nous amène à introduire Ω l'ensemble des $\omega = (\omega_{A,x,\gamma})_{(A,x) \in \mathcal{A}_\mu, \gamma \in \Gamma_{A,x}}$, chacun des $\omega_{A,x,\gamma}$ étant comme ci-dessus (bien qu'en fait il suffirait de considérer ceux qui sont des probabilités chargeant toutes les arêtes de γ), puis à poser pour $\phi \in \Phi$ et $\omega \in \Omega$,

$$\tilde{C}(\phi, \omega) = \max_{A \in \mathcal{A}_\mu} \max_{e \in E} \frac{1}{m_{P,\mu}(e)} \sum_{x \in A} \mu(x) \sum_{\gamma \in \Gamma_{A,x}, \gamma \ni e} \frac{\omega(A, x, \gamma)}{\omega_{A,x,\gamma}(e)} \phi_{A,x}(\gamma)$$

car on a encore

$$\tilde{\lambda}(P, \mu) \geq \max_{\phi \in \Phi, \omega \in \Omega} \frac{1}{\tilde{C}(\phi, \omega)}$$

On conjecture qu'ici la liberté de choix de ϕ et de ω doit être suffisante pour nous assurer de l'égalité.

Par contre, dans un contexte légèrement différent (minoration du vrai trou spectral et les $\Gamma_{A,x}$ sont remplacés par les $\Gamma_{x,y}$, pour $x \neq y \in V_n$, $\Gamma_{x,y}$ étant l'ensemble des chemins allant de x à y dans G), Kahale [7] a montré que si on ne considère que les poids ω qui sont tels que $\omega_{A,x,\gamma}(e)$ ne dépend en fait que de l'arête e (orientée ici) et non pas du chemin γ , alors on peut ne pas avoir égalité, mais au pire le quotient du trou spectral par la minoration obtenue est de l'ordre de $\ln^2(n)$ pour n grand (et cet ordre est optimal, comme cet auteur l'a vérifié sur les « expanders graphs »). C'est ce résultat qui suggère que l'on n'a peut être pas égalité dans la proposition 7. Il faut toutefois être prudent, car ces mêmes contre-exemples permettent de voir qu'on ne peut pas en général avoir égalité dans la proposition 6 si les ensembles $A \in \mathcal{A}_\mu$ sont remplacés par des points $y \in V_n$ (voir la discussion et les références données dans la dernière section de l'article de Sinclair [17]), il semblerait donc que l'introduction des ensembles précédents ne soit pas innocente.

D'autre part, on aura remarqué que les poids ne permettent pas d'améliorer la proposition 2, car si $\Omega_{A,x,\gamma}$ est l'ensemble des probabilités $\omega_{A,x,\gamma}$ chargeant toutes les arêtes de $\gamma \in \Gamma_{A,x}$, alors

$$\min_{\omega_{A,x,\gamma} \in \Omega_{A,x,\gamma}} \max_{e \in \gamma} \frac{1}{\omega_{A,x,\gamma}(e)}$$

est atteint uniquement en la probabilité équilibrée sur γ et vaut donc $|\gamma|$.

Par ailleurs, précisons que les méthodes de Poincaré introduites dans cette section sont inutiles pratiquement pour évaluer par exemple $I(P, \mu)$, car elles sont plus compliquées que le calcul direct, elles n'ont d'intérêt que comme intermédiaires dans la preuve de la proposition 2, et éventuellement dans une compréhension théorique de l'optimalité des méthodes de Poincaré.

5. Et si la probabilité μ est aussi fixée ?

Nous allons ici étudier la minoration optimale de la fraction $\tilde{\lambda}(P, \mu)/I(P, \mu)$ pour $(P, \mu) \in \mathcal{R}_n$, quand à la fois le graphe sous-jacent $G(P, \mu)$ et la probabilité μ sont fixés. Les résultats que nous obtenons ne seront qu'à moitié explicites, car ils feront intervenir des quantités difficilement manipulables. Mais ils pourront parfois conduire à des estimations intéressantes. Dans une première partie on considèrera les arbres pointés et certaines inégalités de Hardy avec poids sur ceux-ci, puis grâce à la section 2 et à l'introduction d'une nouvelle modification du trou spectral, on en déduira des résultats sur le cas général. On traitera les cas correspondant au graphe complet, puis on terminera en donnant des estimées pour des perturbations d'arbres pointés infinis et réguliers, munies de probabilités admettant des décroissances exponentielles avec la hauteur.

Soit $T = (V_n, E, x_\infty)$ un arbre pointé, avec $n \geq 1$, et μ une probabilité chargeant tous les points de V_n pour laquelle $\mu(x_\infty) \geq 1/2$.

Pour chaque $x \in V_n^* \stackrel{\text{déf.}}{=} V_n \setminus \{x_\infty\}$, notons comme d'habitude $p(x)$ le père de x et T_x le sous-arbre enraciné en x des descendants de x . Pour $I > 0$, on considère la matrice P_I définie par

$$\forall x, y \in V_n, P_I(x, y) = \begin{cases} I\mu(T_x)/\mu(x) & , \text{ si } y = p(x) \\ I\mu(T_y)/\mu(p(y)) & , \text{ si } x = p(y) \\ 0 & , \text{ si } x \neq y \text{ et } \{x, y\} \notin E \\ 1 - \sum_{z \neq x} P_I(x, z) & , \text{ si } x = y \end{cases} \quad (11)$$

Il est clair que pour I assez petit, disons $0 < I \leq I_0$, P_I sera markovienne et réversible par rapport à μ . De plus $\tilde{\lambda}(P_I, \mu)/I(P_I, \mu) = \tilde{\lambda}(P, \mu)/I$ ne dépend pas de $0 < I \leq I_0$, et on notera donc $L(T, \mu)$ cette constante, qui vaut

$$L(T, \mu) = \inf_{f \in \tilde{H}(x_\infty) \setminus \{0\}} \frac{\sum_{e \in E} \mu(T_e)(df)^2(e)}{\mu(f^2)} \quad (12)$$

où on a noté $\tilde{H}(x_\infty) \subset H(\mu)$ l'ensemble des fonctions positives s'annulant en x_∞ et où on a convenu que $T_e = T_x$, si $e = \{x, p(x)\}$ avec $x \in V_n^*$. En fait $L(T, \mu)$ ne dépend que de la restriction de μ à V_n^* et on peut multiplier cette dernière restriction par une constante strictement positive sans changer la valeur de $L(T, \mu)$ (du moins tant que la condition $\mu(x_\infty) \geq 1/2$ reste satisfaite).

L'intérêt de cette quantité est que d'après la remarque qui suit la preuve de la proposition 3,

$$\min_{P \in \mathcal{R}_n(T, \mu)} \frac{\tilde{\lambda}(P, \mu)}{I(P, \mu)} = L(T, \mu)$$

où $\mathcal{R}_n(T, \mu)$ est l'ensemble des noyaux markoviens P tels que $(P, \mu) \in \mathcal{R}_n(T)$, avec les notations de la fin de la section 2.

A une constante multiplicative 16 près, on peut estimer ce nombre $L(T, \mu)$ grâce aux inégalités de Hardy avec poids sur les arbres discrets (cf. l'appendice, où on les déduit des inégalités de Hardy avec poids sur les arbres continus obtenues par Evans, Harris et Pick dans [5]).

Plus précisément, soit $\tilde{\mathcal{K}}$ l'ensemble des sous-arbres de T qui n'admettent pas x_∞ comme sommet et qui sont tels que si $x \in V_n^*$ et l'un de ses fils en sont des sommets, alors tous les fils de x en sont des sommets. On construit une fonction v_μ sur $\tilde{\mathcal{K}}$ par l'algorithme suivant : soit $K \in \tilde{\mathcal{K}}$, et notons $x_0 \in V_n^*$ sa racine.

- Si K est réduit au singleton $\{x_0\}$, alors

$$v_\mu(K) = \mu(T_{x_0})$$

- Sinon, on pose

$$\frac{1}{v_\mu(K)} = \frac{1}{\mu(T_{x_0})} + \frac{1}{\sum_{x \in G(x_0)} v_\mu(K_x)}$$

où on a noté $G(x_0)$ l'ensemble des fils de x_0 , et où $K_x \neq \emptyset$ est le sous-arbre des descendants de x (lui-même inclus) dans K .

Posons ensuite \mathcal{K} l'ensemble des $K \in \tilde{\mathcal{K}}$ dont la racine est l'un des fils de x_∞ . Pour un tel K , on note K' l'ensemble des descendants des feuilles de K (elles-même comprises), puis on pose

$$\hat{L}(T, \mu) = \inf_{K \in \mathcal{K}} \frac{v_\mu(K)}{\mu(K')}$$

Les inégalités de Hardy (du moins celles concernant les espaces \mathbb{L}^2) s'énoncent alors par l'encadrement

$$\frac{1}{16} \hat{L}(T, \mu) \leq L(T, \mu) \leq \hat{L}(T, \mu)$$

Si T est un segment pointé en l'une de ses extrémités, par exemple si

$$E = \{\{i, i + 1\}; 0 \leq i < n\}$$

et si $x_\infty = 0$, il apparaît que

$$\frac{1}{\hat{L}(T, \mu)} = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq i} \frac{1}{\mu(\{j, j+1, \dots, n\})} \mu(\{i, i+1, \dots, n\}) \quad (13)$$

Il existe une autre méthode permettant parfois d'évaluer la constante $L(T, \mu)$: soit \preceq l'ordre naturel sur l'arbre pointé T , qui est défini par $x \preceq y$, pour $x, y \in V_n$, si et seulement si x est situé sur le chemin injectif conduisant de y à x_∞ . Les arguments présentés dans la section 3 permettent de se rendre compte qu'il suffit dans l'infimum qui définit $L(T, \mu)$ ci-dessus de considérer les fonctions $f \in \tilde{H}(x_\infty) \setminus \{0\}$ qui sont croissantes pour cet ordre. Associons à une telle fonction f l'application $g : V_n^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in V_n^*, \quad g(x) = \frac{f(x) - f(p(x))}{\sqrt{\mu(T_x)}}$$

ce qui permet de réécrire

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E} \mu(T_e) (df)^2(e) &= \sum_{x \in V_n^*} g^2(x) \\ \mu(f^2) &= \sum_{y \in V_n^*} g^2(y) + 2 \sum_{y, z \in V_n^*, y \prec z} g(y)g(z) \sqrt{\frac{\mu(T_z)}{\mu(T_y)}} \end{aligned}$$

Ainsi il apparaît que

$$L(T, \mu) = \frac{1}{1 + \Lambda(T, \mu)}$$

où $\Lambda(T, \mu)$ est la plus grande valeur propre (dite de Perron-Frobenius) de la matrice symétrique positive $Q = (Q(x, y))_{x, y \in V_n^*}$ donnée par

$$\forall x, y \in V_n^*, \quad Q(x, y) = \begin{cases} \sqrt{\mu(T_{x \vee y}) / \mu(T_{x \wedge y})} & , \text{ si } x \prec y \text{ ou } y \prec x \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases}$$

(les notions \prec, \vee et \wedge sont évidemment relatives à l'ordre de T introduit ci-dessus). On peut alors utiliser la théorie des matrices positives (voir par exemple [16]) pour essayer d'évaluer $\Lambda(T, \mu)$, ainsi on sait que

$$\begin{aligned} \Lambda(T, \mu) &= \max_{g \in \mathcal{F}_+(V_n^*)} \min_{x \in V_n^*} \frac{\sum_{y \in V_n^*} Q(x, y)g(y)}{g(x)} \\ &= \min_{g \in \mathcal{F}_+(V_n^*)} \max_{x \in V_n^*} \frac{\sum_{y \in V_n^*} Q(x, y)g(y)}{g(x)} \end{aligned}$$

où $\mathcal{F}_+(V_n^*)$ est l'ensemble des fonctions strictement positives sur V_n^* , et donc notamment pour tout bon choix de $g \in \mathcal{F}_+(V_n^*)$,

$$\min_{x \in V_n^*} \frac{1}{g(x)} \sum_{y \in V_n^*} Q(x, y)g(y) \leq \Lambda(T, \mu) \leq \max_{x \in V_n^*} \frac{1}{g(x)} \sum_{y \in V_n^*} Q(x, y)g(y) \tag{14}$$

Revenons au cas général où G est un graphe connexe sur V_n et où μ est une probabilité sur V_n en chargeant tous les points.

Soit $A \subset V_n$ tel que $\mu(A) \geq 1/2$, on note V_A l'ensemble formé de A et de tous les éléments de A^c . A partir de G , on construit comme d'habitude un graphe $G_A = (V_A, E_A)$ sur V_A . Soit \bar{T} un arbre pointé en A sur V_A dont l'ensemble des arêtes est inclus dans E_A . Appelons également $\bar{\mu}$ la probabilité sur V_A définie par

$$\forall x \in V_A, \quad \bar{\mu}(x) = \begin{cases} \mu(A) & , \text{ si } x = A \\ \mu(x) & , \text{ sinon} \end{cases}$$

On considère $\bar{\mathcal{T}}(G, \mu)$ l'ensemble des couples $(\bar{T}, \bar{\mu})$ qui s'obtiennent de cette manière.

Alors d'après la remarque qui suit la preuve de la proposition 3, on a

$$\inf_{P \in \mathcal{R}_n(G, \mu)} \frac{\tilde{\lambda}(P, \mu)}{I(P, \mu)} \geq \inf_{(\bar{T}, \bar{\mu}) \in \bar{\mathcal{T}}(G, \mu)} L(\bar{T}, \bar{\mu})$$

où rappelons que $\mathcal{R}_n(G, \mu)$ est l'ensemble des noyaux markoviens sur V_n qui sont réversibles par rapport à μ et tels que $G(P, \mu) = G$.

Cependant, la quantité

$$\inf_{(\bar{T}, \bar{\mu}) \in \bar{\mathcal{T}}(G, \mu)} L(\bar{T}, \bar{\mu})$$

n'est pas en général une très bonne estimée pour

$$\inf_{P \in \mathcal{R}_n(G, \mu)} \frac{\tilde{\lambda}(P, \mu)}{I(P, \mu)}$$

sauf par exemple dans le cas où $G = G_n$, le graphe complet sur V_n , comme nous le verrons ultérieurement. Un premier pas dans la direction de cette affirmation est de remarquer que $\inf_{(\bar{T}, \bar{\mu}) \in \bar{\mathcal{T}}(G, \mu)} L(\bar{T}, \bar{\mu})$ est toujours de l'ordre de $l^{-1}(G, \mu)$, où $l(G, \mu)$ correspond à l'expression que l'on avait désigné par $l(P, \mu)$ avant la proposition 2, car il est clair que ce terme ne dépend pas du choix du noyau markovien P qui satisfait $G(P, \mu) = G$.

Proposition 8. *Soient G un graphe connexe sur V_n et μ une probabilité chargeant tous les points, on a l'encadrement*

$$\frac{1}{l(G, \mu)} \leq \inf_{(\bar{T}, \bar{\mu}) \in \bar{\mathcal{T}}(G, \mu)} L(\bar{T}, \bar{\mu}) \leq \frac{4}{l(G, \mu) - 1}$$

Si dans la démonstration ci-dessous on avait plutôt utilisé des estimées de la forme (14), on aurait pu améliorer légèrement la constante 4 ci-dessus en $2\sqrt{2}$.

Preuve. On reprend donc les notations qui précèdent la proposition 2, en remplaçant toutefois $l_{G(P,\mu)}$ par l_G . Soit $A \in B(\mu)$ tel que $l_G(A) = l(G, \mu)$, puis construisons un arbre pointé \bar{T} sur V_A en A tel que $l_*(\bar{T}) = l(G, \mu)$, ce qui est bien possible d'après les diverses définitions qui interviennent. Considérons ensuite $A = z_0, z_1, \dots, z_p$ un \bar{T} -chemin injectif de longueur $p = l_*(\bar{T})$ issu de A , puis notons $\hat{A}_1 = V_n \setminus \{z_1, \dots, z_p\}$ et $\hat{A}_2 = V_n \setminus \{z_1, \dots, z_{p-1}\}$. On en déduit deux arbres pointés

$$\hat{T}^{(1)} = (\{\hat{A}_1, z_1, \dots, z_p\}, \hat{E}^{(1)}, \hat{A}_1)$$

$$\hat{T}^{(2)} = (\{\hat{A}_2, z_1, \dots, z_{p-1}\}, \hat{E}^{(2)}, \hat{A}_2)$$

où $\hat{E}^{(1)}$ (resp. $\hat{E}^{(2)}$) est l'ensemble d'arêtes $\{\{\hat{A}_1, z_1\}, \{z_1, z_2\}, \dots, \{z_{p-1}, z_p\}\}$ (resp. $\{\{z_1, z_2\}, \dots, \{z_{p-1}, z_{p-2}\}, \{z_{p-1}, \hat{A}_2\}\}$). On a donc à faire à deux segments pointés en l'une de leurs extrémités. On notera $\hat{\mu}^{(i)}$ la probabilité sur $\{\hat{A}_i, z_1, \dots, z_{p+1-i}\}$ qui se déduit naturellement de μ , pour $i = 1, 2$.

Pour obtenir la majoration de la proposition, il suffit de montrer que

$$\hat{L}(\hat{T}^{(1)}, \hat{\mu}^{(1)}) \wedge \hat{L}(\hat{T}^{(2)}, \hat{\mu}^{(2)}) \leq \frac{2}{1 + \lfloor (p-1)/2 \rfloor} \leq \frac{4}{p-1} \quad (15)$$

et pour cela supposons par exemple que

$$\mu(\{z_{\lfloor (p-1)/2 \rfloor + 1}, \dots, z_p\}) \geq \frac{\mu(\{z_1, \dots, z_p\})}{2}$$

l'autre cas, $\mu(\{z_1, \dots, z_{\lfloor (p-1)/2 \rfloor}\}) \geq \mu(\{z_1, \dots, z_p\})/2 \geq \mu(\{z_1, \dots, z_{p-1}\})/2$, se traitant de manière symétrique, en considérant plutôt ci-dessous le segment $\hat{T}^{(2)}$.

Appliquons la formule (13) au segment $\hat{T}^{(1)}$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\hat{L}(\hat{T}^{(1)}, \hat{\mu}^{(1)})} \\ & \geq \sum_{1 \leq j \leq 1 + \lfloor (p-1)/2 \rfloor} \frac{1}{\mu(\{z_j, z_{j+1}, \dots, z_p\})} \mu(\{z_{1 + \lfloor (p-1)/2 \rfloor}, z_{2 + \lfloor (p-1)/2 \rfloor}, \dots, z_p\}) \\ & \geq (1 + \lfloor (p-1)/2 \rfloor) \frac{\mu(\{z_{1 + \lfloor (p-1)/2 \rfloor}, z_{2 + \lfloor (p-1)/2 \rfloor}, \dots, z_p\})}{\mu(\{z_1, z_2, \dots, z_p\})} \\ & \geq (1 + \lfloor (p-1)/2 \rfloor)/2 \end{aligned}$$

et on en déduit l'inégalité (15).

Ceci termine la démonstration de la proposition, car la minoration découle immédiatement de la proposition 5. \square

Les considérations ci-dessus suggèrent que la liberté de choix de A est trop grande. Pour palier à cet inconvénient, on introduit une nouvelle quantité qui ressemble à s y méprendre au trou spectral modifié : soit $\hat{H}(P, \mu)$ l'ensemble des fonctions qui sont telles que $\{f = 0\}$ contienne une composante $G(P, \mu)$ -connexe de masse supérieure ou égale à $1/2$ (on a donc $\hat{H}(P, \mu) \subset H(\mu)$), puis on pose

$$\hat{\lambda}(P, \mu) = \inf_{f \in \hat{H}(P, \mu) \setminus \{0\}} \frac{\mu(f(\text{Id} - P)(f))}{\mu(f^2)}$$

Vérifions tout d'abord que $\lambda(P, \mu)$ et $\hat{\lambda}(P, \mu)$ sont du même ordre, ce qui montre que l'on aurait pu remplacer dès le début $\tilde{\lambda}(P, \mu)$ par $\hat{\lambda}(P, \mu)$.

Proposition 9. *Pour tout couple $(P, \mu) \in \mathcal{R}_n$, avec $n \geq 1$ et μ chargeant tous les points, on a*

$$\hat{\lambda}(P, \mu) \leq \lambda(P, \mu) \leq 2\hat{\lambda}(P, \mu)$$

Preuve. Soit $f \in \mathbb{L}^2(\mu) \setminus \{0\}$ telle que $\mu(f) = 0$, où est atteint l'infimum définissant $\lambda(P, \mu)$, une telle fonction existant bien dès que μ n'est pas une masse de Dirac.

Pour tout $t \geq \min_{V_n} f$, appelons $A_t = \{f > t\}$, que l'on décompose en ses parties connexes (sous-entendu relativement au graphe $G(P, \mu)$), disons $A_t^{(1)}, \dots, A_t^{(n_t)}$. Pour $t \geq \min_{V_n} f$ et $1 \leq i \leq n_t$ fixés, on note $B_t^{(i,1)}, \dots, B_t^{(i,n_{t,i})}$ les $n_{t,i}$ composantes connexes de $V_n \setminus A_t^{(i)}$. Il existe alors au plus un indice $1 \leq i \leq n_t$ qui soit tel que

$$\forall 1 \leq j \leq n_{t,i}, \quad \mu(B_t^{(i,j)}) < 1/2 \tag{16}$$

En effet, soit $1 \leq i_0 \leq n_t$ un tel indice, pour tout $i \neq i_0, 1 \leq i \leq n_t, A_t^{(i)}$ est inclus dans un $B_t^{(i_0,j)}$ pour un certain $1 \leq j \leq n_{t,i_0}$. Ceci montre que l'un des $B_t^{(i,j')}$, avec $1 \leq j' \leq n_{t,i}$, contient $V_n \setminus B_t^{(i_0,j)}$, qui admet un poids relatif à μ supérieur ou égal à $1/2$ et qui est connexe (faire un dessin).

Soit t_0 le supremum des $t \geq \min_{V_n} f$ tels qu'il existe un indice $1 \leq i \leq n_t$ satisfaisant (16), et s'il n'existe jamais de tel indice, on pose $t_0 = \min_{V_n} f$.

Il apparaît immédiatement que pour tout $\min_{V_n} f \leq t < t_0$, (16) est satisfait, et si on convient, à un réindication près que l'indice où (16) est vérifié n'est autre que 1, alors $(A_t^{(1)})_{\min_{V_n} f \leq t < t_0}$ est une famille décroissante d'ensembles. De plus on se convainc sans difficulté qu'il existe un point $x_0 \in V_n$ tel que $f(x_0) = t_0$ et que pour $t \geq t_0$, (16) n'est plus satisfait.

Si $t_0 > \min_{V_n} f$, notons $\tilde{A}_{t_0} = \{f < t_0\}$ que l'on décompose de façon analogue en ses parties connexes $\tilde{A}_{t_0}^{(1)}, \dots, \tilde{A}_{t_0}^{(\tilde{n}_{t_0})}$, puis pour chaque $1 \leq i \leq \tilde{n}_{t_0}$, soient $\tilde{B}_{t_0}^{(i,1)}, \dots, \tilde{B}_{t_0}^{(i,\tilde{n}_{t_0,i})}$ les $\tilde{n}_{t_0,i}$ composantes connexes de $V_n \setminus \tilde{A}_{t_0}^{(i)}$. Constatons que pour tout $1 \leq i \leq \tilde{n}_{t_0}$, il existe un indice $1 \leq j_0 \leq \tilde{n}_{t_0,i}$ tel que

$$\mu(\tilde{B}_{t_0}^{(i,j_0)}) \geq 1/2$$

En effet, posons $t_1 = \max\{f(x)/f(x) < t_0\}$, de sorte que $\tilde{A}_{t_0} = A_{t_2}^c \subset (A_{t_2}^{(1)})^c$, où $t_2 = (t_0 + t_1)/2$, ceci permettant de voir que $\tilde{A}_{t_0}^{(i)}$ est inclus dans l'un des $B_{t_2}^{(1,j)}$, avec $1 \leq j \leq n_{t_2,1}$, puis par suite que l'un des $\tilde{B}_{t_0}^{(i,j_0)}$ contient $V_n \setminus B_{t_2}^{(1,j)}$, on peut alors conclure comme précédemment.

On est ainsi amené à poser $\tilde{f} = f - t_0 \mathbf{1}$, puis

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq i \leq n_{t_0}, \quad f_{+,i} &= \mathbf{1}_{A_{t_0}^{(i)}} \tilde{f} \\ \forall 1 \leq i \leq \tilde{n}_{t_0}, \quad f_{-,i} &= \mathbf{1}_{\tilde{A}_{t_0}^{(i)}} |\tilde{f}| \end{aligned}$$

car ce qui précède nous assure que chacune de ces fonctions $f_{+,i}$ ou $f_{-,i}$ appartient à $\hat{H}(G, \mu)$. On a évidemment convenu qu'il n'y a pas d'applications $f_{-,i}$, si $t_0 = \min_{V_n} f$.

Par ailleurs on vérifie facilement (voir par exemple la démonstration du lemme 2 de [11]) que

$$\begin{aligned} \mu(f(\text{Id} - P)(f)) &= \mu(\tilde{f}(\text{Id} - P)(\tilde{f})) \\ &\geq \mu(\tilde{f}_+(\text{Id} - P)(\tilde{f}_+)) + \mu(\tilde{f}_-(\text{Id} - P)(\tilde{f}_-)) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{f}_+ &= \sum_{1 \leq i \leq n_{t_0}} f_{+,i} = \mathbf{1}_{\tilde{f} > 0} \tilde{f} \\ \tilde{f}_- &= \sum_{1 \leq i \leq \tilde{n}_{t_0}} f_{-,i} = \mathbf{1}_{\tilde{f} < 0} |\tilde{f}| \end{aligned}$$

Or on a clairement d'une part que

$$\begin{aligned} \mu(\tilde{f}_+(\text{Id} - P)(\tilde{f}_+)) &= \sum_{1 \leq i \leq n_{t_0}} \mu(f_{+,i}(\text{Id} - P)(f_{+,i})) \\ \mu(\tilde{f}_-(\text{Id} - P)(\tilde{f}_-)) &= \sum_{1 \leq i \leq \tilde{n}_{t_0}} \mu(f_{-,i}(\text{Id} - P)(f_{-,i})) \end{aligned}$$

et d'autre part, vu que f est de moyenne nulle, que

$$\begin{aligned} \mu(f^2) &\leq \mu(\tilde{f}^2) \\ &= \mu(\tilde{f}_+^2) + \mu(\tilde{f}_-^2) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n_{t_0}} \mu(f_{+,i}^2) + \sum_{1 \leq i \leq \tilde{n}_{t_0}} \mu(f_{-,i}^2) \end{aligned}$$

d'où il ressort donc que

$$\begin{aligned} \lambda(P, \mu) &= \frac{\mu(f(\text{Id} - P)(f))}{\mu(f^2)} \\ &\geq \frac{\sum_{1 \leq i \leq n_{t_0}} \mu(f_{+,i}(\text{Id} - P)(f_{+,i})) + \sum_{1 \leq i \leq \tilde{n}_{t_0}} \mu(f_{-,i}(\text{Id} - P)(f_{-,i}))}{\sum_{1 \leq i \leq n_{t_0}} \mu(f_{+,i}^2) + \sum_{1 \leq i \leq \tilde{n}_{t_0}} \mu(f_{-,i}^2)} \\ &\geq \inf_{1 \leq i \leq n_{t_0}} \frac{\mu(f_{+,i}(\text{Id} - P)(f_{+,i}))}{\mu(f_{+,i}^2)} \wedge \inf_{1 \leq i \leq \tilde{n}_{t_0}} \frac{\mu(f_{-,i}(\text{Id} - P)(f_{-,i}))}{\mu(f_{-,i}^2)} \\ &\geq \hat{\lambda}(P, \mu) \end{aligned}$$

La majoration du trou spectral découle quant à elle de $\lambda(P, \mu) \leq 2\tilde{\lambda}(P, \mu) \leq 2\hat{\lambda}(P, \mu)$. \square

Remarques. a) Dans le cas où on sait a priori que $G(P, \mu)$ est un arbre, on peut trouver un t_0 de manière plus immédiate : soit $x_0 \in V_n$ et y_1, \dots, y_r ses voisins dans l'arbre $G(P, \mu)$. En voyant x_0 comme la racine de cet arbre, soient T_1, \dots, T_r les sous-arbres issus respectivement des y_1, \dots, y_r . Il existe un point x_0 tel que l'on ait pour tout $1 \leq i \leq r$, $\mu(T_i) \leq 1/2$ (en effet, pour le trouver on commence par choisir un point x_0 quelconque, et s'il ne convient pas, on se place en le voisin y_i où l'indice i est tel que $\mu(T_i) > 1/2$, puis on renouvelle cette procédure ..., en un nombre fini d'étapes, on arrive en un point qui satisfait la condition précédente). Ce point est indépendant du vecteur propre f associé au trou spectral, et il suffit alors de considérer $t_0 = f(x_0)$, puis pour $1 \leq i \leq r$, les fonctions définies par

$$\forall x \in V_n, \quad f_i(x) = \begin{cases} |f(x) - t_0| & , \text{ si } x \in T_i \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases}$$

b) On peut se demander si l'on n'aurait pas généralement pour tout $(P, \mu) \in \mathcal{R}_n$, l'égalité $\tilde{\lambda}(P, \mu) = \hat{\lambda}(P, \mu)$, puisque l'on a le même encadrement du trou spectral en termes de ces quantités. Cependant si pour $n = 2$ on vérifie directement que l'on a toujours $\tilde{\lambda}(P, \mu) = \hat{\lambda}(P, \mu)$, par contre

dès que $n = 3$, on peut construire des exemples avec $\tilde{\lambda}(P, \mu) < \hat{\lambda}(P, \mu)$. Du moins ce qui précède montre que $\hat{\lambda}(P, \mu)/2 \leq \tilde{\lambda}(P, \mu) \leq \hat{\lambda}(P, \mu)$.

c) Par contre le fait de considérer des ensembles connexes ne modifie pas la constante isopérimétrique : si on note $\mathcal{B}(P, \mu)$ l'ensemble des $A \subset V_n$ qui sont $G(P, \mu)$ -connexes, dont le complémentaire est aussi $G(P, \mu)$ -connexe, et qui vérifient $\mu(A) \leq 1/2$, alors

$$I(P, \mu) = \inf_{A \in \mathcal{B}(P, \mu)} \frac{\mu(\mathbf{1}_A P(\mathbf{1}_{A^c}))}{\mu(A)}$$

Il s'agit là du corollaire 4.4 de [8], qui se montre en considérant les composantes connexes des différents ensembles qui apparaissent.

La proposition 9 nous amène à introduire $\hat{\mathcal{T}}(G, \mu)$, qui se définit comme $\bar{\mathcal{T}}(G, \mu)$ ci-dessus, mais où on part a priori d'ensembles A tels que $\mu(A) \geq 1/2$ qui sont de plus G -connexes, pour construire des couples $(\bar{T}, \bar{\mu})$.

Notre principal résultat ici s'énonce alors

Théorème 10. *Sur V_n , soient μ une probabilité en chargeant tous les points et G un graphe connexe. On a*

$$\inf_{P \in \mathcal{B}_n(G, \mu)} \frac{\hat{\lambda}(P, \mu)}{I(P, \mu)} = \inf_{(\bar{T}, \bar{\mu}) \in \hat{\mathcal{T}}(G, \mu)} L(\bar{T}, \bar{\mu})$$

Preuve. Comme précédemment, la minoration

$$\inf_{P \in \mathcal{B}_n(G, \mu)} \frac{\hat{\lambda}(P, \mu)}{I(P, \mu)} \geq \inf_{(\bar{T}, \bar{\mu}) \in \hat{\mathcal{T}}(G, \mu)} L(\bar{T}, \bar{\mu})$$

découle la remarque qui suit la preuve de la proposition 3, mais où on a supposé de plus que la fonction f satisfait que $\{f = 0\}$ est G -connexe.

Pour la majoration, donnons-nous $(\bar{T}, \bar{\mu}) \in \hat{\mathcal{T}}(G, \mu)$ et soit A l'ensemble à partir duquel on a construit ce couple. Soit $x_1, \dots, x_r \in A^c$ les fils de A dans \bar{T} , et notons y_1, \dots, y_r des éléments de A (non nécessairement tous distincts) tels que pour tout $1 \leq i \leq r$, $\{x_i, y_i\}$ soit une arête de G . Plutôt que de noter $p(x_i) = A$ comme d'habitude, on posera désormais $p(x_i) = y_i$, pour $1 \leq i \leq r$, et $B = A^c \sqcup \{y_1, \dots, y_r\}$. Soit $0 < I \leq 1$ fixé, on considère la matrice \hat{P}_I indicée par $V_n \times V_n$ et définie par

$$\forall x, y \in V_n, \quad \hat{P}_I(x, y) = \begin{cases} I\mu(T_x)/\mu(x) & , \text{ si } x, y \in B \text{ et } y = p(x) \\ I\mu(T_y)/\mu(p(y)) & , \text{ si } x, y \in B \text{ et } x = p(y) \\ \mu_*/(n\mu(x)) & , \text{ si } x, y \in A \text{ et } \{x, y\} \in \hat{E} \\ 0 & , \text{ si } x \neq y \text{ et } \{x, y\} \notin \hat{E} \\ 1 - \sum_{z \neq x} P_I(x, z) & , \text{ si } x = y \end{cases}$$

où $\mu_* = \min_{x \in V_n} \mu(x)$ et où \hat{E} est l'ensemble des arêtes $e = \{x, y\}$, avec soit $x, y \in A$ et e est une arête de G , soit $e = \{x_i, y_i\}$ pour un $1 \leq i \leq r$, soit $x, y \in A^c$ et e est une arête de \bar{T} . Il est clair que pour I assez petit, P_I sera markovienne et réversible par rapport à μ . Mais on montre de plus (en s'inspirant de la fin de la section 3 et en utilisant le fait que A est G -connexe) que pour I éventuellement encore plus petit, les seuls ensembles C tels que $\mu(C) \leq 1/2$ et $I(P_I, \mu) = \mu(\mathbf{1}_C P(\mathbf{1}_{C^c})) / \mu(C)$ sont inclus dans A^c ou sont égaux à A (dans le cas où $\mu(A) = 1/2$). Ceci nous assure que $I(P_I, \mu) = I$, et on en déduit, en considérant des fonctions qui s'annulent sur A , que

$$\frac{\hat{\lambda}(P_I, \mu)}{I(P_I, \mu)} \leq L(\bar{T}, \bar{\mu})$$

et le résultat annoncé en découle. □

Remarque. On peut se contenter dans la définition de $\hat{\mathcal{F}}(G, \mu)$ de ne considérer que les couples $(\bar{T}, \bar{\mu})$ tels que la racine de l'arbre pointé n'admette qu'un seul fils (quitte à rajouter les sous-arbres issus des autres fils dans la racine, en utilisant une remarque de la section 3). Ainsi, si dans la démonstration ci-dessus, au lieu de considérer toutes les arêtes de G incluses dans A , on n'en choisit qu'un certain nombre, de manière à munir A d'une structure d'arbre, on peut construire de manière analogue des matrices markoviennes dont le graphe sous-jacent soit un arbre. Ceci permet de montrer que

$$\inf_{(P, \mu) \in \mathcal{R}_n(G)} \frac{\hat{\lambda}(P, \mu)}{I(P, \mu)} = \inf_{T \in \mathcal{F}(G)} \inf_{(P, \mu) \in \mathcal{R}_n(T)} \frac{\hat{\lambda}(P, \mu)}{I(P, \mu)}$$

(rappelons que $\mathcal{F}(G)$ est l'ensemble des arbres inclus dans G), ce qui est un peu plus précis que les considérations de la fin de la section 2.

Ainsi d'après la proposition 9, on a l'approximation

$$\inf_{(\bar{T}, \bar{\mu}) \in \hat{\mathcal{F}}(G, \mu)} L(\bar{T}, \bar{\mu}) \leq \inf_{P \in \mathcal{R}_n(G, \mu)} \frac{\lambda(P, \mu)}{I(P, \mu)} \leq 2 \inf_{(\bar{T}, \bar{\mu}) \in \hat{\mathcal{F}}(G, \mu)} L(\bar{T}, \bar{\mu})$$

Considérons le cas où $G = G_n$, le graphe complet sur V_n , et notons pour toute probabilité μ chargeant tous les points de V_n ,

$$L(\mu) = \inf_{P \in \mathcal{R}_n(G_n, \mu)} \frac{\lambda(P, \mu)}{I(P, \mu)}$$

(ce qui revient aussi à prendre l'infimum sur tous les noyaux irréductibles P réversibles par rapport à μ).

Puisqu'alors $\hat{\mathcal{F}}(G_n, \mu) = \bar{\mathcal{F}}(G_n, \mu)$, la quantité $\inf_{(\bar{T}, \bar{\mu}) \in \bar{\mathcal{F}}(G_n, \mu)} L(\bar{T}, \bar{\mu})$ est une très bonne estimée pour $L(\mu)$, et d'après la proposition 8, on a plus explicitement

$$\frac{1}{n} \leq L(\mu) \leq \frac{16}{n-4}$$

car on aura noté que pour toute probabilité μ , $l(G_n, \mu) \geq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ (on peut montrer plus précisément, en travaillant plutôt à partir des $\Lambda(T, \mu)$, que $L(\mu)$ est maximum si μ est la probabilité équilibrée, et que l'on a l'estimation $L(\mu) \leq 2/(1 + \lfloor (n+1)/2 \rfloor)$).

Ainsi la quantité $L(\mu)$ dépend relativement peu de μ , ce qui en réduit considérablement l'intérêt.

Ce cas suggère que la quantité $\inf_{P \in \mathcal{P}_n(G, \mu)} \lambda(P, \mu)/I(P, \mu)$ ne fera intervenir G de manière véritablement significative que si ce dernier est suffisamment restrictif, et pour illustrer ceci et le fait que de passer de $\bar{\mathcal{F}}(G, \mu)$ à $\hat{\mathcal{F}}(G, \mu)$ n'est pas innocent, nous allons finir par un exemple.

Mais commençons par revenir sur les considérations du début de cette section. En effet, remarquons que la plus grande constante $I_0 > 0$ telle que la matrice P_I définie par (11) soit markovienne, est donnée par

$$I_0(T, \mu) \stackrel{\text{déf.}}{=} \max\{I > 0 : \max_{x \in V_n} \sum_{z \neq x} P_I(x, z) \leq 1\}$$

Or, si $x \in V_n^*$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{z \neq x} P_I(x, z) &= \frac{I}{\mu(x)} \left(\mu(T_x) + \sum_{y: p(y)=x} \mu(T_y) \right) \\ &= I \frac{2\mu(T_x) - \mu(x)}{\mu(x)} \end{aligned}$$

et si $x = x_\infty$,

$$\begin{aligned} \sum_{z \neq x_\infty} P_I(x_\infty, z) &= \frac{I}{\mu(x_\infty)} \sum_{y: p(y)=x_\infty} \mu(T_y) \\ &= I \frac{1 - \mu(x_\infty)}{\mu(x_\infty)} \end{aligned}$$

ce qui fait apparaître que

$$\begin{aligned} I_0(T, \mu) &= \frac{\mu(x_\infty)}{1 - \mu(x_\infty)} \wedge \min_{x \in V_n^*} \frac{\mu(x)}{2\mu(T_x) - \mu(x)} \\ &\geq 1 \wedge \min_{x \in V_n^*} \frac{\mu(x)}{2\mu(T_x) - \mu(x)} \end{aligned}$$

En utilisant alors la véritable inégalité de Cheeger (voir par exemple [14]), on obtient donc

$$\begin{aligned} L(T, \mu) &= \frac{\tilde{\lambda}(P_{I_0(T, \mu)}, \mu)}{I_0(T, \mu)} \\ &\geq \frac{\lambda(P_{I_0(T, \mu)}, \mu)}{2I_0(T, \mu)} \\ &\geq \frac{I_0(T, \mu)}{4} \end{aligned}$$

et on en déduit, via le théorème 10, que si μ une probabilité chargeant tous les points de V_n et si G un graphe connexe sur V_n , alors

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_n(G, \mu)} \frac{\lambda(P, \mu)}{I(P, \mu)} \geq \frac{1}{4} \inf_{(\bar{T}, \bar{\mu}) \in \hat{\mathcal{T}}(G, \mu)} I_0(\bar{T}, \bar{\mu})$$

Par un argument usuel d'approximation, ceci reste satisfait si G est un graphe connexe de cardinal dénombrable et si μ charge tous les sommets de G .

Nous pouvons maintenant décrire notre exemple.

Soit $\tilde{T} = (\tilde{V}, \tilde{E}, 0)$ l'arbre d -aire infini pointé en 0, avec $d \in \mathbb{N}^*$. Chaque $x \in \tilde{V}$ admet donc d fils, disons $f_1(x), \dots, f_d(x)$, et on notera $h(x)$ la hauteur de x , i.e. la distance de x à 0. Pour tout $x \in \tilde{V}$, donnons-nous un graphe connexe $G(x) = (V(x), E(x))$ tel que $\text{card}(V(x)) \leq N$, où $N \in \mathbb{N}^*$ ne dépend pas a priori de x , puis distinguons des points $z_0(x), z_1(x), \dots, z_d(x) \in V(x)$ (non nécessairement tous distincts), on fait également l'hypothèse que les ensembles $V(x), x \in \tilde{V}$, sont deux à deux disjoints. On construit alors tout naturellement un nouveau graphe (et non plus un arbre) pointé $G = (V, E, z_0(0))$ en remplaçant x par $G(x)$: on prend $V = \sqcup_{x \in \tilde{V}} V(x)$ et les arêtes de E sont d'une part celles qui appartiennent à $\sqcup_{x \in \tilde{V}} E(x)$, et d'autre part toutes celles de la forme $\{z_i(x), z_0(f_i(x))\}$, pour $x \in \tilde{V}$ et $1 \leq i \leq d$. On étend la fonction h à V , en posant que $h(y) = h(x)$, si $y \in G(x)$, avec $x \in \tilde{T}$. Supposons que l'on dispose d'une probabilité μ sur V satisfaisant pour certaines constantes $0 < \rho < 1/d, k, K > 0$,

$$\forall x \in V, \quad k\rho^{h(x)} \leq \mu(x) \leq K\rho^{h(x)} \tag{17}$$

Les résultats précédents permettent alors de réaliser que pour tout noyau markovien P sur V (muni de la tribu de toutes ses sous-parties), réversible par rapport à μ et dont les transitions permises sont portées par E , on a

$$\lambda(P, \mu) \geq \frac{k(1 - d\rho)}{8KN} I(P, \mu)$$

En effet, soit $(\bar{T}, \bar{\mu}) \in \hat{\mathcal{T}}((V, E), \mu)$ et $A \subset V$, connexe et satisfaisant $\mu(A) \geq 1/2$, à partir duquel est construit le couple précédent. On se ramène à supposer de plus que la racine A de \bar{T} admet un unique fils dans cet arbre, c'est-à-dire que A^c est aussi connexe.

Soit $x_0 \in \tilde{V}$ tel que $V(x_0) \cap A \neq \emptyset$ et

$$h(x_0) = \min\{h(x) : x \in A\}$$

On calcule que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\leq \mu(A) \leq \mu(\sqcup_{x \in \tilde{T}_{x_0}} V(x)) \\ &\leq \frac{KN}{d^{h(x_0)}} \sum_{j \geq h(x_0)} (d\rho)^j \\ &= KN \frac{\rho^{h(x_0)}}{1 - d\rho} \end{aligned}$$

d'où

$$h(x_0) \leq \frac{\ln((1 - d\rho)/(2KN))}{\ln(\rho)}$$

Par ailleurs, notons \tilde{B} l'ensemble des ancêtres de x_0 (x_0 compris) dans \tilde{T} , puis $B = \sqcup_{x \in \tilde{B}} V(x) \cap A^c$ et $C = A^c \setminus B$.

Il est clair que pour $y \in B$, on a $h(y) \leq h(x_0)$, ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\mu(\tilde{T}_y)}{\mu(y)} &\leq \frac{1}{2\mu(y)} \\ &\leq \frac{1}{2k\rho^{h(x_0)}} \\ &\leq \frac{KN}{k(1 - d\rho)} \end{aligned}$$

D'autre part, soit $y \in C$, par connexité de A^c , on a nécessairement

$$\bigsqcup_{z \in \tilde{T}_y \setminus \{y\}} V(z) \subset \tilde{T}_y \subset \bigsqcup_{z \in \tilde{T}_y} V(z)$$

où on a noté \tilde{y} l'élément de \tilde{V} tel que $y \in G(\tilde{y})$. On en déduit que

$$\mu(\tilde{T}_y) \leq KN \frac{\rho^{h(y)}}{1 - d\rho}$$

puis que

$$\frac{\mu(\bar{T}_y)}{\mu(y)} \leq \frac{KN}{k(1-d\rho)}$$

Il ressort de ces calculs que

$$I_0(\bar{T}, \bar{\mu}) \geq \frac{k(1-d\rho)}{2KN} \leq 1$$

d'où le résultat annoncé.

Remarque. Si le graphe sous-jacent d'un noyau est un arbre, les inégalités de Hardy avec poids permettent toujours, du moins théoriquement, de très bien évaluer son trou spectral. Cependant l'algorithme qu'elles font intervenir peut être très compliqué en pratique (sauf dans le cas du segment, c'est-à-dire pour les processus aux plus proches voisins sur \mathbb{Z}). Par contre les constantes isopérimétriques sont a priori plus simples à manipuler, d'où l'intérêt de minoration du trou spectral qui les font intervenir, comme l'inégalité de Cheeger ou la méthode précédente. Cette dernière approche permettant de traiter directement et plus précisément (du moins si $I(P, \mu)$ est petit) des perturbations d'arbres, comme dans l'exemple ci-dessus.

6. Inégalités de Sobolev-logarithmiques

La démarche précédente peut parfois s'appliquer à d'autres constantes ergodiques que le trou spectral, et nous allons illustrer cette affirmation sur les constantes de Sobolev-logarithmiques. Commençons par en rappeler la définition : pour $(P, \mu) \in \mathcal{R}_n$, on note

$$\alpha(P, \mu) = \inf_{f \in \mathbb{L}^2(\mu) \setminus \text{Vect}(\mathbf{1})} \frac{\mu(f(\text{Id} - P)(f))}{\text{Ent}(f^2, \mu)}$$

la constante de Sobolev-logarithmique associée au couple réversible (P, μ) , où pour tout $f \in \mathbb{L}^2(\mu)$, on a

$$\text{Ent}(f^2, \mu) = \int f^2 \ln \left(\frac{f^2}{\|f\|_{\mathbb{L}^2(\mu)}^2} \right) d\mu$$

Ces définitions s'étendent évidemment au cas d'un couple réversible (P, μ) sur un espace mesurable quelconque.

Notre première tâche consiste à modifier cette constante, pour se ramener à ne considérer que des fonctions positives s'annulant sur un ensemble de mesure assez grande sous μ et connexe pour le noyau P , tout en conservant

l'équivalent de la proposition 9. On va pour cela utiliser des résultats de Rothaus [13] et de Bobkov et Götze [1].

Soit $\Psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction de Young donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \Psi(x) = |x| \ln(1 + |x|)$$

On note $\|\cdot\|_{\Psi, \mu}$ la norme d'Orlicz associée, qui est définie pour toute fonction mesurable f par

$$\|f\|_{\Psi, \mu} = \inf\{l > 0 : \int \Psi(f/l) d\mu \leq 1\} \leq +\infty$$

(l'espace d'Orlicz $L^\Psi(\mu)$ correspondant est l'ensemble des fonctions pour lesquelles cette norme est finie, quotienté par les fonctions μ -négligeables, c'est un espace de Banach, si on le munit de la norme ci-dessus).

Pour $f \in \mathbb{L}^2(\mu)$, posons

$$\mathcal{L}(f, \mu) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \text{Ent}((f - t)^2, \mu)$$

et notons que du fait de l'invariance de la forme de Dirichlet $f \mapsto \mu(f(I - P)(f))$ par addition d'une constante à f , on a aussi

$$\alpha(P, \mu) = \inf_{f \in \mathbb{L}^2(\mu) \setminus \text{Vect}(\mathbf{1})} \frac{\mu(f(\text{Id} - P)(f))}{\mathcal{L}(f, \mu)}$$

Introduisons également la quantité suivante pour $f \in \mathbb{L}^2(\mu)$,

$$\tilde{\mathcal{L}}(f, \mu) = \inf_{t \in \mathbb{R}} \|(f - t)^2\|_{\Psi, \mu}$$

qui se trouve en fait être très proche de la précédente, car on a toujours,

Proposition 11. *Pour tout $f \in \mathbb{L}^2(\mu)$, on est assuré de l'encadrement*

$$\frac{2}{3} \tilde{\mathcal{L}}(f, \mu) \leq \mathcal{L}(f, \mu) \leq \frac{5}{2} \tilde{\mathcal{L}}(f, \mu)$$

Si on avait plutôt considéré

$$\hat{\mathcal{L}}(f, \mu) = \|(f - \mu(f))^2\|_{\Psi, \mu}$$

l'encadrement ci-dessus avec $\hat{\mathcal{L}}(f, \mu)$ à la place de $\tilde{\mathcal{L}}(f, \mu)$ n'aurait été autre que la proposition 4.1 de Bobkov et Götze [1]. D'ailleurs pour la démonstration de la proposition 11, il suffit de reprendre la preuve de ces auteurs, en notant que l'inégalité de Rothaus [13]

$$\mathcal{L}(f, \mu) \leq \text{Ent}(f^2, \mu) + 2 \int f^2 d\mu$$

est valable pour tout $f \in \mathbb{L}^2(\mu)$, sans la restriction $\mu(f) = 0$, ce qui en l'appliquant avec f remplacé par $f - t$, pour $t \in \mathbb{R}$, et en suivant le développement de Bobkov et Götze, permet d'obtenir que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}(f, \mu) \leq \frac{5}{2} \|(f - t)^2\|_{\Psi, \mu}$$

d'où la seconde inégalité de la proposition. La première découle trivialement de l'inégalité $\tilde{\mathcal{L}}(f, \mu) \leq \hat{\mathcal{L}}(f, \mu)$ et du résultat de Bobkov et Götze précédemment mentionné.

Ceci permet d'ailleurs de réaliser que $\tilde{\mathcal{L}}(f, \mu)$ et $\hat{\mathcal{L}}(f, \mu)$ sont comparables, à des constantes universelles près.

Revenons au cas où l'espace des états est fini, et posons

$$\hat{\alpha}(P, \mu) = \inf_{f \in \hat{H}(P, \mu) \setminus \{0\}} \frac{\mu(f(\text{Id} - P)(f))}{\|f^2\|_{\Psi, \mu}}$$

où rappelons que $\hat{H}(P, \mu)$ est l'ensemble des fonctions positives qui sont telles que $\{f = 0\}$ soit $G(P, \mu)$ -connexe et de masse supérieure ou égale à $1/2$.

L'intérêt d'avoir introduit la quantité $\tilde{\mathcal{L}}(f, \mu)$ est que quand on reprend les notations et la preuve de la proposition 9, on peut écrire, en utilisant l'inégalité triangulaire pour la norme de $L^\Psi(\mu)$,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}(f, \mu) &\leq \|(f - t_0)^2\|_{\Psi, \mu} \\ &\leq \|\tilde{f}_+^2\|_{\Psi, \mu} + \|\tilde{f}_-^2\|_{\Psi, \mu} \\ &\leq \sum_{1 \leq i \leq n_{i_0}} \|f_{+,i}^2\|_{\Psi, \mu} + \sum_{1 \leq i \leq \tilde{n}_{i_0}} \|f_{-,i}^2\|_{\Psi, \mu} \end{aligned}$$

ce qui via la proposition 11, permet de réaliser que pour tout couple $(P, \mu) \in \mathcal{R}_n$,

$$\alpha(P, \mu) \geq \frac{2}{5} \inf_{f \in \mathbb{L}^2(\mu) \setminus \text{Vect}(\mathbf{1})} \frac{\mu(f(\text{Id} - P)(f))}{\tilde{\mathcal{L}}(f^2, \mu)} \geq \frac{2}{5} \hat{\alpha}(P, \mu)$$

Par ailleurs, il existe également une majoration dans l'autre sens. En effet d'après le lemme 4.3 de [1], on a pour tout $f \in L^N(\mu)$,

$$\|f\|_{\mathbb{L}^2(\mu)} \leq \frac{\sqrt{5}}{2} \|f\|_{L^N(\mu)}$$

où N est la fonction de Young définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad N(x) = \Psi(x^2)$$

Remarquons que pour tout $f \in L^N(\mu)$, on a $f^2 \in L^\Psi(\mu)$ et $\|f\|_{N,\mu} = \sqrt{\|f^2\|_{\Psi,\mu}}$.

Ainsi, si $f \in \hat{H}(P, \mu)$, il suffit d'utiliser que

$$\begin{aligned} \|f\|_{N,\mu} &\leq \|f - \mu(f)\|_{N,\mu} + \mu(f) \\ &= \|f - \mu(f)\|_{N,\mu} + \|f\|_{\mathbb{L}^2(\mu)} \|\mathbf{1}_{\{f>0\}}\|_{\mathbb{L}^2(\mu)} \\ &\leq \|f - \mu(f)\|_{N,\mu} + \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \|f\|_{N,\mu} \end{aligned}$$

pour faire apparaître que

$$\begin{aligned} \|f^2\|_{\Psi,\mu} &= \|f\|_{N,\mu}^2 \\ &\leq \frac{1}{\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right)^2} \|f - \mu(f)\|_{N,\mu}^2 \\ &\leq \frac{1}{\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right)^2} \hat{\mathcal{L}}(f, \mu) \\ &\leq \frac{1}{\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right)^2} \frac{3}{2} \mathcal{L}(f, \mu) \end{aligned}$$

ce qui permet de se convaincre que

$$\hat{\alpha}(P, \mu) \geq \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right)^2 \frac{2}{3} \alpha(P, \mu)$$

En résumé, on a donc

Proposition 12. *Pour tout $(P, \mu) \in \mathcal{R}_n$, on est assuré de l'encadrement*

$$\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right)^{-2} \frac{2}{3} \hat{\alpha}(P, \mu) \geq \alpha(P, \mu) \geq \frac{2}{5} \hat{\alpha}(P, \mu)$$

Cependant, la forme de $\hat{\alpha}(P, \mu)$ permet de travailler comme précédemment : soit G un graphe connexe sur V_n et μ une probabilité en chargeant tous les sommets, on obtient que

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_n(G, \mu)} \frac{\hat{\alpha}(P, \mu)}{I(P, \mu)} = \inf_{(\bar{T}, \bar{\mu}) \in \hat{\mathcal{T}}(G, \mu)} A(\bar{T}, \bar{\mu})$$

où pour tout arbre pointé fini T et toute probabilité μ sur ses sommets, $A(T, \mu)$ se définit comme $L(T, \mu)$ en (12), sauf qu'au dénominateur, $\mu(f^2)$ est remplacé par $\|f^2\|_{\Psi, \mu}$.

Cependant, en utilisant les inégalités de Hardy avec poids sur les arbres discrets (cf. l'appendice) et le fait que $L^\Psi(\mu)$ est un espace de Banach idéal muni d'une norme semi-continue pour l'ordre (voir la section 5 de [1]), il apparaît simplement que l'on peut estimer $A(T, \mu)$ par la quantité définie par

$$\hat{A}(T, \mu) = \inf_{K \in \mathcal{K}} v_\mu(K) \Psi^{-1}(1/\mu(K'))$$

où on a repris les notations de la section précédente et où Ψ^{-1} est la fonction inverse de Ψ , car on a toujours l'encadrement

$$\frac{1}{16} \hat{A}(T, \mu) \leq A(T, \mu) \leq \hat{A}(T, \mu)$$

Or il est bien connu (cf. par exemple le lemme 5.4 de [1]) que pour tout $t \geq 2$, on a

$$\frac{1}{2} \frac{t}{\ln(t)} \leq \Psi^{-1}(t) \leq 2 \frac{t}{\ln(t)}$$

ce qui montre qu'en posant

$$\tilde{A}(T, \mu) = \inf_{K \in \mathcal{K}} \frac{v_\mu(K)}{\mu(K') |\ln(\mu(K'))|}$$

puis

$$\bar{A}(G, \mu) = \inf_{(\bar{T}, \bar{\mu}) \in \hat{\mathcal{T}}(G, \mu)} \tilde{A}(\bar{T}, \bar{\mu})$$

on obtient en fin de compte

Proposition 13. *Soit G un graphe connexe fini et μ une probabilité en chargeant tous les points, on a*

$$\frac{1}{80} \bar{A}(G, \mu) \leq \inf_{P \in \mathcal{P}_n(G, \mu)} \frac{\alpha(P, \mu)}{I(P, \mu)} \leq \frac{4}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right)^{-2} \bar{A}(G, \mu)$$

Cependant, considérons à nouveau $\mathcal{R}_n(G)$, l'ensemble des couples réversibles (P, μ) dont le graphe sous-jacent $G(P, \mu)$ est un graphe connexe G fixé sur V_n . On se convainc sans difficulté à partir de la proposition précédente, que contrairement au cas du trou spectral, on a maintenant

$$\inf_{(P, \mu) \in \mathcal{R}_n(G)} \frac{\alpha(P, \mu)}{I(P, \mu)} = 0$$

(résultat qui peut aussi s'obtenir à partir de l'appendice de [3]).

Nous allons mettre en évidence que pour obtenir un résultat dans la direction de celui de la section 3, il aurait fallu changer la définition de la constante isopérimétrique : soit $F : [0, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction concave strictement croissante vérifiant $F(0) = 0$, et posons

$$I_F(P, \mu) = \inf_{A \subset V_n, 0 < \mu(A) \leq 1/2} \frac{\mu(\mathbf{1}_A P(\mathbf{1}_{A^c}))}{F(\mu(A))}$$

Malheureusement, on réalise rapidement que le lemme 4 (et par suite toute la section 2) s'obtient de la même manière seulement si F est convexe, ce qui ne correspond pas aux situations intéressantes. Pour palier à ceci, introduisons la fonctionnelle additive F_μ sur la tribu naturelle de V_n , en posant :

$$\forall A \subset V_n, \quad F_\mu(A) = \sum_{x \in A} F(\mu(x))$$

Il est clair que pour tout A strictement inclus dans S ,

$$F(\mu(A)) \leq F_\mu(A) \leq \text{card}(A)F(\mu(A)) \leq nF(\mu(A))$$

ce qui nous amène à regarder

$$J_F(P, \mu) = \inf_{A \subset V_n, 0 < \mu(A) \leq 1/2} \frac{\mu(\mathbf{1}_A P(\mathbf{1}_{A^c}))}{F_\mu(A)}$$

car avec cette définition, la section 2 est évidemment encore valable.

Ainsi à un facteur n près, on peut reprendre les considérations de la section 5, et on est conduit à poser, pour un arbre pointé T donné,

$$L_F(T, \mu) = \inf_{f \in \tilde{H}(x_\infty) \setminus \{0\}} \frac{\sum_{e \in E} F_\mu(T_e)(df)^2(e)}{\mu(f^2)}$$

si l'on voulait s'intéresser à des minoration du trou spectral, et

$$A_F(T, \mu) = \inf_{f \in \tilde{H}(x_\infty) \setminus \{0\}} \frac{\sum_{e \in E} F_\mu(T_e)(df)^2(e)}{\|f^2\|_\Psi}$$

si l'on considère plutôt la constante de Sobolev-logarithmique, ce que nous allons désormais faire.

Les inégalités de Hardy nous amène à définir la fonction $\nu_{F,\mu}$ sur $\bar{\mathcal{K}}$ (toujours avec les notations de la section 5), par la récurrence

$$\forall K \in \bar{\mathcal{K}},$$

$$\nu_{F,\mu}(K) = \begin{cases} +\infty & , \text{ si } K = \emptyset \\ \left(\frac{1}{F_\mu(T_{x_0})} + \frac{1}{\sum_{x \in G(x_0)} \nu_{F,\mu}(K_x)} \right)^{-1} & , \text{ sinon, où } x_0 \text{ est la racine de } K \end{cases}$$

En suivant le raisonnement précédent, on obtient alors

$$\inf_{P \in \mathcal{R}_n(G, \mu)} \frac{\alpha(P, \mu)}{I_F(P, \mu)} \geq \frac{1}{n} \frac{1}{80} \inf_{K \in \mathcal{K}} \frac{\nu_{F,\mu}(K)}{\mu(K') |\ln(\mu(K'))|}$$

Cependant, si l'on prend pour fonction F celle définie par

$$\forall x \in [0, 1/2], \quad F_0(x) = x |\ln(x)|$$

l'expression du terme de droite est de la même forme que celle que l'on a traité dans la section 3. Notamment, il en ressort que $1/l(G)$ est l'infimum en toutes les probabilités chargeant tous les points de V_n des quantités $\inf_{K \in \mathcal{K}} \nu_{F,\mu}(K)/(F_0)_\mu(K')$, d'où en fin de compte

$$\inf_{(P, \mu) \in \mathcal{R}_n(G)} \frac{\alpha(P, \mu)}{I_{F_0}(P, \mu)} \geq \frac{1}{80nl(G)} > 0$$

On ne pense pas que le n dans cette minoration soit optimal, on aura d'ailleurs noté que

$$\inf_{(P, \mu) \in \mathcal{R}_n(G)} \frac{\alpha(P, \mu)}{I_{F_0}(P, \mu)} \leq \frac{4}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \right)^{-2} \frac{1}{l(G)}$$

Remarque. Quand on cherche à définir une constante isopérimétrique liée à la constante de Sobolev-logarithmique via une inégalité du type de celle de Cheeger, la fonction F naturelle à considérer est $F : [0, 1/2] \ni x \mapsto x\sqrt{|\ln(x)|}$ (cf. l'article de Ledoux [9], dans un contexte riemannien, néanmoins, c'est bien la fonction F_0 qui intervient si l'on s'intéresse à une variante \mathbb{L}^1 des inégalités de Sobolev-logarithmiques, voir [13]). On ne retrouve pas ce phénomène ici, puisque l'on vérifie facilement que si la fonction F est telle que $F(x) = o(x |\ln(x)|)$ en 0, alors $\inf_{(P, \mu) \in \mathcal{R}_n(G)} \alpha(P, \mu)/I_{F_0}(P, \mu) = 0$, pour tout graphe G fixé. Ceci semble donc indiquer que ces questions sont de nature différente.

Appendice : inégalités de Hardy avec poids sur les arbres discrets

Evans, Harris et Pick [5] ont obtenu des inégalités de Hardy avec poids sur les arbres continus de degré fini (maximum des voisins d'un sommet), pour lesquels les arêtes sont vues comme de véritables segments bornés, munis de leur mesure de Lebesgue respectives. L'espace des états est alors la réunion de ces segments, que l'on munit de la mesure obtenue en ajoutant les différentes mesures précédentes, et les poids désignent des densités par rapport à cette mesure. Leur preuve, qui est inspirée de celle que Sawyer [15] a donné dans le cas d'un segment (on renvoie également aux références de [5]), permet aussi de traiter les arbres discrets, c'est ce que nous allons présenter ici.

Mais commençons par rappeler le résultat de Evans, Harris et Pick qui va nous être utile. On va en effet se contenter de considérer des espaces \mathbb{L}^2 , alors que dans [5], des inégalités pour différents espaces \mathbb{L}^p et \mathbb{L}^q , $p, q \geq 1$ (dans les membres de gauche et de droite) sont étudiées.

Soit $(S, A, 0)$ un arbre pointé usuel de degré fini. On le transforme en un arbre continu, en associant à chaque arête $\{x, y\} \in A$, un segment compact non vide $e_{\{x,y\}}$ muni de sa mesure de Lebesgue $l_{\{x,y\}}$. On note alors $\bar{S} = \cup_{\{x,y\} \in A} e_{\{x,y\}}$ et on munit cet espace (où les extrémités de segment aboutissant à un même sommet de S sont identifiées avec ce sommet, autrement, les différents segments sont évidemment tous supposés disjoints) de sa topologie naturelle ainsi que de la mesure $l = \sum_{\{x,y\} \in A} l_{\{x,y\}}$. Pour $x, y \in \bar{S}$, on notera $\gamma_{x,y}$ le chemin injectif continu (ou plutôt son image) allant de x à y .

Soient u, v deux fonctions strictement positives sur \bar{S} , appartenant respectivement à $\mathbb{L}_{\text{loc}}^2(l)$ et $\mathbb{L}^2(l)$. On va s'intéresser à la quantité

$$C \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{f \in \mathbb{L}^2(l)} \frac{\int_{\bar{S}} \left(v(x) \int_{\gamma_{0,x}} f(y) u(y) l(dy) \right)^2 l(dx)}{\int_{\bar{S}} f^2(x) l(dx)}$$

Le but des inégalités de Hardy est d'estimer cette constante à partir d'un algorithme faisant intervenir de manière relativement directe les poids u et v .

Notons comme d'habitude que l'on peut se ramener à supposer qu'il n'y a qu'une seule arête issue de 0 (quitte à considérer le maximum des quantités définies comme ci-dessus sur chacun des sous-arbres issus d'une arête partant de 0). Pour décrire la constante approximante de c , on a besoin d'un certain nombre de notations.

Soit $\bar{\mathcal{H}}$ l'ensemble des sous-arbres (i.e. des sous-ensembles connexes) ouverts de \bar{S} , on définit une fonctionnelle ν_u sur $\bar{\mathcal{H}}$ de la manière suivante : soit $K \in \bar{\mathcal{H}}$.

- S'il existe $\{x, y\} \in A$ tel que $K \subset e_{\{x,y\}}$, on pose

$$v_u(K) = \left(\int_K u^2(y) l(dy) \right)^{-1}$$

- Si K n'est pas inclus dans un tel segment, parmi les segments qui intersectent K , il y en a un qui est le plus proche de 0, notons K_0 l'intersection de ce segment avec K . Soit ensuite K_1, \dots, K_n les composantes connexes de $K \setminus K_0$ (K_0 contient un sommet x_0 différent de 0, l'entier n est alors le nombre de fils de x_0 , chacun des K_i , $1 \leq i \leq n$, étant l'intersection de K avec le sous-arbre issu de x_0 (non inclus) dans la direction d'un de ses fils).

Par une sorte de récurrence, on pose

$$\frac{1}{v_u(K)} = \frac{1}{v_u(K_0)} + \frac{1}{\sum_{i=1}^n v_u(K_i)}$$

Cette procédure permet bien de déterminer entièrement v_u sur $\bar{\mathcal{K}}$.

Soit ensuite \mathcal{K} , l'ensemble des éléments $K \in \bar{\mathcal{K}}$ tels que $0 \in K$, puis posons

$$B \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{K \in \mathcal{K}} \frac{\mu_v(\bar{S} \setminus K)}{v_u(K)}$$

où $\mu_v(\bar{S} \setminus K) = \int_{\bar{S} \setminus K} v^2(y) l(dy)$.

L'inégalité de Hardy prouvée dans [5] s'énonce alors :

Théorème 14. *On a l'encadrement*

$$B \leq C \leq 16B$$

Revenons maintenant au cas d'un arbre pointé fini $(S, A, 0)$, et donnons-nous deux applications strictement positives μ et ν sur $S^* \stackrel{\text{déf.}}{=} S \setminus \{0\}$. On supposera que 0 admet un seul fils.

De manière similaire à ce qui précède, on cherche à estimer

$$C \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{f \in \mathbb{L}^2(\nu)} \frac{\sum_{x \in S^*} \mu(x) \left(\sum_{0 < y \preceq x} f(y) \right)^2}{\sum_{x \in S^*} \nu(x) f^2(x)} \tag{18}$$

où \preceq est la relation d'ordre partiel définie sur S par $x \preceq y$ si et seulement si x est sur le chemin injectif conduisant de 0 à y .

Pour ceci, on va se ramener au cas des arbres continus : remplaçons chaque arête $\{x, y\}$ par un segment de longueur 1. On introduit une fonction u sur \bar{S} , en posant, pour tout $\{x, y\} \in A$, tel que x soit le père de y ,

$$\forall z \in \text{Int}(e_{\{x,y\}}), \quad u(z) = \frac{1}{\sqrt{v(y)}}$$

Ceci définit bien u à un ensemble l -négligeable près, et clairement $u \in \mathbb{L}^2(l)$.

Pour $t \geq 1$, on considère également la fonction v_t sur \bar{S} , définie par : pour toute arête $\{x, y\} \in A$, telle que x soit le père de y ,

$$\forall z \in \text{Int}(e_{\{x,y\}}), \quad v_t(z) = \begin{cases} \sqrt{\mu(y)/t} & , \text{ si } d(x, z) < 1 - 1/t \\ \sqrt{\mu(y)(t - 1 + 1/t)} & , \text{ si } d(z, y) \leq 1/t \end{cases}$$

où d désigne la distance usuelle sur $e_{\{x,y\}}$ (notamment, x et y étant identifiés avec les extrémités de ce segment, on a $d(x, y) = 1$).

Ceci nous amène à nous intéresser à

$$C_t \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{f \in \mathbb{L}^2(l)} \frac{\int_{\bar{S}} \left(v_t(x) \int_{\gamma_{0,x}} f(y) u(y) l(dy) \right)^2 l(dx)}{\int_{\bar{S}} f^2(x) l(dx)} \quad (19)$$

Quitte à effectuer dans (18) le changement de fonction

$$\forall x \in S^*, \quad f(x) \leftarrow \frac{f(x)}{\sqrt{v(x)}}$$

et à se restreindre dans le domaine du supremum de (19) aux fonctions qui sont constantes sur chacun des intérieurs des segments, on se rend compte que pour tout $t \geq 1$,

$$\left(1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) \left(1 - \frac{1}{t}\right)^2 C \leq C_t$$

En effet, remarquons que dans le supremum de (18) et de (19), on peut se contenter de considérer des fonctions positives. Soit f une fonction positive sur S^* , et définissons $\tilde{f} \in \mathbb{L}^2(l)$ en posant pour tout $\{x, y\} \in A$, tel que x soit le père de y ,

$$\forall z \in \text{Int}(e_{\{x,y\}}), \quad \tilde{f}(z) = f(y)$$

On a alors, pour une telle arête $\{x, y\} \in A$,

$$\begin{aligned}
 & \int_{e_{\{x,y\}}} \left(v_t(z) \int_{\gamma_{0,z}} \tilde{f}(v)u(v)l(dv) \right)^2 l(dz) \\
 & \geq \int_{e_{\{x,y\}}} \mathbf{1}_{d(z,y) \leq 1/t} \left(v_t(z) \int_{\gamma_{0,z}} \tilde{f}(v)u(v)l(dv) \right)^2 l(dz) \\
 & \geq \int_{e_{\{x,y\}}} \mathbf{1}_{d(z,y) \leq 1/t} \mu(y) (t - 1 + 1/t) \\
 & \quad \times \left(\sum_{0 < w \leq x} f(w)/\sqrt{v(w)} + (1 - 1/t)f(y)/\sqrt{v(y)} \right)^2 l(dz) \\
 & \geq \int_{e_{\{x,y\}}} \mathbf{1}_{d(z,y) \leq 1/t} \mu(y) (t - 1 + 1/t) (1 - 1/t)^2 \left(\sum_{0 < w \leq y} f(w)/\sqrt{v(w)} \right)^2 l(dz) \\
 & = \left(1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \right) \left(1 - \frac{1}{t} \right)^2 \mu(y) \left(\sum_{0 < w \leq y} f(w)/\sqrt{v(w)} \right)^2
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a clairement

$$\int_{\bar{S}} \tilde{f}^2(x) l(dx) = \sum_{x \in S^*} f^2(x)$$

ce qui permet de se convaincre de la majoration annoncée.

Mais on a également une inégalité en sens inverse :

$$C_t \leq C \tag{20}$$

Pour le voir, il suffit de remarquer que si f est une fonction positive de $\mathbb{L}^2(l)$, on a

$$\int_{\bar{S}} \left(v_t(x) \int_{\gamma_{0,x}} f(y)u(y)l(dy) \right)^2 l(dx) \leq \sum_{x \in S^*} \mu(x) \left(\int_{\gamma_{0,x}} f(y)u(y)l(dy) \right)^2$$

car on aura noté que pour tout $\{x, y\} \in A$, $v_t^2(z)l_{\{x,y\}}(dz)/\mu(y)$ est une probabilité sur $e_{\{x,y\}}$.

Pendant, pour une telle arête donnée, le supremum des valeurs de $\int_{e_{\{x,y\}}} f(z)u(z)l_{\{x,y\}}(dz)$, sachant que $\int_{e_{\{x,y\}}} f^2(z)l_{\{x,y\}}(dz)$ prend une valeur donnée, est atteint, de par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour une fonction f proportionnelle à u sur $e_{\{x,y\}}$, c'est-à-dire f constant sur cet interval, ce qui permet de réaliser que

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in \mathbb{L}^2(l)} \frac{\sum_{x \in S^*} \mu(x) \left(\int_{\gamma_{0,x}} f(y) u(y) l(dy) \right)^2}{\int_S f^2(x) l(dx)} \\ &= \sup_{f \in \mathbb{L}^2(v)} \frac{\sum_{x \in S^*} \mu(x) \left(\sum_{0 < y \leq x} f(y) / v(y) \right)^2}{\sum_{x \in S^*} f^2(x)} = C \end{aligned}$$

dont découle l'inégalité (20).

Ainsi, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} C_t = C$$

ce qui justifie l'introduction des constantes C_t , puisqu'elles permettent de se ramener au cas des arbres continus.

Pour $t \geq 1$, on note B_t la quantité qui se construit comme avant le théorème 14, mais avec v remplacé par v_t et u la fonction particulière définie ci-dessus à partir de v .

Pour décrire la limite des B_t quand t devient grand, on considère les notions suivantes associées à l'arbre pointé $(S, A, 0)$ et aux mesures μ et v :

Pour $x \in S$, on note $G(x)$ l'ensemble des fils de x , et on dit qu'un sous-arbre non-vide K de $(S, A, 0)$ est complet, si pour tout $x \in K$, on a soit $G(x) \subset K$, soit $G(x) \subset S \setminus K$. On notera $\bar{\mathcal{K}}^\dagger$ l'ensemble des sous-arbres complets qui ne contiennent pas 0.

On prolonge v en une application sur $\bar{\mathcal{K}}^\dagger$, de la manière récursive suivante : soit $K \in \bar{\mathcal{K}}^\dagger$,

- Si K est un singleton $\{x\}$, avec $x \in S^*$, on pose

$$v(K) = v(x)$$

- Si K n'est pas un singleton, parmi ses sommets, il y en a un (la racine naturelle de K) qui est le plus proche de 0, disons $x_0 \in S^*$, et notons K_1, \dots, K_n , les sous-arbres de K issus des fils de x_0 (chacun de ces fils étant inclus dans son sous-arbre). On pose alors

$$\frac{1}{v(K)} = \frac{1}{v(x_0)} + \frac{1}{\sum_{1 \leq i \leq n} v(K_i)}$$

On considère ensuite l'ensemble \mathcal{K}^\dagger des éléments de $\bar{\mathcal{K}}^\dagger$ qui contiennent les fils de 0. Pour $K \in \bar{\mathcal{K}}^\dagger$, on note $K' = \{y \in S^* : G(y) \cap K = \emptyset\}$, la

réunion de l'ensemble des feuilles de K et du complémentaire de K dans S^* . Enfin, on pose

$$B = \max_{K \in \mathcal{K}^\dagger} \frac{\mu(K')}{\nu(K)}$$

Lemme 15. *On a*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} B_t = B$$

Preuve. Soit $K \in \mathcal{K}^\dagger$ où est atteint le maximum dans la définition de B . On transforme K en \bar{K} en remplaçant les arêtes par des segments et en ajoutant le segment allant de 0 à son fils, puis pour $t > 1$, soit $K_t \in \mathcal{K}$ le sous-arbre que l'on obtient en retirant à \bar{K} les points qui sont à une distance inférieure (ou égale) à $1/t$ d'une feuille de K . On vérifie immédiatement que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \nu_u(K_t) = \nu(K)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mu_{v_t}(\bar{S} \setminus K_t) = \mu(K')$$

d'où il ressort que

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} B_t \geq B$$

Pour la réciproque, remarquons déjà que ν_u est une application décroissante sur \mathcal{K} :

$$\forall K_1, K_2 \in \mathcal{K}, K_1 \subset K_2 \implies \nu_u(K_1) \geq \nu_u(K_2)$$

(et plus précisément, on montre sans difficulté que si $K_1, K_2 \in \bar{\mathcal{K}}$ ont même racine, et si $K_1 \subset K_2$, alors $\nu_u(K_1) \geq \nu_u(K_2)$, par contre, on peut trouver des contre-exemples à la décroissance de ν_u sur tout $\bar{\mathcal{K}}$, si (S, A) n'est pas un segment discret).

Ainsi, si $K \in \mathcal{K}$ est donné, soit \bar{K} la réunion des segments $e_{\{x,y\}}$, $\{x, y\} \in A$, qui sont d'intersection non-vide avec K , et $\tilde{K} = \bar{K} \cap S^*$. On vérifie alors d'une part que pour tout $t \geq 1$,

$$\mu_{v_t}(\bar{S} \setminus K) \leq \mu(\tilde{K}')$$

et d'autre part que

$$v_u(K) \geq v_u(\text{Int}(\bar{K})) = v(K)$$

d'où finalement

$$B_t \leq B$$

puis la convergence annoncée. \square

On en déduit via le théorème 14, les inégalités de Hardy sur les arbres discrets :

Proposition 16. *Comme dans le cas des arbres continus, on a l'encadrement*

$$B \leq C \leq 16B$$

Vu l'apparente simplicité de ce résultat, on a cherché à l'obtenir directement par une récurrence, mais nous n'y sommes pas arrivé!

Bibliographie

1. Bobkov, S.G., Götze, F. : Exponential integrability and transportation cost related to logarithmic Sobolev inequalities. Préprint, July (1997)
2. Cheeger, J. : A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacien. In : Gunning, R.C. (ed), Problems in Analysis : A Symposium in Honor of S. Bochner, pages 195–199. Princeton University Press (1970)
3. Diaconis, P., Saloff-Coste, L. : Logarithmic Sobolev inequalities for finite Markov chains. The Ann. App. Probab. **6**(3), 695–750 (1996)
4. Diaconis, P., Stroock, D. : Geometric bounds for eigenvalues of Markov chains. The Ann. App. Probab. **1**(1), 36–61 (1991)
5. Evans, W.D., Harris, D.J., Pick, L. : Weighted Hardy and Poincaré inequalities on trees. Journal of the London Mathematical Society. **52**(2), 121–136 (1995)
6. Jerrum, M., Sinclair, A. : Approximating the permanent. SIAM Journal on Computing. **18**(6), 1149–1178 (1989)
7. Kahale, N. : A semidefinite bound for mixing rates of Markov chains. Préprint, Septembre (1995)
8. Lawler, G., Sokal, A. : Bounds on the L^2 spectrum for Markov chains and Markov processes : a generalization of Cheeger's inequality. Transactions of the American mathematical society. **309**(2), 557–580 (1988)
9. Ledoux, M. : A simple analytic proof of an inequality by P. Buser. Proceedings of the American mathematical society. **121**(3), 951–959 (1994)
10. Miclo, L. : Trous spectraux à basse température : un contre-exemple à un comportement asymptotique escompté. A paraître dans le Séminaire de Probabilités XXXII, (1997)

11. Miclo, L. : Une variante de l'inégalité de Cheeger pour les chaînes de Markov finies. ESAIM : P&S **2**, 1–21 (1998)
12. Mohar, B. : Isoperimetric numbers of graphs. Journal of combinatorial theory, Series B **47**, 274–291 (1989)
13. Rothaus, O.S. : Analytic Inequalities, Isoperimetric Inequalities and Logarithmic Sobolev Inequalities. J. Funct. Anal. **64**, 296–313 (1985)
14. Saloff-Coste, L. : Lectures on finite Markov chains. In Bernard, P. (ed), Lectures on Probability Theory and Statistics. Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXVI-1996, Lecture Notes in Mathematics 1665. Springer-Verlag, Berlin (1997)
15. Sawyer, E. : Weighted Lebesgue and Lorentz norm inequalities for the Hardy operator. Transactions of the American Mathematical Society. **281**(1), 329–337 (1984)
16. Seneta, E. : Non-negative Matrices and Markov Chains. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag (1981)
17. Sinclair, A. : Improved bounds for mixing rates of Markov chains and multicommodity flow. Combinatorics, Probability and Computing, **1**, 351–370 (1992)