Problème de sortie discret et théorèmes limites pour les temps d'occupations du recuit simulé

Laurent Miclo[1]

Laboratoire de Statistique et Probabilités
Université Paul Sabatier et CNRS
118, route de Narbonne
31062 Toulouse cedex, France

Abstract : We consider the classical simulated annealing algorithms associated to a potential U on a finite, connected and reversible graph M, whose temperature at any time $t \geq 0$ is given by $k\ln^{-1}(1+t)$, where $k > c(M,U)$, the critical constant for the process to be ergodic in law. We are interested in the recurrent points for which the strong law of large numbers is not satisfied. Instead, we will see that the finite marginals of the process of renormalised occupation times converge toward those of an independent increments process of jumps. To prove this result, we will be lead to resolve a discrete exit problem, for which we get a strong convergence of the renormalised exit time and exit position toward a law we will describe explicitly.

Key words : Simulated Annealing, Discret Exit Problem, Limit Theorems for Occupation Times, Independent Increments Processes of Jumps.

Résumé : On considère les algorithmes de recuit simulé classiquement associés à un potentiel U sur un graphe fini irréductible et réversible M, dont la décroissance de la température est donnée par $t \mapsto k\ln^{-1}(1+t)$, avec $k > c(M,U)$, la constante qui assure l'ergodicité en loi du processus. On s'intéresse aux points récurrents qui ne satisfont pas la loi forte des grands nombres et on obtient à la place la convergence des marginales finies des processus des temps d'occupations convenablement renormalisés vers les marginales correspondantes d'un processus à accroissements indépendants de sauts. Pour prouver ceci, on a été amené à résoudre le problème de sortie discret, en obtenant notamment une convergence forte du couple formé du temps de sortie renormalisé et de la position de sortie vers une loi que l'on décrira explicitement.

[1] Ce travail a été effectué à l'Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS, Strasbourg, France

1 Introduction et rappels

Cet article est la suite de [18] et répond à l'une des questions qui y était restée ouverte.

Rappelons succinctement le cadre : On considère les algorithmes de recuit simulé $(X_t)_{t\geq 0}$ sur un graphe (M, q, μ) irréductible et réversible (mais on ne supposera pas ici que $q = (q(x,y))_{x,y\in M}$ est normalisé en un noyau de probabilités de transitions, d'ailleurs ses valeurs diagonales ne joueront aucun rôle ; il suffit de se donner une famille $(q(x,y))_{x\neq y\in M}$ de réels positifs qui soit réversible par rapport à la probabilité μ ($\forall\ x \neq y \in M$, $\mu(x)q(x,y) = \mu(y)q(y,x)$) et telle que le graphe (G, q) soit connexe), qui sont classiquement associés à une fonction U (supposée normalisée de manière à ce que $\min_M U = 0$) et à une évolution de l'inverse de la température donnée par

$$\beta_t = k^{-1}\ln(1+t)$$

avec $k > c(M, U)$, la constante qui assure l'ergodicité en loi du processus (voir ci-dessous).

Ainsi l'intensité de saut de x à y à l'instant $t \geq 0$ est donnée par

$$\forall\ x \neq y \in M, \qquad q_{\beta_t}(x,y) = \exp(-\beta_t(U(y) - U(x))_+)q(x,y)$$

On s'intéresse aux temps d'occupations d'un tel processus, qui sont définis par

$$\forall\ x_0 \in M,\ \forall\ t \geq 0, \qquad G_t(x_0) = \int_0^t \mathbb{1}_{\{x_0\}}(X_s)\, ds$$

On introduit pour cela les sous-ensembles suivant de M, qui vont en déterminer différent comportements asymptotiques :

• $N = \{z \in M \,/\, U(z) = 0\}$ est l'ensemble des minima globaux de U

• $\widetilde{M}$ est la composante connexe (pour le noyau d'intensités de transitions q) de l'ensemble $\{x \in M \,/ U(x) < k\}$ qui contient N

• $\widehat{M}$ est la composante connexe de l'ensemble $\{x \in M \,/ U(x) \leq k\}$ qui contient N

• $\widehat{M} = \widetilde{M} \sqcup \{x \in \widehat{M} \,/\, U(x) = k\}$

On aura remarqué que l'hypothèse $k > c(M, U)$ assure que $\widetilde{M}$ et $\widehat{M}$ existent bien. Soit également μ_{β_t} la probabilité invariante (qui est aussi réversible ici) instantannée au temps t relative à cet algorithme : il s'agit de la probabilité de Gibbs associée à la température β_t^{-1} et à la fonction U, définie par

$$\forall\ x \in M, \qquad \mu_{\beta_t}(x) = Z_{\beta_t}^{-1}\exp(-\beta_t U(x))\mu(x)$$

Z_{β_t} étant la constante de normalisation.

On pose pour $x_0 \in M$,

$$g_t(x_0) = \int_0^t \mu_{\beta_s}(x_0)\, ds$$

On a vu dans [18] que $\widehat{M}$ est l'ensemble des points récurrents (ainsi pour $x_0 \notin \widehat{M}$, la quantité $G_t(x_0)$ finit p.s. par être stationnaire en temps grand) et que pour $x_0 \in \widehat{M}$, les temps d'occupations satisfont une loi forte des grands nombres : p.s.,

$$\lim_{t\to+\infty} g_t(x_0)^{-1}G_t(x_0) = 1$$

(si M est un arbre et si $\widehat{M}{=}\widetilde{M}$, on peut également préciser le comportement asymptotique des fluctuations renormalisées de $G_t(x_0)$ autour de $g_t(x_0)$: existence ou non d'un théorème de la limite centrale fonctionnel et d'une loi du logarithme itéré).

Mais il restait à comprendre le comportement asymptotique des temps d'occupations de points $x_0 \in \widehat{M} \setminus \widehat{M}$. Comme on va le voir et comme le laissait suggérer un contre-exemple présenté par Gantert [8], la loi des grands nombres n'est plus satisfaite dans ce cas. Plus précisément, soit $(G_s^{(t)}(x_0))_{s\geq 0}$ la famille (pour $t > 0$) des processus de temps d'occupations renormalisés définis par

$$\forall\ s \geq 0, \qquad G_s^{(t)}(x_0) = g_t(x_0)^{-1} G_{st}(x_0)$$

Le principal but de cet article est d'obtenir la convergence étroite des marginales finies de ces processus vers les marginales correspondantes d'un processus (non déterministe) de sauts à accroissements indépendants. Néanmoins, la résolution du problème de sortie discret dans la section suivante peut également être intéressante en elle-même, car on espère lui trouver de nouvelles applications et la généraliser à d'autres situations.

Pour finir cette introduction, rappelons quelques notations et deux résultats de [18] qui seront à la base de la démonstration de la convergence mentionnée ci-dessus.

Pour $t \geq 0$, notons L_{β_t} le générateur de l'algorithme à l'instant t : il agit sur l'ensemble $F(M)$ des fonctions définies sur M par

$$\forall\ \phi \in F(M),\ \forall\ x \in M, \qquad L_{\beta_t}\phi(x) = \sum_{y\in M} (\phi(y) - \phi(x)) q_{\beta_t}(x, y)$$

Pour $x_0 \in M$ et $t \geq 0$ fixés, soit $\psi_{\beta_t,x_0}^{M,U} \in F(M)$ l'unique solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{1}_{\{x_0\}}(\,\cdot\,) - \mu_{\beta_t}(x_0) & = & L_{\beta_t}\psi_{\beta_t,x_0}^{M,U}(\,\cdot\,) \\ \mu_{\beta_t}(\psi_{\beta_t,x_0}^{M,U}) & = & 0 \end{array} \right.$$

Cette fonction est aussi appelée le potentiel associé à l'indicatrice $\mathbb{1}_{\{x_0\}}$ (et au générateur L_{β_t}).

Pour $x, y \in M$, soit $\mathcal{C}_{x,y}$ l'ensemble des chemins allant de x à y, i.e. l'ensemble des suites $p = (p(i))_{1\leq i\leq n}$ d'éléments de M telles que $p(1) = x$, $p(n) = y$ et satisfaisant pour tout $1 \leq i < n$, $q(p(i), p(i + 1)) > 0$. On note $e(p)$ l'élévation pour U d'un tel chemin p,

$$e(p) = \max_{1\leq i\leq n} U(p(i))$$

puis on définit

$$H(x, y) = \min_{p\in\mathcal{C}_{x,y}} e(p)$$

et

$$V_{M,U}(x) = \max_{y\in M}[H(x, y) - U(x) - U(y)] \geq 0$$

(profitons-en pour rappeler que $c(M, U) = \max_{x\in M} V_{M,U}(x)$).

Proposition 1

> Notons $\|\ \|_M$ la norme sup sur $F(M)$. Il existe alors une constante $K > 0$ telle que pour tout $t \geq 0$ et tout $x_0 \in M$,
>
> $$\left\|\psi_{\beta_t,x_0}^{M,U}\right\|_M \leq K \exp(\beta_t V_{M,U}(x_0))$$

(cf. la formule (4) de la section 2 de [18]).

De plus, on sait que pour tout $x \in G$ fixé, $\psi_{\beta_t,x_0}^{M,U}(x)$ s'exprime comme une fraction rationnelle (indépendante de β_t dans ses coefficients) en les variables $(q_{\beta_t}(v, w))_{v,w\in M}$ et on déduit donc du résultat précédent l'estimée suivante (voir la proposition 5 de [18]) :

Corollaire 2

Il existe des constantes $K' > 0$ et $\delta > 0$ telles que pour tout $t \geq 0$ et tout $x_0 \in M$,
- si $V_{M,U}(x_0) > 0$, $\left\|\partial_t \psi^{M,U}_{\beta_t,x_0}\right\| \leq K' \exp[\beta_t(V_{M,U}(x_0) - k)]$
- si $V_{M,U}(x_0) = 0$, $\left\|\partial_t \psi^{M,U}_{\beta_t,x_0}\right\| \leq K' \exp[-\beta_t(k + \delta)]$

C'est en se servant de ces majorations que l'on a également pu montrer le résultat suivant qui est un renforcement de la loi forte des grands nombres (mais attention, ce qui suit est faux pour $x_0 \in \widehat{M} \setminus \widetilde{M}$ et $l > k^{-1}U(x_0) - 1$) :

Proposition 3

Soient $l \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tels que pour t grand on ait

$$f(t) \sim t^l$$

Alors, pour $x_0 \in \widetilde{M}$, si $l < k^{-1}U(x_0) - 1$, l'expression

$$\int_0^t f(s) \mathbb{1}_{\{x_0\}}(X_s)\, ds$$

converge p.s. en temps grand, et si $l \geq k^{-1}U(x_0) - 1$, on a p.s.

$$\lim_{t \to +\infty} \left(\int_0^t f(s) \mu_{\beta_s}(x_0)\, ds\right)^{-1} \int_0^t f(s) \mathbb{1}_{\{x_0\}}(X_s)\, ds = 1$$

(cf. la proposition 9 de la section 3 de [18], en fait on y a pris $f(t) = (1+t)^{k^{-1}l}$, mais la généralisation précédente est immédiate).

2 Le problème de sortie discret

On va résoudre ici le problème de sortie associé à une fonction U sur un graphe irréductible et réversible (G, q, μ) satisfaisant certaines conditions. Ceci permettra de décrire dans la section suivante les processus à accroissements indépendants qui apparaissent comme limites des processus renormalisés de temps d'occupations en des points $x_0 \in \widehat{M} \setminus \widehat{M}$.

Comme d'habitude, on ajoute éventuellement une constante à la fonction U pour qu'elle satisfasse $\min_M U = 0$. Soit A un sous-graphe connexe de G tel que $\partial A \stackrel{\text{déf}}{=} G \setminus A \neq \emptyset$ et tel que ∂A soit constitué de points isolés dans ∂A : pour tous $x \neq y$ dans ∂A, $q(x, y) = 0$ (ainsi pour tout $x \in \partial A$, il existe $y \in A$ tel que $q(y, x) > 0$). On fait également l'hypothèse que ∂A est strictement au dessus de A pour U :

$$(1) \qquad \delta \stackrel{\text{déf}}{=} \min_{\partial A} U > \max_A U$$

Soit $k > \delta$, pour tout $s \geq 0$ fixé et tout $t \geq 0$, on note

$$\beta_t^{(s)} = \beta_{t+s} = k^{-1} \ln(1 + s + t)$$

On considère un algorithme de recuit simulé $(X_t^{(s)})_{t \geq 0}$ sur (G, q, μ) associé à la fonction U et à l'évolution de l'inverse de la température $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \beta_t^{(s)}$, dont la probabilité initiale $m^{(s)}$ (i.e. la loi de $X_0^{(s)}$) est portée par A.

Soit

$$T^{(s)} = \inf\{t \geq 0 \,/\, X_t^{(s)} \in \partial A\}$$

et

$$Y^{(s)} = X_{T^{(s)}}^{(s)}$$

(du fait que $k > \delta$, il existe au moins un point de ∂A qui est récurrent pour $X^{(s)}$, on a donc p.s. $T^{(s)} < +\infty$, ce qui montre que $Y^{(s)}$ est bien défini p.s.)

Le problème de sortie consiste à décrire quand s devient grand le comportement asymptotique en loi du couple $(T^{(s)}, Y^{(s)})$, mais cette question a surtout été étudiée dans le cas d'une diffusion (dont le terme du second ordre tend vers 0 et dont la dérive ne provient pas nécessairement d'un potentiel, cf. par exemple [7], [3] et [4]) sur un espace continu à bord. Dans le cas relativement plus simple d'un espace discret muni d'un potentiel a priori, on peut résoudre entièrement ce problème :

Soit l'ensemble

$$B = \{x \in \partial A \,/\, U(x) = \delta\}$$

et la probabilité r sur ∂A donnée par

$$\forall\, x \in \partial A, \qquad r(x) = \begin{cases} R\mu^{-1}(B) \sum_{y \in A} \alpha(x,y) & \text{, si } x \in B \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha(x,y) &= \mu(x)q(x,y) \qquad (= \alpha(y,x), \text{ par l'hypothèse de réversibilité}) \\ R &= \left(\mu^{-1}(B) \sum_{z \in B,\, y \in A} \alpha(z,y)\right)^{-1} \end{aligned}$$

Théorème 4

Quand s devient grand, on a la convergence étroite (sur $\mathbb{R}_+ \times \partial A$) du couple $(\mu_{\beta_0^{(s)}}(\partial A) T^{(s)}, Y^{(s)})$ vers $\mathcal{E}(R) \otimes r$, où $\mathcal{E}(R)$ est une loi exponentielle de moyenne R.

En fait, on prouvera une convergence plus forte que la convergence étroite et on précisera les vitesses de convergence (voir les propositions 7 et 8 ci-dessous). On verra également que l'on peut assouplir la condition (1), puis on étudiera à la fin cette section le cas où $k = \delta$, pour obtenir une convergence vers une autre loi.

Démonstration :

Remarquons que sans perdre de généralité, on peut supposer que pour tout $x \in \partial A$, il existe un unique $y \in A$ tel que $q(y,x) > 0$.

En effet, si à l'un des $x_0 \in \partial A$ il correspond plusieurs $y \in A$ tels que $q(y,x) > 0$, disons $y_1, \cdots, y_n$, il suffit d'agrandir ∂A en "démultipliant" ce point x_0 en $x_1, \cdots, x_n$ et en considérant le nouveau graphe $\overline{G} = (G \setminus \{x_0\}) \sqcup \{x_1, \cdots, x_n\}$ muni de $(\bar{q}, \bar{\mu})$ et de $\overline{U}$ définis par

$$\forall\, x \neq y \in \overline{G}, \qquad \bar{q}(x,y) = \begin{cases} q(x,y) & \text{, si } x \in G \setminus \{x_0, y_1, \cdots, y_n\} \text{ et } y \in G \setminus \{x_0\} \\ q(x,y) & \text{, si } x \in \{y_1, \cdots, y_n\} \text{ et } y \in G \setminus \{x_0\} \\ q(y_i, x_0) & \text{, si } x = y_i \text{ et } y = x_i \text{ (avec } 1 \leq i \leq n) \\ nq(x_0, y) & \text{, si } x = x_i \text{ et } y = y_i \text{ (avec } 1 \leq i \leq n) \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases}$$

$$\forall\, x \in \overline{G}, \qquad \bar{\mu}(x) = \begin{cases} \mu(x) & \text{, si } x \in G \setminus \{x_0\} \\ n^{-1}\mu(x_0) & \text{, si } x \in \{x_1, \cdots, x_n\} \end{cases}$$

(on aura noté que $\bar{q}$ est irréductible et réversible par rapport à $\bar{\mu}$) et

$$\forall\ x \in \overline{G}, \qquad \overline{U}(x) = \begin{cases} U(x) & \text{, si } x \in G \setminus \{x_0\} \\ U(x_0) & \text{, si } x \in \{x_1, \cdots, x_n\} \end{cases}$$

Puis on procède de la même manière pour tous les points de ∂A qui peuvent être atteint par plusieurs points de A. Notons que l'on peut faire coïncider les temps d'entrée de ∂A sur le graphe ainsi obtenu et sur le graphe initial, et que pour obtenir la position de sortie pour G, il suffit de regrouper les points démultipliés qui correspondent à un point de ce graphe.

Le théorème étant "stable" par cette opération, on supposera désormais que $\partial A = \{a_1, \cdots, a_l\}$ et que pour tout $1 \leq i \leq l$, il existe un unique $b_i \in A$ tel que $q(b_i, a_i) > 0$.

Soit $1 \leq i \leq l$ fixé, pour tout $t \geq 0$, on note $\psi_t^{(s,i)}$ $(=\psi^{G,U}_{\beta_t^{(s)},a_i}$ avec les notations de la section précédente) l'unique fonction de $F(G)$ solution de

$$\begin{cases} \mathbb{1}_{\{a_i\}} - \mu_{\beta_t^{(s)}}(a_i) &= L_{\beta_t^{(s)}}\psi_t^{(s,i)} \\ \mu_{\beta_t^{(s)}}(\psi_t^{(s,i)}) &= 0 \end{cases}$$

L'intérêt de ce potentiel est que pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \psi^{(s,i)}_{t\wedge T^{(s)}}(X^{(s)}_{t\wedge T^{(s)}}) &= \psi_0^{(s,i)}(X_0^{(s)}) + \int_0^{t\wedge T^{(s)}} \partial_u \psi_u^{(s,i)}(X_u^{(s)})\,du + \int_0^{t\wedge T^{(s)}} L_{\beta_u^{(s)}}\psi_u^{(s,i)}(X_u^{(s)})\,du + M^{\psi^{(s,i)}}_{t\wedge T^{(s)}} \\ &= \psi_0^{(s,i)}(X_0^{(s)}) + \int_0^{t\wedge T^{(s)}} \partial_u \psi_u^{(s,i)}(X_u^{(s)})\,du - \int_0^{t\wedge T^{(s)}} \mu_{\beta_u^{(s)}}(a_i)\,du + M^{\psi^{(s,i)}}_{t\wedge T^{(s)}} \end{aligned}$$

où $(M_t^{\psi^{(s,i)}})_{t\geq 0}$ est une martingale nulle en 0. Ainsi, en utilisant le théorème d'arrêt, on obtient que pour tout $t \geq 0$,

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\mathbb{E}[\psi^{(s,i)}_{t\wedge T^{(s)}}(X^{(s)}_{t\wedge T^{(s)}})] \\ &= \mathbb{E}[\psi_0^{(s,i)}(X_0^{(s)})] + \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge T^{(s)}} \partial_u \psi_u^{(s,i)}(X_u^{(s)})\,du\right] - \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge T^{(s)}} \mu_{\beta_u^{(s)}}(a_i)\,du\right] \end{aligned}$$

Cependant, on sait bien estimer $\psi_t^{(s,i)}$:

__**Lemme 5**__

> Il existe deux constantes $K_1 > 0$ et $\eta_1 > 0$ telles que pour tous $s, t \geq 0$,
>
> $$\left\|\psi_t^{(s,i)} + q(a_i, b_i)^{-1}\mathbb{1}_{\{a_i\}}\right\|_G \leq K_1 \exp(-\eta_1 \beta_t^{(s)})$$

Ce lemme n'est pas sans rappeler la technique de couche-frontière (boundary layer) employée par Matkowsky et Schuss [16] (et justifiée sous certaines conditions par Kamin [14] et Devinatz et Friedman [5], voir le compte rendu de Day contenu dans [3]) pour étudier le problème de sortie continu, mais il a été suggéré ici par le fait suivant : si on suppose de plus que (G, q, μ) est un arbre, on sait calculer explicitement $\psi_t^{(s,i)}$ (cf. la section 4 de [18]) et l'expression obtenue se comporte alors comme décrit dans le lemme.

Démonstration du lemme :

L'indice $1 \leq i \leq l$ étant fixé, soient les deux fonctions de $F(G)$, $\phi_t^{(s)} = -(1-\mu_{\beta_t^{(s)}}(a_i))q(a_i, b_i)^{-1}$ $[\mathbb{1}_{\{a_i\}} - \mu_{\beta_t^{(s)}}(a_i)]$ et $\varphi_t^{(s)} = \psi_t^{(s,i)} - \phi_t^{(s)}$. Du fait de l'unicité de b_i, on calcule que

$$L_{\beta_t^{(s)}}\phi_t^{(s)} = (1 - \mu_{\beta_t^{(s)}}(a_i))[\mathbb{1}_{\{a_i\}} - \mu_{\beta_t^{(s)}}(a_i)\mu^{-1}_{\beta_t^{(s)}}(b_i)\mathbb{1}_{\{b_i\}}]$$

ainsi

$$L_{\beta_t^{(s)}}\varphi_t^{(s)} = (1-\mu_{\beta_t^{(s)}}(a_i))\mu_{\beta_t^{(s)}}(a_i)\mu^{-1}_{\beta_t^{(s)}}(b_i)\mathbb{I}_{\{b_i\}} - \mu_{\beta_t^{(s)}}(a_i)\mathbb{I}_{G\setminus\{a_i\}}$$

On a donc notamment $L_{\beta_t^{(s)}}\varphi_t^{(s)}(a_i)=0$, c'est-à-dire ici

(3) $$\varphi_t^{(s)}(a_i) = \varphi_t^{(s)}(b_i)$$

Notons $\widetilde{G} = G\setminus\{a_i\}$, $\widetilde{L}_{\beta_t^{(s)}}$ la “restriction” de $L_{\beta_t^{(s)}}$ à $F(\widetilde{G})$ qui est définie par

$$\forall\ f\in F(\widetilde{G}),\ \forall\ x\in\widetilde{G},\qquad \widetilde{L}_{\beta_t^{(s)}}f(x) = \sum_{y\in\widetilde{G}}(f(y)-f(x))q_{\beta_t^{(s)}}(x,y)$$

et pour toute fonction $f\in F(G)$, $\widetilde{f}$ la restriction de f à $\widetilde{G}$.

La remarque précédente (3) montre alors que

$$\widetilde{L_{\beta_t^{(s)}}\varphi_t^{(s)}} = \widetilde{L}_{\beta_t^{(s)}}\widetilde{\varphi}_t^{(s)}$$

Soit $\widehat{\phi}_t^{(s)}\in F(\widetilde{G})$ l'unique solution de

$$\begin{cases} \mathbb{I}_{\{b_i\}} - \widetilde{\mu}_{\beta_t^{(s)}}(b_i) &= \widetilde{L}_{\beta_t^{(s)}}\widehat{\phi}_t^{(s)} \\ \widetilde{\mu}_{\beta_t^{(s)}}(\widehat{\phi}_t^{(s)}) &= 0 \end{cases}$$

où $\widetilde{\mu}_{\beta_t^{(s)}}$ est l'unique probabilité invariante sur $\widetilde{G}$ associée à $\widetilde{L}_{\beta_t^{(s)}}$ (du fait de l'hypothèse de réversiblité, il est clair que $\widetilde{\mu}_{\beta_t^{(s)}}$ est aussi la renormalisation de la restriction de $\mu_{\beta_t^{(s)}}$ à $\widetilde{G}$). On a alors

$$\widetilde{\varphi}_t^{(s)} = (1-\mu_{\beta_t^{(s)}}(a_i))\mu_{\beta_t^{(s)}}(a_i)\mu^{-1}_{\beta_t^{(s)}}(b_i)\widehat{\phi}_t^{(s)} + \widetilde{\mu}_{\beta_t^{(s)}}(\widetilde{\varphi}_t^{(s)})$$

Cependant, d'après la proposition 1, il existe une constante $K_2>0$ telle que pour tous $t,s\geq 0$,

$$\left\|\widehat{\phi}_t^{(s)}\right\|_{\widetilde{G}} \leq K_2\exp(\beta_t^{(s)}V_{\widetilde{G},\widetilde{U}}(b_i))$$

et vu la forme de $\widetilde{G}$, on vérifie facilement que $V_{\widetilde{G},\widetilde{U}}(b_i)+U(b_i)\leq \max_A U < U(a_i)$.

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mu}_{\beta_t^{(s)}}(\widetilde{\varphi}_t^{(s)}) &= (1-\mu_{\beta_t^{(s)}}(a_i))^{-1}\mu_{\beta_t^{(s)}}(\varphi_t^{(s)}\mathbb{I}_{\widetilde{G}}) \\
&= (1-\mu_{\beta_t^{(s)}}(a_i))^{-1}[\mu_{\beta_t^{(s)}}(\varphi_t^{(s)}) - \mu_{\beta_t^{(s)}}(a_i)\varphi_t^{(s)}(a_i)] \\
&= -(1-\mu_{\beta_t^{(s)}}(a_i))^{-1}\mu_{\beta_t^{(s)}}(a_i)\varphi_t^{(s)}(a_i) \\
&= -(1-\mu_{\beta_t^{(s)}}(a_i))^{-1}\mu_{\beta_t^{(s)}}(a_i)\widetilde{\varphi}_t^{(s)}(b_i) \\
&= -(1-\mu_{\beta_t^{(s)}}(a_i))^{-1}\mu_{\beta_t^{(s)}}(a_i)[(1-\mu_{\beta_t^{(s)}}(a_i))\mu_{\beta_t^{(s)}}(a_i)\mu^{-1}_{\beta_t^{(s)}}(b_i)\widehat{\phi}_t^{(s)}(b_i) + \widetilde{\mu}_{\beta_t^{(s)}}(\widetilde{\varphi}_t^{(s)})]
\end{aligned}$$

d'où

$$\widetilde{\mu}_{\beta_t^{(s)}}(\widetilde{\varphi}_t^{(s)}) = [1+(1-\mu_{\beta_t^{(s)}}(a_i))^{-1}\mu_{\beta_t^{(s)}}(a_i)]^{-1}\mu_{\beta_t^{(s)}}(a_i)^2\mu^{-1}_{\beta_t^{(s)}}(b_i)\widehat{\phi}_t^{(s)}(b_i)$$

En regroupant les résultats ci-dessus, on obtient donc que pour une certaine constante $K_3>0$ indépendante de $t,s\geq 0$,

$$\left\|\varphi_t^{(s)}\right\|_G = \left\|\widetilde{\varphi}_t^{(s)}\right\|_{\widetilde{G}} \leq K_3\exp(-\eta_1\beta_t^{(s)})$$

avec $\eta_1 = \min_{a\in\partial A} U(a) - \max_A U > 0$ et la majoration annoncée découle alors du fait que l'on a aussi pour une autre constante $K_4 > 0$,

$$\left\|\phi_t^{(s)} + q(a_i,b_i)^{-1}\mathbb{1}_{\{a_i\}}\right\| \leq K_4 \exp(-\beta_t^{(s)} U(a_i))$$

□

Et puisque que pour tout $x \in G$ fixé, $\psi_t^{(s,i)}(x)$ s'exprime comme une fraction rationnelle en les variables $(q_{\beta_t^{(s)}}(v,w))_{v,w\in G}$, on déduit du résultat précédent l'estimée suivante (voir aussi le corollaire 2) :

Corollaire 6

Il existe une constante $K_5 > 0$, telle que pour tous $s,t \geq 0$ et tout $x \in G \setminus \{a_i\}$,

$$\left|\partial_t \psi_t^{(s,i)}(x)\right| \leq K_5 \exp[-(\eta_1 + k)\beta_t^{(s)}]$$

En appliquant ces estimées à (2), on obtient qu'il existe une constante $K_6 > 0$ telle que pour tous $s,t \geq 0$

$$\left|\mathbb{E}\left[q(a_i,b_i)^{-1}\mathbb{1}_{\{a_i\}}(X_{t\wedge T^{(s)}}^{(s)}) - \int_0^{t\wedge T^{(s)}} \mu_{\beta_u^{(s)}}(a_i)\,du\right]\right| \leq K_6 \exp(-\eta_1 \beta_0^{(s)})$$

Posons $\widetilde{T}^{(s)} = \mu_{\beta_0^{(s)}}(\partial A) T^{(s)}$ et remplaçons t par $\mu_{\beta_0^{(s)}}(\partial A)^{-1} t$ dans l'expression ci-dessus, pour obtenir après un changement de variable dans l'intégrale

$$\left|q(a_i,b_i)^{-1}\mathbb{P}\left[t \geq \widetilde{T}^{(s)}, Y^{(s)} = a_i\right] - \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\widetilde{T}^{(s)}} \mu_{\beta_{b_s u}^{(s)}}(a_i) b_s\,du\right]\right| \leq K_6 \exp(-\eta_1 \beta_0^{(s)}) \tag{4}$$

avec

$$\begin{aligned} b_s &= \mu_{\beta_0^{(s)}}^{-1}(\partial A) \\ &= Z_{\beta_0^{(s)}} \left(\sum_{z\in\partial A} \mu(z) \exp(-\beta_0^{(s)} U(z))\right)^{-1} \end{aligned}$$

Il est clair sur cette expression qu'il existe une constante $K_7 > 1$ telle que pour tout $s \geq 0$,

$$K_7(1+s)^{k^{-1}\delta} \geq b_s \geq K_7^{-1}(1+s)^{k^{-1}\delta}$$

et puisque

$$\begin{aligned} \mu_{\beta_{b_s u}^{(s)}}(a_i) &= Z_{\beta_{b_s u}^{(s)}}^{-1} \exp(-\beta_{b_s u} U(a_i))\mu(a_i) \\ &= Z_{\beta_{b_s u}^{(s)}}^{-1} \mu(a_i)(1+s+b_s u)^{-k^{-1}U(a_i)} \end{aligned}$$

on en déduit qu'il existe une constante $K_8 > 0$ telle que pour tout $s \geq 0$ et tout $0 \leq u \leq t \wedge \widetilde{T}^{(s)}$,

$$\mu_{\beta_{b_s u}^{(s)}}(a_i) \geq K_8[(1+s) + (1+s)^{k^{-1}\delta}(t\wedge\widetilde{T}^{(s)})]^{-k^{-1}U(a_i)}$$

puis que

$$\int_0^{t\wedge\widetilde{T}^{(s)}} \mu_{\beta_{b_s u}^{(s)}}(a_i) b_s\,du \geq K_7^{-1}K_8(1+s)^{k^{-1}\delta}[(1+s) + (1+s)^{k^{-1}\delta}(t\wedge\widetilde{T}^{(s)})]^{-k^{-1}U(a_i)}(t\wedge\widetilde{T}^{(s)})$$

Supposons momentanément que a_i ai été choisi tel que $U(a_i) = \delta$, on a alors pour une certaine constante $K_9 > 0$ indépendante de $s, t \geq 0$,

$$\begin{aligned}(1+s)^{k^{-1}\delta}[(1+s) + (1+s)^{k^{-1}\delta}(t \wedge \widetilde{T}^{(s)})]^{-k^{-1}U(a_i)}&(t \wedge \widetilde{T}^{(s)}) \\ &= \frac{t \wedge \widetilde{T}^{(s)}}{[1 + (1+s)^{k^{-1}\delta - 1}(t \wedge \widetilde{T}^{(s)})]^{k^{-1}\delta}} \\ &\geq K_9[(t \wedge \widetilde{T}^{(s)})^{1-k^{-1}\delta} - 1]\end{aligned}$$

ce qui permet de voir, en utilisant (4) et en faisant tendre t vers l'infini, que

$$\max_{s \geq 0} \mathbb{E}[(\widetilde{T}^{(s)})^{1-k^{-1}\delta}] < +\infty \tag{5}$$

En se servant du critère de tension de Prokhorov, on obtient donc que la famille des lois de $\widetilde{T}^{(s)}$ pour $s \in \mathbb{R}_+$, est relativement compacte pour la topologie étroite sur $\mathbb{R}_+$, et il s'en suit immédiatement qu'il en est de même pour la famille des lois de $(\widetilde{T}^{(s)}, Y^{(s)})$ sur $\mathbb{R}_+ \times \partial A$, pour $s \in \mathbb{R}_+$.

Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ tendant vers $+\infty$ telle que les lois de $(\widetilde{T}^{(s_n)}, Y^{(s_n)})$ convergent. Soit $(\widetilde{T}, Y)$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \times \partial A$ qui admet cette loi limite.

On suppose à nouveau que $1 \leq i \leq l$ est fixé quelconque, sans l'hypothèse $U(a_i) = \delta$.

Notons que pour tout $t \geq 0$ fixé, on a la convergence uniforme en $0 \leq t' \leq t$, quand s devient grand, de

$$\int_0^{t'} \mu_{\beta^{(s)}_{b_s u}}(a_i) b_s \, du$$

vers

$$\begin{cases} \mu^{-1}(B)\mu(a_i)t' & , \text{si } U(a_i) = \delta \\ 0 & , \text{si } U(a_i) > \delta \end{cases}$$

Ainsi de la continuité de l'application $[0, t] \ni t' \mapsto t \wedge t'$, on obtient que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{t \wedge \widetilde{T}^{(s_n)}} \mu_{\beta^{(s_n)}_{b_{s_n} u}}(a_i) b_{s_n} \, du\right] \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \mu^{-1}(B)\mu(a_i)\mathbb{E}[t \wedge \widetilde{T}] & , \text{si } U(a_i) = \delta \\ 0 & , \text{si } U(a_i) > \delta \end{cases}$$

Par ailleurs, supposons que $t \geq 0$ ne soit pas un atome de $\widetilde{T}$ (i.e. t est tel que $\mathbb{P}[\widetilde{T} = t] = 0$), alors on a aussi

$$\mathbb{P}\left[t \geq \widetilde{T}^{(s_n)}, Y^{(s_n)} = a_i\right] \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left[t \geq \widetilde{T}, Y = a_i\right]$$

ce qui permet de voir, d'après (4), que

$$\mathbb{P}\left[t \geq \widetilde{T}, Y = a_i\right] = \begin{cases} \mu^{-1}(B)\alpha(a_i, b_i)\mathbb{E}[t \wedge \widetilde{T}] & , \text{si } U(a_i) = \delta \\ 0 & , \text{si } U(a_i) > \delta \end{cases} \tag{6}$$

En sommant ces égalités pour $1 \leq i \leq l$, on obtient

$$\mathbb{P}\left[t \geq \widetilde{T}\right] = R^{-1}\mathbb{E}[t \wedge \widetilde{T}]$$

Du fait que le membre de droite est continu en $t \in \mathbb{R}_+$ et que le nombre d'atomes de $\widetilde{T}$ est au plus dénombrable, on voit a posteriori que $\widetilde{T}$ ne peut pas avoir d'atome et par conséquence que l'expression ci-dessus est satisfaite pour tout $t \geq 0$. En dérivant le membre de droite par rapport à t, il apparaît facilement que $\widetilde{T}$ est nécessairement un temps exponentiel de moyenne R.

L'égalité (6) se réécrit alors aussi

$$I\!P\left[t \geq \widetilde{T}, Y = a_i\right] = r(a_i) I\!P\left[t \geq \widetilde{T}\right]$$

ce qui montre que $\widetilde{T}$ et Y sont indépendants et que r est la loi de Y.

La loi du couple $(\widetilde{T}, Y)$ est donc uniquement déterminée par les équations (6), et la relative compacité en loi de la famille $(T^{(s)}, Y^{(s)})_{s\geq 0}$ permet alors de conclure que quand s devient grand

$$(\widetilde{T}^{(s)}, Y^{(s)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{E}(R) \otimes r$$

$\square$

Remarquons qu'outre l'inégalité $k > \delta$, ce qui est important dans la démonstration ci-dessus, c'est que pour tout $b \in A$ pour lequel il existe $a \in \partial A$ tel que $q(b,a) > 0$, on ait

(7) $$V_{M\setminus\{a\}, U_{|M\setminus\{a\}}}(b) + U(b) < \delta$$

Dans le théorème 4, on peut donc remplacer l'hypothèse (1) par (7).

De plus, en reprenant ce qui précède, on peut en fait obtenir une convergence plus forte. Rappelons que $\widetilde{T}^{(s)} = \mu_{\beta_0^{(s)}}(\partial A) T^{(s)}$.

Proposition 7

Pour tout $p \geq 0$ fixé, il existe une constante $K(p) > 0$ telle que pour tout $s \geq 0$,

$$I\!E[(\widetilde{T}^{(s)})^{p+1}] \leq K(p)$$

Ainsi, pour toute fonction continue $f : I\!R_+ \times \partial A \to I\!R$ à croissance en l'infini au plus polynômiale (i.e. pour laquelle il existe deux constantes $K > 0$ et $p \geq 0$ telles que pour tous $t \geq 0$ et $y \in \partial A$, on ait $|f(t,y)| \leq K(1 + t^p)$), on a

$$\lim_{s\to+\infty} I\!E[f(\widetilde{T}^{(s)}, Y^{(s)})] = I\!E[f(\widetilde{T}, Y)]$$

où $\widetilde{T}$ est un temps exponentiel de moyenne R et est indépendant de Y qui est de loi r sur ∂A.

Démonstration :

Il suffit de montrer la première assertion, la seconde en découlant immédiatement grâce au théorème 4.

Soit $p \geq 0$ fixé et pour tous $s, t \geq 0$, notons $f^{(s)}(t, \cdot) \in F(M)$ la fonction définie par

$$f^{(s)}(t, \cdot) = t^p b_s^{-p-1} \mu_{\beta_t^{(s)}}^{-1}(\partial A) \mathbf{1}_{\partial A}(\cdot)$$

où rappelons que $b_s = \mu_{\beta_0^{(s)}}^{-1}(\partial A)$.

L'unique solution $F^{(s)}(t, \cdot) \in F(M)$ de

$$\left\{\begin{array}{rcl} f^{(s)}(t, \cdot) - t^p b_s^{-p-1} & = & L_{\beta_t^{(s)}} F^{(s)}(t, \cdot) \\ \mu_{\beta_t^{(s)}}(F^{(s)}(t, \cdot)) & = & 0 \end{array}\right.$$

est alors donnée, en reprenant les notations introduites dans la démonstration du théorème 4, par

$$F^{(s)}(t, \cdot) = t^p b_s^{-p-1} \mu_{\beta_t^{(s)}}^{-1}(\partial A) \sum_{i=1}^{l} \psi_t^{(s,i)}(\cdot)$$

(on s'est également ramené à la situation où $\partial A = \{a_i\,;\,1 \le i \le l\}$ et où pour tout $1 \le i \le l$, il existe un unique $b_i \in A$ tel que $q(b_i, a_i) > 0$).

Ainsi d'après le lemme 5 et le corollaire 6, il existe deux constantes $K_1 > 0$ et $\eta_1 > 0$ telles que

$$\left\| F^{(s)}(t,\,\cdot\,) + t^p b_s^{-p-1} \mu^{-1}_{\beta_t^{(s)}}(\partial A) \sum_{i=1}^{l} q^{-1}(a_i, b_i) \mathbb{1}_{\{a_i\}}(\,\cdot\,) \right\| \le K_1 t^p b_s^{-p-1} \exp((\delta - \eta_1)\beta_t^{(s)})$$

et telles que pour tout $x \in A$,

$$\left| \partial_t F^{(s)}(t, x) \right| \le K_1 t^p b_s^{-p-1} \exp[(\delta - \eta_1 - k)\beta_t^{(s)}]$$

(en effet, on aura remarqué qu'il existe une constante $K_2 > 1$ telle que pour tous $s, t \ge 0$, on ait $K_2^{-1} \exp(-\delta\beta_t^{(s)}) \le \mu_{\beta_t^{(s)}}(\partial A) \le K_2 \exp(-\delta\beta_t^{(s)})$).

De l'égalité suivante, qui s'obtient comme précédemment en appliquant le théorème d'arrêt,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[F^{(s)}(t \wedge T^{(s)}, X_{t \wedge T^{(s)}})] \\ = \; & \mathbb{E}[F^{(s)}(0, X_0)] + \mathbb{E}\left[\int_0^{t \wedge T^{(s)}} \partial_u F^{(s)}(u, X_u^{(s)})\, du\right] - b_s^{-p-1} \mathbb{E}\left[\int_0^{t \wedge T^{(s)}} u^p\, du\right] \end{aligned}$$

il découle alors, après un changement de variables évident, qu'il existe une constante $K_3 > 0$ telle que pour tous $t, s \ge 0$,

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\widetilde{T}^{(s)} \le t\}} b_s^{-1} (\widetilde{T}^{(s)})^p \mu^{-1}_{\beta^{(s)}_{\widetilde{T}^{(s)}}}(\partial A) \sum_{i=1}^{l} q^{-1}(a_i, b_i) \mathbb{1}_{\{Y^{(s)} = a_i\}} - (p+1)^{-1}(t \wedge \widetilde{T}^{(s)})^{p+1} \right] \right| \\ \le \; & K_3 \mathbb{E}\left[(t \wedge \widetilde{T}^{(s)})^p \left(b_s^{-1} \exp\left[(\delta - \eta_1)\beta^{(s)}_{b_s(t \wedge \widetilde{T}^{(s)})} \right] + \int_0^{t \wedge \widetilde{T}^{(s)}} (1 + s + b_s u)^{k^{-1}(\delta - \eta_1 - k)}\, du \right) \right] \\ \le \; & K_3 \mathbb{E}\Bigg[(t \wedge \widetilde{T}^{(s)})^p \Bigg(b_s^{-1} \exp\left[(\delta - \eta_1)\beta^{(s)}_{b_s(t \wedge \widetilde{T}^{(s)})} \right] + [k^{-1}(\delta - \eta_1) b_s]^{-1} \\ & \qquad \left| (1 + s + b_s(t \wedge \widetilde{T}^{(s)}))^{k^{-1}(\delta - \eta_1)} - (1+s)^{k^{-1}(\delta - \eta_1)} \right| \Bigg) \Bigg] \end{aligned}$$

ceci si $\delta - \eta_1 > 0$, ce que l'on peut toujours supposer satisfait, quitte à prendre η_1 plus petit que celui donné par le lemme 5.

L'inégalité précédente implique que pour une certaine constante $K_4 > 0$, on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[(t \wedge \widetilde{T}^{(s)})^{p+1} \right] \\ \le \; & K_4 \Bigg(b_s^{-1} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\widetilde{T}^{(s)} \le t\}} (\widetilde{T}^{(s)})^p \exp(\delta\beta^{(s)}_{\widetilde{T}^{(s)}}) \right] + b_s^{-1} \mathbb{E}\left[(t \wedge \widetilde{T}^{(s)})^p \exp(\delta\beta^{(s)}_{b_s(t \wedge \widetilde{T}^{(s)})}) \right] \exp[-\eta_1 \beta_0^{(s)}] \\ & + b_s^{-1}(1+s)^{k^{-1}(\delta - \eta_1)} \Bigg) \\ \le \; & K_5 \left(b_s^{-1} \mathbb{E}\left[(t \wedge \widetilde{T}^{(s)})^p \exp(\delta\beta^{(s)}_{t \wedge \widetilde{T}^{(s)}}) \right] + (1+s)^{-k^{-1}\eta_1} \right) \\ \le \; & K_6 \left((1+s)^{-k^{-1}\delta} \mathbb{E}\left[(t \wedge \widetilde{T}^{(s)})^p (1 + s + (1+s)^{k^{-1}\delta} t \wedge \widetilde{T}^{(s)})^{k^{-1}\delta} \right] + 1 \right) \\ \le \; & K_6 \left(\mathbb{E}\left[(t \wedge \widetilde{T}^{(s)})^p (1 + (1+s)^{k^{-1}\delta - 1} (t \wedge \widetilde{T}^{(s)}))^{k^{-1}\delta} \right] + 1 \right) \\ \le \; & K_7 \left(\mathbb{E}\left[(t \wedge \widetilde{T}^{(s)})^{p + k^{-1}\delta} \right] + 1 \right) \end{aligned}$$

Du fait que $0 < k^{-1}\delta < 1$, on en déduit facilement l'inégalité annoncée.

$\square$

On a donc notamment, pour s grand,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T^{(s)}] &\sim R\mu^{-1}_{\beta_0^{(s)}}(\partial A) \\ &\sim \widetilde{R}(1+s)^{k^{-1}\delta} \end{aligned}$$

avec

$$\widetilde{R} = \left(\mu^{-1}(N_G) \sum_{z\in B,\, y\in A} \alpha(z,y)\right)^{-1}$$

où N_G est l'ensemble des minima globaux de U sur G (ou sur A).

Ce résultat précise les estimées de la moyenne du temps de sortie que l'on aurait pu obtenir par des techniques de grandes déviations (cf. par exemple [7], [1] et [19]) et nous sera utile par la suite. Par ailleurs, remarquons qu'il serait possible d'imposer des conditions moins restrictives sur la forme de $\beta_t^{(s)}$. Ainsi par exemple, le théorème 4 (et la proposition 7) est encore satisfait si on prend

$$\forall\ s \geq 0, \forall\ t \geq 0, \qquad \beta_t^{(s)} = \beta_0^{(s)} = k^{-1}\ln(1+s)$$

D'autre part, la démonstration du théorème 4 permet également d'obtenir des informations quantitatives sur la vitesse de convergence.

Soit $\mathcal{C}_1$ l'ensemble des fonctions $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ qui sont de classe C^1 par morceaux (mais pas nécessairement continues) et qui finissent par être constantes. Par définition, pour de telles applications g il existe des réels $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_p < +\infty$ tels que la restriction de g à $]t_i, t_{i+1}[$ puisse se prolonger en une fonction C^1 sur $[t_i, t_{i+1}]$, pour $0 \leq i \leq p-1$, et tels que $g(t) = g(t_p)$ pour tout $t \geq t_p$. On posera

$$C_1(g) = \sup_{t\notin\{t_0,\cdots,t_p\}} |\partial_t g(t)| < +\infty$$

On notera aussi $\mathcal{C}_1(\partial A)$ l'espace vectoriel des applications $g : \mathbb{R}_+ \times \partial A \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \partial A$, on ait $g(\,\cdot\,, x) \in \mathcal{C}_1$ et pour lesquelles il existe $t_\infty \geq 0$ tel que pour tout $t \geq t_\infty$ et tous $x_1, x_2 \in \partial A$, on ait $g(t, x_2) = g(t_\infty, x_1)$. On conviendra de noter $t_\infty(g)$ le plus petit réel tel que cette dernière propriété soit satisfaite et

$$C_1(g) = \max_{x\in\partial A} C_1(g(\,\cdot\,, x))$$

Proposition 8

Soit fixée une fonction $g \in \mathcal{C}_1(\partial A)$. Il existe deux constantes $K(g) > 0$ et $\eta > 0$ telles que pour tout $s \geq 0$, on ait

$$\left|\mathbb{E}[g(\widetilde{T}^{(s)}, Y^{(s)})] - (\mathcal{E}(R)\otimes r)(g)\right| \leq K(g)(1+s)^{-\eta} \tag{8}$$

Démonstration :

On se ramène à la situation décrite dans la démonstration de théorème 4, dont on reprend les notations.

Soit $t_\infty > 0$ et $a_i \in \partial A$ fixés. On vérifie immédiatement qu'il existe deux nombres $K_8 > 0$ (qui dépend de t_∞, comme toutes les constantes K_j qui suivent, $j \geq 8$) et $\eta_2 > 0$ tels que pour tout $0 \leq v \leq t_\infty$, on ait, si $a_i \in B$,

$$\left|\int_0^v \mu_{\beta_{b_s u}^{(s)}}(a_i) b_s\, du - \mu(a_i)\mu^{-1}(B)v\right| \leq K_8(1+s)^{-\eta_2}$$

et si $a_i \in \partial A \setminus B$,

$$\left|\int_0^v \mu_{\beta^{(s)}_{b_s u}}(a_i) b_s \, du\right| \leq K_8(1+s)^{-\eta_2}$$

Ainsi, en reprenant l'inégalité (4), on obtient pour tout $0 \leq v \leq t$,

$$\left|q(a_i,b_i)^{-1}\mathbb{P}\left[v \geq \widetilde{T}^{(s)}, Y^{(s)} = a_i\right] - \mathbb{1}_B(a_i)\mu(a_i)\mu^{-1}(B)\mathbb{E}\left[v \wedge \widetilde{T}^{(s)}\right]\right| \leq K_9(1+s)^{-\eta_2 \wedge k^{-1}\eta_1} \tag{9}$$

et on en déduit, en multipliant par $q(a_i, b_i)$ et en sommant sur $a_i \in \partial A$,

$$\left|\mathbb{P}[v \geq \widetilde{T}^{(s)}] - R^{-1}\mathbb{E}[v \wedge \widetilde{T}^{(s)}]\right| \leq K_{10}(1+s)^{-\eta}$$

avec $\eta = \eta_2 \wedge k^{-1}\eta_1$.

En utilisant le fait que la dérivée de

$$[0, t_\infty] \ni v \mapsto \mathbb{E}[v \wedge \widetilde{T}^{(s)}]$$

est

$$[0, t_\infty] \ni v \mapsto \mathbb{P}[\widetilde{T}^{(s)} > v] = 1 - \mathbb{P}[v \geq \widetilde{T}^{(s)}]$$

on vérifie que la dérivée de la fonction

$$[0, t_\infty] \ni v \mapsto \exp(R^{-1}v)(1 - R^{-1}\mathbb{E}[v \wedge \widetilde{T}^{(s)}])$$

est majorée en valeur absolue par un terme de la forme $K_{11}(1+s)^{-\eta}$. On a donc pour une certaine constante $K_{12} > 0$, pour tout $0 \leq v \leq t_\infty$,

$$\left|\mathbb{E}[v \wedge \widetilde{T}^{(s)}] - R(1 - \exp(-R^{-1}v)\right| \leq K_{12}(1+s)^{-\eta}$$

ce qui n'est autre que l'estimation (8) pour l'application

$$g \,:\, \mathbb{R}_+ \times \partial A \ni (u,x) \mapsto v \wedge u$$

Par l'intermédiaire de (9), on en déduit la proposition 8 pour les fonctions

$$\mathbb{R}_+ \times \partial A \ni (u,x) \mapsto \mathbb{1}_{[0,v[}(u)\mathbb{1}_{\{a_i\}}(x)$$

et

$$\mathbb{R}_+ \times \partial A \ni (u,x) \mapsto \mathbb{1}_{[0,v]}(u)\mathbb{1}_{\{a_i\}}(x)$$

(en effet, on aura remarqué que la loi de $\widetilde{T}^{(s)}$ est sans atome). Par une application du théorème de Fubini, on l'étend ensuite à tout élément $g \in \mathcal{C}_1(\partial A)$ qui est continu et qui finit par s'annuler, car pour une telle fonction, il existe $g' \,:\, \mathbb{R}_+ \times \partial A \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, u \geq 0, \forall\, x \in \partial A, \qquad g(u,x) = -\int_0^{t_\infty(g)} \sum_{1 \leq i \leq l} g'(v, a_i)\mathbb{1}_{\{a_i\}}(x)\mathbb{1}_{[0,v]}(u)\, dv$$

et telle que

$$\sup_{t \geq 0,\, x \in \partial A} |g'(t,x)| = \mathcal{C}_1(g)$$

Puis par linéarité, la proposition 8 est satisfaite par tout élément de $\mathcal{C}_1(\partial A)$.

□

Remarquons que la constante $K(g)$ est en fait une fonction de $t_\infty(g)$, $C_1(g)$ et $\|g\|_\infty$, et plus précisement, qu'elle ne dépend de $t_\infty(g)$, toutes choses égales par ailleurs, que par un facteur de la forme $t_\infty(g)\exp(R^{-1}t_\infty(g))$. Des calculs élémentaires, basés sur une application de l'inégalité de Tchebychev aux estimées de la proposition 7 permettent alors d'obtenir :

Corollaire 9

Soit $g : \partial A \to I\!R$. Pour tout $p \geq 1$, il existe une constante $K(g,p) > 0$ telle que pour tout $s \geq 0$,

$$\left|I\!E[g(Y^{(s)})] - r(g)\right| \leq K(g,p)(1+\ln(1+s))^{-p}$$

(il doit être possible d'améliorer cette estimée, mais cette version nous suffira pour la suite).

Intéressons-nous maintenant au cas où $k = \delta$, et remplaçons également l'hypothèse (1) par (7).

Rappelons que

$$\widetilde{R} = \left(\mu^{-1}(N_G)\sum_{z\in B,\, y\in A}\alpha(z,y)\right)^{-1}$$

Théorème 10

Soit $v > 0$ fixé. Quand s devient grand, on a la convergence étroite du couple $((1+vs)^{-1}T^{(s)}, Y^{(s)})$ vers $\mathcal{P}_v(\widetilde{R}) \otimes r$, où $\mathcal{P}_v(\widetilde{R})$ est la loi sur $I\!R_+$ de densité

$$I\!R_+ \ni u \mapsto \widetilde{R}^{-1}v(1+vu)^{-\widetilde{R}^{-1}-1}$$

Démonstration :

La preuve est identique à celle du théorème 4 : Notons $\widetilde{T}^{(v,s)} = (1+vs)^{-1}T^{(s)}$, au lieu d'obtenir (5), il apparaît ici que

$$\max_{s\geq 0} I\!E[\ln(1+\widetilde{T}^{(v,s)})] < +\infty$$

ce qui permet également d'appliquer le critère de tension de Prokhorov.

En outre, si $(\widetilde{T}^{(v,\infty)}, Y^{(\infty)})$ est un couple de variables aléatoires admettant pour loi une probabilité limite pour s grand des couples $(\widetilde{T}^{(v,s)}, Y^{(s)})$, il satisfait nécessairement pour tous $t \geq 0$ et $a \in \partial A$,

$$I\!P\left[t \geq \widetilde{T}^{(v,\infty)}, Y^{(\infty)} = a_i\right] = \begin{cases} \mu^{-1}(N_G)\alpha(a_i,b_i)I\!E[\ln(1+v(t\wedge \widetilde{T}^{(v,\infty)}))] & \text{, si } a \in B \\ 0 & \text{, si } a \in \partial A \setminus B \end{cases}$$

et le résultat annoncé en découle facilement, du fait que

$$\frac{d}{dt}I\!E[\ln(1+v(t\wedge \widetilde{T}^{(v,\infty)}))] \quad = \quad \frac{v}{1+vt}I\!P[\widetilde{T}^{(v,\infty)} > t]$$

□

On peut également adapter la démonstration de la proposition 7 (où il faut alors prendre $f^{(s)}(t,\cdot) = \ln^p(1+b_s^{-1}t)(1+b_s^{-1}t)^{-1}b_s^{-1}\mu^{-1}_{\beta_t^{(s)}}(\partial A)\mathbf{1}_{\partial A}(\cdot))$ pour en obtenir un équivalent, qui s'énonce :

Proposition 11

Pour tous $v > 0$ et $p \geq 0$ fixés, il existe une constante $K(v,p) > 0$ telle que pour tout $s \geq 0$,

$$\mathbb{E}[\ln^{p+1}(1 + \widetilde{T}^{(v,s)})] \leq K(v,p)$$

Mais la proposition 8 se réécrit de la même manière : il suffit de remplacer $\widetilde{T}^{(s)}$ par $\widetilde{T}^{(v,s)}$, $\mathcal{E}(R)$ par $\mathcal{P}_v(\widetilde{R})$ et $K(g)$ par $K(v,g)$. Notons de plus que si v appartient à un compact de $]0, +\infty[$, on peut borner uniformément $K(v,g)$ par une constante ne dépendant que de g.

3 Théorèmes limites pour les temps d'occupations

Pour obtenir le théorème limite satisfait par les processus de temps d'occupations en un point $x_0 \in \widehat{M} \setminus \widehat{M}$ fixé, il faut d'abord comprendre le comportement asymptotique d'une généralisation des temps d'occupations du processus en la composante connexe $\breve{M}$ de $\widehat{M} \setminus \widetilde{M}$ à laquelle appartient x_0.

Soit $0 \geq l > \min_{\breve{M}} U - k$, on note pour tous $s, t \geq 0$,

$$G_s^{(t)}(\breve{M}, l) = \left(\int_0^t \exp(l\beta_u)\mu_{\beta_u}(\breve{M})\, du \right)^{-1} \int_0^{st} \exp(l\beta_u)\mathbb{1}_{\breve{M}}(X_u)\, du$$

Commençons par décrire le processus de sauts à accroissements indépendants qui sera la limite (au sens de la convergence étroite des marginales finies) des processus $(G_s^{(t)}(\breve{M}, l))_{s\geq 0}$ quand t devient grand. Pour ceci considérons $A_1, \cdots, A_n$ les composantes connexes de $\breve{M} \cap \{x \in M \,/\, U(x) < k\}$ (cet ensemble est non vide car il contient au moins x_0) et soit, pour $1 \leq i \leq n$,

$$G_i = A_i \sqcup \{x \notin A_i \,/\, \exists\, y \in A_i \text{ avec } q(y,x) > 0\}$$

(il est clair que $G_i \subset M \setminus \widetilde{M}$).

En reprenant les notations de la section précédente, on associe à G_i, l'ensemble B_i, la probabilité r_i portée par B_i et le nombre R_i. On aura remarqué que

$$B_i \subset \check{M} \overset{\text{déf}}{=} \{x \in \breve{M} / U(x) = k\}$$

Soit l'ensemble

$$\check{G} = \check{M} \sqcup \{0, 1, \cdots, n\}$$

On le munit du noyau d'intensités de transitions $\check{q}$ défini par

$$\forall\, x \neq y \in \check{G}, \qquad \check{q}(x,y) = \begin{cases} q(x,y) & \text{, si } x, y \in \check{M} \\ \sum_{z \in A_i} q(x,z) & \text{, si } x \in \check{M} \text{ et } y = i \in \{1, \cdots, n\} \\ \sum_{z \in \widetilde{M}} q(x,z) & \text{, si } x \in \check{M} \text{ et } y = 0 \\ \mu(B_i)\mu^{-1}(N_{G_i})R_i^{-1} r_i(y) & \text{, si } x = i \in \{1, \cdots, n\} \text{ et } y \in B_i \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases}$$

Soit

$$I = \{1 \leq i \leq n \,/\, \min_{A_i} U = \min_{\breve{M}} U\}$$

et pour $y \in \check{M}$, considérons $(Z_u^{(y)})_{u\geq 0}$ un processus de Markov (càdlàg) homogène sur $\check{G}$, admettant $\check{q}$ pour noyau d'intensités de transitions et issu de y. Le point 0 est clairement le seul élément absorbant pour ce processus (cf. par exemple [12]), ainsi la quantité

$$\breve{T}^{(y)} = \int_0^\infty \mathbf{I}_I(Z_u^{(y)})\, du$$

est p.s. finie. Notons sa loi

$$\breve{\nu}_y(dt) = \mathbb{E}[\breve{T}^{(y)} \in dt]$$

Elle peut aussi être décrite de la manière suivante : pour $i \in I$, soit $N_i^{(y)}$ le nombre (aléatoire) de passages en i de la chaîne de Markov homogène $(\widetilde{Z}_p^{(y)})_{p\in\mathbb{N}}$ sur $\check{G}$ qui admet pour probabilités de transitions celles provenant de la renormalisation naturelle du noyau d'intensités $\check{q}$ (ce qui interdit notamment toute transition d'un point à lui même), et y pour position initiale. Soit également $(T_m)_{m\geq 1}$ une suite de temps exponentiels indépendants (et indépendants de $\widetilde{Z}^{(y)}$) de moyenne 1. On a alors l'égalité en loi

$$\breve{T}^{(y)} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sum_{i\in I} \widetilde{R}_i \left(\sum_{j=1+\sum_{i'<i} N_{i'}^{(y)}}^{\sum_{i'\leq i} N_{i'}^{(y)}} T_j \right)$$

où l'on a fait la convention de prendre $N_{i'}^{(y)} = 0$, pour $i' \in \{0, \cdots, n\}\backslash I$, et où $\widetilde{R}_i = \mu^{-1}(B_i)\mu(N_{G_i})R_i$ est défini comme dans la section précédente.

Par ailleurs, soit

$$(10) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} A & = & \widehat{M} \setminus \breve{M} \\ G & = & A \sqcup \{x \notin A \,/\, \exists\, y \in A \text{ avec } q(y,x) > 0\} \end{array} \right.$$

Remarquons que le couple (G, A) (G étant muni de la restriction de q) ne satisfait pas nécessairement l'hypothèse (1) de la section précédente, mais que la condition (7) est vérifiée. Soit r_0 la probabilité de la position de sortie associée (comme avant le théorème 4). Cette loi peut également s'obtenir comme la renormalisation de la restriction à $\breve{M}$ de la probabilité de la position de sortie associée à

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A' & = & \widetilde{M} \\ G' & = & A' \sqcup \{x \notin A' \,/\, \exists\, y \in A' \text{ avec } q(y,x) > 0\} \end{array} \right.$$

Notons que la probabilité r_0 est en fait portée par des éléments de $\check{M}$, on peut donc aussi la considérer comme une probabilité sur $\check{G}$.

On posera alors

$$\breve{\nu}(\,\cdot\,) = \int \breve{\nu}_y(\,\cdot\,)\, r_0(dy)$$

cette probabilité pouvant se décrire comme précédemment, en considérant un processus de Markov homogène $(Z_u^{(r_0)})_{u\geq 0}$ (ou une chaîne de Markov homogène $(\widetilde{Z}_p^{(r_0)})_{p\in\mathbb{N}}$) défini comme ci-dessus, mais dont la loi initiale est r_0.

D'autre part, soit également $\widetilde{R}_0$ la quantité associée comme dans la section précédente au couple (G, A) donné par (10). On désignera désormais par $\widetilde{\nu}$ la probabilité $\mathcal{P}_1(\widetilde{R}_0)$ décrite dans la proposition 10.

Enfin, pour tous réels a, b, c strictement positifs, soit $Q_{a,b,c}$ la loi sur $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ (l'espace des fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ càdlàg, que l'on suppose muni de la tribu engendrée par les applications coordonnées) du processus de sauts à accroissements indépendants qui est issu de 0 et dont les caractéristiques locales (voir le chapitre II de [13]) sont données par

$$\begin{array}{rcl} \nu(ds,dx) & = & bs^{-1}ds\,\breve{\nu}(c^{-1}s^{-a}dx) \\ (B(h)_s)_{s\geq 0} & = & (\nu([0,s]\otimes h))_{s\geq 0} \\ C & \equiv & 0 \end{array}$$

(ces caractéristiques définissent bien un processus à accroissements indépendants, car du fait que $\breve{\nu}$ est d'espérance finie, elles vérifient les conditions 5.3, 5.4 et 5.5 p. 124 de [13], mis à part la relation $\nu(\mathbb{R}_+\times\{0\})=0$ qui n'est pas importante pour ce qui suit ; on se permet des "sauts" de hauteur nulle), où $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction de troncation fixée : h est à support compact et satisfait $h(x)=x$ dans un voisinage de 0 (voir [13] p. 75). On supposera de plus dans toute la suite que h est choisie continue et que sa restriction à $\mathbb{R}_+$ appartient à $\mathcal{C}_1$.

Alors,

Théorème 12

On a la convergence étroite quand t devient grand des marginales finies du processus $(G_s^{(t)}(\breve{M},l))_{s\geq 0}$ vers les lois des marginales finies correspondantes sous $Q_{a,b,c}$ (avec les notations du livre de Jacod et Shiryaev, il s'agit de la convergence $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$ de processus, voir p. 313), avec

$$\begin{array}{rcl} a & = & k^{-1}(l+k-\min_{\breve{M}}U) \\ b & = & \widetilde{R}_0^{-1} \\ c & = & k^{-1}(l+k-\min_{\breve{M}}U)\mu(N)\mu^{-1}(N_{\breve{M}}) \end{array}$$

Il est maintenant facile d'en déduire dans certains cas le comportement asymptotique de $(G_s^{(t)}(x_0))_{s\geq 0}$, en se servant de techniques déjà introduites dans [18] :

Supposons que I soit un singleton, disons $I=\{i_0\}$, et que $x_0\in A_{i_0}$. Alors

Corollaire 13

On a la convergence étroite pour t grand des marginales finies du processus $(G_s^{(t)}(x_0))_{s\geq 0}$ vers les lois des marginales finies correspondantes sous $Q_{a,b,c}$, avec

$$\begin{array}{rcl} a & = & k^{-1}(k-U(x_0)) \\ b & = & \widetilde{R}_0^{-1} \\ c & = & k^{-1}(k-U(x_0))\mu(N)\mu^{-1}(N_{\breve{M}}) \end{array}$$

Démonstration du corollaire :

Remarquons tout d'abord qu'en reprenant la démonstration de la fin de la section 2 de [18], on obtient pour tout $x_1\in\widehat{M}$ la majoration grossière suivante

$$\text{p.s.,}\qquad \limsup_{t\to+\infty}\exp(-\beta_t[k-U(x_1)])\beta_t^{-2}G_t^{(t)}(x_1)<+\infty \tag{11}$$

(il est possible d'améliorer un peu cette estimation en utilisant plutôt les propositions 7 et 15 de [18]).

Par ailleurs, pour $s\geq 0$, soit $\breve{L}_{\beta_s}$ l'opérateur agissant sur $F(\breve{M})$ par

$$\forall\,\phi\in F(\breve{M}),\ \forall\,x\in\breve{M},\qquad \breve{L}_{\beta_s}\phi(x)=\sum_{y\in\breve{M}}(\phi(y)-\phi(x))q_{\beta_s}(x,y)$$

Considérons la solution $\breve{\psi}_{\beta_s} \in F(\breve{M})$ de l'équation

$$\begin{cases} \breve{L}_{\beta_s}\breve{\psi}_{\beta_s} &= \mathbb{1}_{\{x_0\}} - \breve{\mu}_{\beta_s}(x_0) \\ \breve{\mu}_{\beta_s}(\breve{\psi}_{\beta_s}) &= 0 \end{cases}$$

où $\breve{\mu}_{\beta_s}$ est la probabilité invariante sur $\breve{M}$ associée au générateur $\breve{L}_{\beta_s}$ ($\breve{\mu}_{\beta_s}$ est aussi ici la renormalisation de la restriction de μ_{β_s} à $\breve{M}$).

On étend cette fonction sur tout M en posant

$$\forall\, x \in M, \qquad \psi_{\beta_s}(x) = \begin{cases} \breve{\psi}_{\beta_s}(x) & \text{, si } x \in \breve{M} \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases}$$

On a alors, en utilisant la proposition 1 et le corollaire 2, les estimées suivantes pour cette fonction

$$\|\psi_{\beta_s}\|_M = \left\|\breve{\psi}_{\beta_s}\right\|_{\breve{M}} \leq K_{13}\exp(\beta_s V_{\breve{M},\breve{U}}(x_0)) \tag{12}$$

($\breve{U}$ désignant la restriction de U à $\breve{M}$) et

$$\|\partial_s\psi_{\beta_s}\|_M \leq K_{13}\exp(\beta_s(V_{\breve{M},\breve{U}}(x_0) - k)) \tag{13}$$

pour une certaine constante $K_{13} > 0$ indépendante de $s \geq 0$, et on vérifie facilement, vu les hypothèses faites avant le corollaire 13, que

$$V_{\breve{M},\breve{U}}(x_0) < k - U(x_0) \tag{14}$$

Cependant l'intérêt du potentiel ("partiel") ψ_{β_s} est que pour tout $t \geq 0$, on a

$$\psi_{\beta_t}(X_t) \;=\; \psi_{\beta_0}(X_0) + \int_0^t \partial_s\psi_{\beta_s}(X_s)\,ds + \int_0^t L_{\beta_s}\psi_{\beta_s}(X_s)\,ds + M_t^{\psi_\beta}$$

où M^{ψ_β} est une martingale dont le crochet oblique est donné par

$$\forall\, t \geq 0, \qquad \left\langle M^{\psi_\beta}\right\rangle_t = \int_0^t \Gamma_{\beta_s}(\psi_{\beta_s}, \psi_{\beta_s})(X_s)\,ds$$

$\Gamma_{\beta_s}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ étant le carré du champ associé à L_{β_s} ; pour toute fonction $\psi \in F(M)$ et tout $x \in M$,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\beta_s}(\psi,\psi)(x) &= L_{\beta_s}\psi^2(x) - 2\psi(x)L_{\beta_s}\psi(x) \\ &= \sum_{y\in M}(\psi(y) - \psi(x))^2 q_{\beta_s}(x,y) \end{aligned}$$

Notons que

$$L_{\beta_s}\psi_s(x) \;=\; \mathbb{1}_{\breve{M}}(x)\breve{L}_{\beta_s}\breve{\psi}_{\beta_s}(x) + \mathbb{1}_{\breve{M}^{\mathrm{c}}}(x)\sum_{y\in\breve{M}} q_{\beta_s}(x,y)\psi_s(y) - \mathbb{1}_{\breve{M}}(x)\sum_{y\notin\breve{M}} q_{\beta_s}(x,y)\psi_s(x)$$

et qu'il existe une constante $K_{14} > 0$ telle pour tout couple $(x,y) \in (\breve{M}\times\breve{M}^{\mathrm{c}}) \sqcup (\breve{M}^{\mathrm{c}}\times\breve{M})$,

$$0 \leq \mu_{\beta_s}(x)q_{\beta_s}(x,y) \leq K_{14}\exp(-k\beta_s) = K_{14}(1+s)^{-1}$$

ce qui permet de voir (à l'aide de (11) et de (14)) que pour tout $s \geq 0$ fixé, p.s.

$$\lim_{t\to+\infty}\exp(\beta_t[U(x_0)-k])\max_{0\leq s'\leq s}\left|\int_0^{s't} L_{\beta_u}\psi_{\beta_u}(X_u)\,du - \int_0^{s't}\mathbb{1}_{\{x_0\}}(X_u)\,du + \int_0^{s't}\breve{\mu}_{\beta_u}(x_0)\mathbb{1}_{\breve{M}}(X_u)\,du\right|$$

$$= 0$$

De plus, les estimées (12) et (13) montrent que

$$\lim_{t\to+\infty} \exp(\beta_t[U(x_0)-k]) \max_{0\leq s'\leq s} \left|\psi_{\beta_{s't}}(X_{s't}) - \psi_{\beta_0}(X_0) - \int_0^{s't} \partial_u \psi_{\beta_u}(X_u)\, du\right| = 0$$

(toujours avec $s \geq 0$ fixé) et si on reprend la fin de la démonstration de la section 2 de [18], en utilisant notamment le fait que p.s.,

$$\limsup_{t\to+\infty} \exp(\beta_t[U(x_0)-k])\beta_t^{-2} \left[\int_0^{st} \breve{\mu}_{\beta_u}(x_0)\mathbf{1}_{\breve{M}}(X_u)\, du + \int_0^{st} \mathbf{1}_{\{x_0\}}(X_u)\, du\right] < +\infty$$

(qui est une conséquence de (11)), il apparaît également que

$$\lim_{t\to+\infty} \exp(\beta_t[U(x_0)-k]) \max_{0\leq s'\leq s} \left|M^{\psi}_{s't}\right| = 0$$

En regroupant les résultats précédents on obtient donc finalement que pour tout $s \geq 0$ fixé,

$$\lim_{t\to+\infty} \exp(\beta_t[U(x_0)-k]) \max_{0\leq s'\leq s} \left|\int_0^{s't} \mathbf{1}_{\{x_0\}}(X_u)\, du - \int_0^{s't} \breve{\mu}_{\beta_u}(x_0)\mathbf{1}_{\breve{M}}(X_u)\, du\right| = 0$$

et le corollaire annoncé en découle immédiatement grâce au théorème 12.

$\square$

En utilisant le chapitre VI de [13], on peut également voir que les processus $G^{(t)}_{\cdot}(x_0)$ et $G^{(t)}_{\cdot}(\breve{M}, \min_{\breve{M}} U - U(x_0))$ ont pour t grand les mêmes points d'adhèrence pour la convergence étroite sur $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$ muni de la topologie de Skorhokod, mais ceci est d'un intérêt limité ici, car $G^{(t)}(\breve{M}, \min_{\breve{M}} U - U(x_0))$ ne converge pas dans cette topologie.

Par ailleurs, pour une forme plus explicite de la loi $\breve{\nu}$ dans la situation pécédente, on renvoit à la section 5. On y traitera également le cas général, on a aussi une convergence vers un processus à accroissements indépendants, mais ce n'est pas nécessairement la loi $\breve{\nu}$ qui intervient pour sa description.

Pour terminer cette section, on va montrer comment apparaissent les lois $\breve{\nu}$ et $\breve{\nu}_y$, pour $y \in \check{M}$, et préciser les taux de convergence.

Soit $t \geq 0$ et $y \in \widehat{M}$, on considère un algorithme de recuit simulé $(\widehat{X}^{(t)}_s)_{s\geq 0}$ sur $\widehat{M}$ qui est issu de y et qui est associé à la restriction de U à $\widehat{M}$ et à l'évolution de l'inverse de la température $(\beta^{(t)}_s)_{s\geq 0}$ (voir la section précédente).

Définissons les variables aléatoires suivantes :

$$\begin{aligned}
\widehat{S}^{(t)}_0 &= \inf\{s \geq 0 \,/\, \widehat{X}^{(t)}_s \in \breve{M}\} \\
\widehat{Y}^{(t)} &= \widehat{X}^{(t)}_{\widehat{S}^{(t)}_0} \\
\widehat{S}^{(t)}_1 &= \inf\{s \geq \widehat{S}^{(t)}_0 \,/\, \widehat{X}^{(t)}_s \in \widetilde{M} \sqcup (\sqcup_{i=1}^n A_i)\} \\
\widehat{I}^{(t)}_1 &= \begin{cases} 0 & \text{, si } \widehat{X}^{(t)}_{\widehat{S}^{(t)}_1} \in \widetilde{M} \\ i & \text{, si } \widehat{X}^{(t)}_{\widehat{S}^{(t)}_1} \in A_i \end{cases} \\
\widehat{T}^{(t)}_1 &= \begin{cases} \inf\{s \geq \widehat{S}^{(t)}_1 \,/\, \widehat{X}^{(t)}_s \notin A_i\} - \widehat{S}^{(t)}_1 & \text{, si } \widehat{I}^{(t)}_1 = i \geq 1 \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Puis par récurrence pour $m \geq 2$, on pose

- si $\widehat{I}^{(t)}_{m-1} = 0$,

$$\begin{aligned}\widehat{S}^{(t)}_m &= \widehat{S}^{(t)}_{m-1}\\ \widehat{I}^{(t)}_m &= 0\\ \widehat{T}^{(t)}_m &= 0\end{aligned}$$

- si $\widehat{I}^{(t)}_{m-1} > 0$,

$$\begin{aligned}\widehat{S}^{(t)}_m &= \inf\{s \geq \widehat{S}^{(t)}_{m-1} + \widehat{T}^{(t)}_{m-1} \,/\, \widehat{X}^{(t)}_s \in \widetilde{M} \sqcup (\sqcup_{i=1}^n A_i)\}\\ \widehat{I}^{(t)}_m &= \begin{cases} 0 & \text{, si } \widehat{X}^{(t)}_{\widehat{S}^{(t)}_m} \in \widetilde{M}\\ i & \text{, si } \widehat{X}^{(t)}_{\widehat{S}^{(t)}_m} \in A_i\end{cases}\\ \widehat{T}^{(t)}_m &= \begin{cases} \inf\{s \geq \widehat{S}^{(t)}_m \,/\, \widehat{X}^{(t)}_s \notin A_i\} - \widehat{S}^{(t)}_m & \text{, si } \widehat{I}^{(t)}_m \geq 1\\ 0 & \text{, sinon}\end{cases}\end{aligned}$$

On notera également

$$\begin{aligned}\widehat{N}^{(t)} &= \inf\{m \geq 1 \,/\, \widehat{I}^{(t)}_m = 0\}\\ \widehat{S}^{(t)}_\infty &= \widehat{S}^{(t)}_{\widehat{N}^{(t)}} = \lim_{m\to+\infty} \widehat{S}^{(t)}_m\end{aligned}$$

Remarquons que les taux de transitions pour l'algorithme $\widehat{X}^{(t)}$ d'un point $x \in \check{M}$ à un point quelconque de $\widehat{M}$ au temps $s \geq 0$ ne dépendent ni du paramètre t ni de l'instant s (car d'un tel point x, on ne peut atteindre dans $\widehat{M}$ qu'un point d'énergie inférieure ou égale). Des résultats classiques (cf. par exemple [12]) permettent alors de voir qu'il existe deux constantes $K_{15} > 0$ et $0 < \rho < 1$ telles que l'on ait pour tous $t \geq 0$ et $y \in \widehat{M}$,

$$\forall\, m \geq 0, \qquad I\!P[\widehat{N}^{(t)} = m] \leq K_{15}\rho^m \tag{15}$$

Supposons que $y \in \widehat{M} \setminus \check{M}$, en reprenant les notations du début de cette section, le théorème 10 montre que le couple $((1+t)^{-1}\widehat{S}^{(t)}_0, \widehat{Y}^{(t)})$ converge étroitement quand t devient grand vers $\widetilde{\nu} \otimes r_0$.

Par ailleurs, si $y \in \check{M}$, on vérifie facilement à partir du théorème 4 et de l'estimation (15), que pour t grand, $(1+t)^{-k^{-1}\delta}\widehat{S}^{(t)}_\infty$ converge étroitement vers $\breve{\nu}_y$ (où on a posé $\delta = k - \min_{\widetilde{M}} U$), et on peut même obtenir des estimées sur la vitesse de convergence du type de celles données dans le corollaire 9 :

Soit une fonction $g \in \mathcal{C}_1$ fixée, et $(Z^{(y)}_s)_{s\geq 0}$ un processus de Markov homogène défini comme au début de cette section. Par analogie avec ce qui précède, on pose par récurrence sur $m \geq 1$,

$$\begin{aligned}\widehat{S}_m &= \inf\{s \geq \widehat{S}_{m-1} + \widehat{T}_{m-1} \,/\, Z^{(y)}_s \in \{0, 1, \cdots, n\}\}\\ \widehat{T}_m &= \begin{cases} \inf\{s \geq \widehat{S}_m \,/\, Z^{(y)}_s \neq i\} - \widehat{S}_m & \text{, si } Z^{(y)}_{\widehat{S}_m} = i \in \{1, \cdots, n\}\\ 0 & \text{, si } Z^{(y)}_{\widehat{S}_m} = 0\end{cases}\end{aligned}$$

où par convention

$$\widehat{S}_0 = \widehat{T}_0 = 0$$

On notera également

$$\begin{aligned}\widehat{N} &= \inf\{m \geq 1 \,/\, Z^{(y)}_{\widehat{S}_m} = 0\}\\ \widehat{S}_\infty &= \sum_{m=1}^{\widehat{N}} \mathbb{1}_{Z^{(y)}_{\widehat{S}_m} \in I}\widehat{T}_m = \sum_{m\geq 1} \mathbb{1}_{Z^{(y)}_{\widehat{S}_m} \in I}\widehat{T}_m\end{aligned}$$

Alors, à tout $p \geq 0$, on peut associer une constante $K(p,g)$ telle que pour tout $t \geq 0$,

$$\left|\mathbb{E}[g((1+t)^{-k^{-1}\delta}\widehat{S}_\infty^{(t)})] - \check{\nu}_y(g)\right| = \left|\mathbb{E}[g((1+t)^{-k^{-1}\delta}\widehat{S}_\infty^{(t)})] - \mathbb{E}[g(\widehat{S}_\infty)]\right| \leq K(p,g)(1+\ln(1+t))^{-p} \tag{16}$$

Pour prouver ceci, soit $p \geq 0$ fixé, ainsi que $m \geq 1$ et une application $\widetilde{g} \in \mathcal{C}_1(\check{M})$. On commence par vérifier qu'il existe une constante $K_{16} > 0$ (ne dépendant de $\widetilde{g}$ que par $t_\infty(\widetilde{g})$, $C_1(\widetilde{g})$ et $\|\widetilde{g}\|_\infty$), telle que

$$\begin{aligned}&\Bigg|\mathbb{E}\left[\widetilde{g}\left((1+t)^{-k^{-1}\delta}(\widehat{T}_m^{(t)}+\widehat{S}_m^{(t)}), \widehat{X}^{(t)}_{\widehat{T}_m^{(t)}+\widehat{S}_m^{(t)}}\right)\middle|\widehat{T}_{m-1}^{(t)}+\widehat{S}_{m-1}^{(t)} = s(1+t)^{k^{-1}\delta}, \widehat{X}^{(t)}_{\widehat{T}_{m-1}^{(t)}+\widehat{S}_{m-1}^{(t)}} = y'\right]\\ &\quad -\mathbb{E}\left[\widetilde{g}\left(s+\mathbb{1}_{Z^{(y')}_{\widehat{S}_1}\in I}\widehat{T}_1, Z^{(y')}_{\widehat{T}_1+\widehat{S}_1}\right)\right]\Bigg| \leq K_{16}(1+\ln(1+t))^{-p-1}\end{aligned} \tag{17}$$

pour tous $s \geq 0$ et $y' \in \check{M}$.

Notons que l'on peut se restreindre aux cas où $s \leq t_\infty(g)$ et qu'il existe une constante $K_{17} > 0$ telle que pour tous $y' \in \check{M}$ et $s,t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[\widehat{S}_m^{(t)} - s(1+t)^{k^{-1}\delta}\middle|\widehat{T}_{m-1}^{(t)}+\widehat{S}_{m-1}^{(t)} = s(1+t)^{k^{-1}\delta}, \widehat{X}^{(t)}_{\widehat{T}_{m-1}^{(t)}+\widehat{S}_{m-1}^{(t)}} = y'\right] \leq K_{17}$$

(en effet, il s'agit de l'espérance d'un temps de sortie pour un processus homogène ne dépendant pas de $s(1+t)^{k^{-1}\delta}$).

Ainsi, en effectuant un développement limité à l'ordre 1, on voit que

$$\begin{aligned}&\Bigg|\mathbb{E}\Big[\widetilde{g}\Big(s+(1+t)^{-k^{-1}\delta}(\widehat{T}_m^{(t)}+\widehat{S}_m^{(t)}-s(1+t)^{k^{-1}\delta}), \widehat{X}^{(t)}_{\widehat{T}_m^{(t)}+\widehat{S}_m^{(t)}}\Big)\Big|\widehat{T}_{m-1}^{(t)}+\widehat{S}_{m-1}^{(t)} = s(1+t)^{k^{-1}\delta}, \widehat{X}^{(t)}_{\widehat{T}_{m-1}^{(t)}+\widehat{S}_{m-1}^{(t)}}\\ &\quad = y'\Big] - \mathbb{E}\Big[\widetilde{g}\Big(s+(1+t)^{-k^{-1}\delta}\widehat{T}_m^{(t)}, \widehat{X}^{(t)}_{\widehat{T}_m^{(t)}+\widehat{S}_m^{(t)}}\Big)\Big|\widehat{T}_{m-1}^{(t)}+\widehat{S}_{m-1}^{(t)} = s(1+t)^{k^{-1}\delta}, \widehat{X}^{(t)}_{\widehat{T}_{m-1}^{(t)}+\widehat{S}_{m-1}^{(t)}} = y'\Big]\Bigg|\\ &\quad \leq K_{18}(1+t)^{-\eta_3}\end{aligned}$$

où $K_{18} > 0$ et $\eta_3 > 0$ sont deux constantes indépendantes de $y' \in \check{M}$ et $s,t \geq 0$.

De même, en utilisant la proposition 7, on voit qu'il existe deux autres constantes $K_{19} > 0$ et $\eta_4 > 0$ telles que si $\widehat{I}_{m-1}^{(t)} \notin I$,

$$\begin{aligned}&\Bigg|\mathbb{E}\left[\widetilde{g}\left(s+(1+t)^{-k^{-1}\delta}\widehat{T}_m^{(t)}, \widehat{X}^{(t)}_{\widehat{T}_m^{(t)}+\widehat{S}_m^{(t)}}\right)\middle|\widehat{T}_{m-1}^{(t)}+\widehat{S}_{m-1}^{(t)} = s(1+t)^{k^{-1}\delta}, \widehat{X}^{(t)}_{\widehat{T}_{m-1}^{(t)}+\widehat{S}_{m-1}^{(t)}} = y'\right]\\ &\quad -\mathbb{E}\left[\widetilde{g}\left(s, \widehat{X}^{(t)}_{\widehat{T}_m^{(t)}+\widehat{S}_m^{(t)}}\right)\middle|\widehat{T}_{m-1}^{(t)}+\widehat{S}_{m-1}^{(t)} = s(1+t)^{k^{-1}\delta}, \widehat{X}^{(t)}_{\widehat{T}_{m-1}^{(t)}+\widehat{S}_{m-1}^{(t)}} = y'\right]\Bigg| \leq K_{20}(1+t)^{-\eta}\end{aligned}$$

et l'estimée (17) découle alors facilement du corollaire 9.

Par contre, si $\widehat{I}_{m-1}^{(t)} \in I$, en effectuant un développement limité à l'ordre 1 et en utilisant à nouveau la proposition 7, il apparaît qu'il existe deux constantes $K_{21} > 0$ et $\eta_5 > 0$ telles que pour tous $t \geq 0$, $0 \leq s' \leq t_\infty(g)$ et $y'' \in \sqcup_{i=1}^n A_i$,

$$\begin{aligned}&\Bigg|\mathbb{E}\left[\widetilde{g}\left(s'+(1+t)^{-k^{-1}\delta}\widehat{T}_m^{(t)}, \widehat{X}^{(t)}_{\widehat{T}_m^{(t)}+s'(1+t)^{k^{-1}\delta}}\right)\middle|\widehat{S}_m^{(t)} = s'(1+t)^{k^{-1}\delta}, \widehat{X}^{(t)}_{\widehat{S}_m^{(t)}} = y''\right]\\ &\quad -\mathbb{E}\left[\widetilde{g}\left(s'+(1+t+s'(1+t)^{k^{-1}\delta})^{-k^{-1}\delta}\widehat{T}_m^{(t)}, \widehat{X}^{(t)}_{\widehat{T}_m^{(t)}+s'(1+t)^{k^{-1}\delta}}\right)\middle|\widehat{S}_m^{(t)} = s'(1+t)^{k^{-1}\delta}, \widehat{X}^{(t)}_{\widehat{S}_m^{(t)}} = y''\right]\Bigg|\\ &\quad \leq K_{22}(1+t)^{-(1-k^{-1}\delta)k^{-1}\delta}\end{aligned}$$

et grâce à la proposition 8, on en déduit le résultat (17), après y avoir conditionné par rapport à $(\widehat{S}_m^{(t)}, \widehat{X}^{(t)}_{\widehat{S}_m^{(t)}})$.

Par une récurrence basée sur $m-1$ conditionnements successifs, cette estimée permet de montrer qu'il existe une constante $K(p,g)$ (indépendante de m) telle que

$$\left| \mathbb{E}\left[g((1+t)^{-k^{-1}\delta}\widehat{S}_m^{(t)})\right] - \mathbb{E}\left[g\left(\sum_{i=1}^m \mathbf{1}_{Z^{(y)}_{\widehat{S}_i}\in I}\widehat{T}_i\right)\right]\right| \leq K(p,g)m(1+\ln(1+t))^{-p-1}$$

Enfin, en tenant compte de (15) et en prenant par exemple $m = 1+\ln(1+t)$, il s'en suit que la majoration (16) est bien satisfaite.

D'autre part, on peut également obtenir un équivalent de la proposition 7 : Pour tout $p \geq 0$ fixé, il existe une constante $K(p) > 0$ telle que pour tout $t \geq 0$

$$(1+t)^{-k^{-1}\delta}\mathbb{E}[(\widehat{S}_\infty^{(t)})^{p+1}] \leq K(p) \tag{18}$$

Mais pour la preuve de ce résultat, il faut reprendre directement les démonstrations du lemme 5 et de la proposition 7, que l'on applique avec

$$\left\{\begin{array}{lcl} A''' & = & \breve{M} \\ G''' & = & A''' \sqcup \{x \notin A''' \,/\, \exists\, y \in A''' \text{ avec } q(y,x) > 0\} \end{array}\right.$$

muni du potentiel donné par

$$\forall\, x \in G, \qquad \widetilde{U}(x) \;=\; \left\{\begin{array}{ll} U(x) - \min_{\breve{M}} U & \text{, si } x \in A''' \\ \delta & \text{, sinon} \end{array}\right.$$

On a alors que les fonctions $\psi_t^{(s,i)}$ définies avant le lemme 5 sont uniformément bornées par une constante indépendante de $s, t \geq 0$, ce qui suffisant pour obtenir (18), via la preuve de la proposition 7, l'inégalité $k > \delta$, et le fait que le temps de sortie de A''' ne dépend pas des valeurs du potentiel $\widetilde{U}$ sur $\partial A'''$, si celles-ci sont inférieures ou égales à δ.

Revenons au cas où $y \in \widehat{M} \setminus \breve{M}$. En conditionnant par rapport à $(\widehat{S}_0^{(t)}, \widehat{Y}^{(t)}) = (u(1+t), y')$, et en utilisant les résultats précédents, on obtient la convergence étroite de $(1+t)^{-k^{-1}\delta}(\widehat{S}_\infty^{(t)} - \widehat{S}_0^{(t)})$ pour t grand vers la loi $\widehat{\nu}$ donnée par

$$\begin{aligned} \widehat{\nu}(dx \in \cdot\,) &= \int_{\mathbb{R}_+} \widetilde{\nu}(du) \int_{\breve{M}} r_0(dy')\, \breve{\nu}_{y'}((1+u)^{-k^{-1}\delta}\, dx \in \cdot\,) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \widetilde{\nu}(du)\, \breve{\nu}\,((1+u)^{-k^{-1}\delta}\, dx \in \cdot\,) \end{aligned}$$

En fait, en reprenant les calculs ci-dessus et la remarque de la fin de la section précédente, on peut aussi obtenir des estimées sur la vitesse de convergence. Ainsi par exemple, soient un réel $S \geq 0$ et une application $g \in \mathcal{C}_1$ fixés. Pour tout $p \geq 0$, il existe une constante $K(p,S,g) > 0$ telle que pour tout $t \geq 0$, on ait

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\widehat{S}_0^{(t)} \leq S(1+t)} g\left((1+t)^{-k^{-1}\delta}(\widehat{S}_\infty^{(t)} - \widehat{S}_0^{(t)})\right)\right] - \int_0^S \widetilde{\nu}(du) \int g((1+u)^{k^{-1}\delta}x)\; \breve{\nu}\,(dx)\right| \\ \leq K(p,S,g)(1+\ln(1+t))^{-p} \end{aligned}$$

4 Démonstration du théorème limite

On va prouver ici une généralisation immédiate du théorème 12.

Comme précédemment, on note pour tout $t_0 \geq 0$ fixé,

$$\forall\ s \geq 0, \qquad \beta_s^{(t_0)} = k^{-1}\ln(1+t_0+s)$$

On va montrer que le théorème 12 est aussi satisfait si on prend $\mathbb{R}_+ \ni s \mapsto \beta_s^{(t_0)}$ pour évolution de l'inverse de la température. Ceci permet de se ramener au cas où $\widehat{M} = M$. En effet, une loi initiale étant fixée, soit $(X_s^{(t_0)})_{s\geq 0}$ un algorithme de recuit simulé sur M associé à U et à $\beta_\cdot^{(t_0)}$. Pour tout $1 > \epsilon > 0$, il existe $t_1 \geq 0$ tel que la probabilité qu'à un instant $t \geq t_1$ la trajectoire de cet algorithme n'appartienne pas à $\widehat{M}$ soit inférieure à ϵ. Notons $m_{t_1,\widehat{M}}^{(t_0)}$ la renormalisation de la restriction à $\widehat{M}$ de la loi de $X_{t_1}^{(t_0)}$. D'après ce qui précéde, la variation totale (sur $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$) de la différence entre la loi de l'algorithme de recuit simulé $(\widehat{X}_s^{(t_0+t_1)})_{s\geq 0}$ sur $\widehat{M}$, qui est associé à la restriction de U à $\widehat{M}$ et à $\beta_{t_1+\cdot}^{(t_0)} = \beta_\cdot^{(t_0+t_1)}$ et dont la loi initiale est $m_{t_1,\widehat{M}}^{(t_0)}$, et la loi de $(X_{t_1+s}^{(t_0)})_{s\geq 0}$, est plus petite que ϵ. Ainsi, puisque ϵ peut être choisi arbitrairement petit, si le théorème limite est satisfait par $(\widehat{X}_s^{(t_0+t_1)})_{s\geq 0}$, pour tout $t_0+t_1 \geq 0$ et toute loi initiale, il est facile d'en déduire, du fait que

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\int_0^t \exp(l\beta_u^{(t_0)})\mu_{\beta_u^{(t_0)}}(\breve{M})\,du\right)\int_0^{t-t_1}\exp(l\beta_u^{(t_0+t_1)})\mu_{\beta_u^{(t_0+t_1)}}(\breve{M})\,du = 1$$

(l étant fixé comme dans le théorème 12), qu'il le sera également pour $(X_s^{(t_0)})_{s\geq 0}$.

On supposera donc désormais que $\widehat{M} = M$, et puisque les cas où $t_0 > 0$ ne sont pas plus difficiles à traiter que celui où $t_0 = 0$, on se placera aussi dans cette dernière situation pour ne pas alourdir les notations. Soit $\widetilde{M}' = M \setminus \breve{M}$, il est clair que cet ensemble est connexe.

Pour faire apparaître un processus de sauts, on introduit les temps d'arrêt suivant :

$$\begin{aligned}
S_1 &= \inf\{s \geq 0 \,/\, X_s \in \breve{M}\} = \inf\{s \geq 0 \,/\, X_s \notin \widetilde{M}'\} \\
\widetilde{S}_1 &= \inf\{s \geq S_1 \,/\, X_s \in \widetilde{M}\} = \inf\{s \geq S_1 \,/\, X_s \in \widetilde{M}'\} = \inf\{s \geq S_1 \,/\, X_s \notin \breve{M}\}
\end{aligned}$$

puis pour $n > 1$,

$$\begin{aligned}
S_n &= \inf\{s \geq \widetilde{S}_{n-1} \,/\, X_s \in \breve{M}\} \\
\widetilde{S}_n &= \inf\{s \geq S_n \,/\, X_s \in \widetilde{M}\}
\end{aligned}$$

Ces temps sont finis p.s., car on sait que tous les points de $\widehat{M}$ sont récurrents. On posera aussi pour $n \geq 1$,

$$T_n = \widetilde{S}_n - S_n$$

Avec ces notations, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^s \exp(l\beta_u)\mathbb{1}_{\breve{M}}(X_u)\,du &= \sum_{S_n\leq s}\int_{S_n}^{(S_n+T_n)\wedge s}\exp(l\beta_u)\,du \\
&= (lk^{-1}+1)^{-1}\sum_{S_n\leq s}[(1+(S_n+T_n)\wedge s)^{lk^{-1}+1}-(1+S_n)^{lk^{-1}+1}]
\end{aligned}$$

Ceci nous amène à considérer le processus suivant :

$$\forall\ s \geq 0, \qquad Y_s = \sum_{S_n\leq s} Z(S_n,T_n)$$

avec

$$Z(S_n,T_n) = (lk^{-1}+1)^{-1}[(1+(S_n+T_n))^{lk^{-1}+1}-(1+S_n)^{lk^{-1}+1}]$$

Posons également

$$n_s = \sup\{n \geq 0 \,/\, S_n \leq s\}$$

et

$$\begin{aligned}\widetilde{Z}_s &= \mathbf{I}_{S_{n_s}\leq s< S_{n_s}+T_{n_s}} Z(S_{n_s},T_{n_s})\\ &= \mathbf{I}_{X_s\in \breve{M}} Z(S_{n_s},T_{n_s})\end{aligned}$$

On a alors pour tout $s \geq 0$,

$$Y_s - \widetilde{Z}_s \leq \int_0^s \exp(l\beta_u)\mathbf{I}_{\breve{M}}(X_u)\,du \leq Y_s$$

Cependant il est bien connu que pour $s>0$ fixé,

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}(X_{st}\in \breve{M}) = 0$$

et il suffit donc pour obtenir le théorème 12, de montrer la convergence voulue pour les marginales finies de la famille de processus indexée par $t>0$,

$$(Y_s^{(t)})_{s\geq 0} = (\tau_t^{(l)} Y_{st})_{s\geq 0}$$

où

$$\forall\, t>0, \qquad \tau_t^{(l)} = \left(\int_0^t \exp(l\beta_u)\mu_{\beta_u}(\breve{M})\,du\right)^{-1}$$

Remarquons que pour t grand, on a

$$\tau_t^{(l)} \sim k^{-1}(l+\delta)\mu(N)\mu^{-1}(N_{\breve{M}})(1+t)^{-k^{-1}(l+\delta)} \tag{19}$$

et plus précisement que la différence entre ces deux termes est de l'ordre de $(1+t)^{-\eta_6}$, avec $\eta_6 > k^{-1}(l+\delta)$ (rappelons que $\delta = k - \min_{\breve{M}} U$).

Mais le paramètre $t\geq 1$ étant fixé, plutôt que d'étudier directement le processus $(Y_s^{(t)})_{s\geq 0}$, il est commode de considérer le processus ponctuel à valeurs dans $\mathbb{R}_+\times M\times \mathbb{R}_+$ donné par

$$\mu^{(t)}(ds,d(x,y,u)) = \sum_{n\geq 1} \epsilon_{(t^{-1}S_n,(\tau_t^{(l)}Z(S_n,T_n),X_{\widetilde{S}_n},t^{-1}\widetilde{S}_n))}(ds,d(x,y,u))$$

(voir [13] p. 134)

On munit l'espace de probabilité donné (sur lequel est défini l'algorithme) de la filtration naturelle $(\mathcal{G}_s^{(t)})_{s\geq 0}$ associée à μ (cf. 1.25 p. 135 de [13]).

La fonction $v\;:\;\mathbb{R}_+\times M\times \mathbb{R}_+ \ni (x,y,u)\mapsto x$ permet de faire le lien avec le processus $(Y_s^{(t)})_{s\geq 0}$, car pour tout $s\geq 0$,

$$Y_s^{(t)} = \mu^{(t)}([0,s]\otimes v)$$

Toujours en suivant Jacod et Shiryaev, notons $G_n^{(t)}(ds,d(x,y,u))$ une version régulière de la distribution conditionnelle de $(t^{-1}S_{n+1},(\tau_t^{(l)}Z_{n+1},X_{\widetilde{S}_{n+1}},t^{-1}\widetilde{S}_{n+1}))$ sachant $\mathcal{G}_{S_n/t}^{(t)}$ (la tribu des événements antérieurs au temps d'arrêt S_n/t relativement à la filtration $(\mathcal{G}_s^{(t)})_{s\geq 0}$).

L'intérêt de ces probabilités aléatoires est qu'en toute généralité, d'après le théorème 1.33 p. 136 de [13], une version du compensateur $\nu^{(t)}$ du processus ponctuel $\mu^{(t)}$ est donné par

$$\nu^{(t)}(ds,d(x,y,u))=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{G_n^{(t)}([s,+\infty]\times \mathbb{R}_+\times M\times \mathbb{R}_+)}\mathbb{1}_{s\leq t^{-1}S_{n+1}}G_n^{(t)}(ds,d(x,y,u))$$

Ceci permet déjà de voir que les caractéristiques locales $(B_{Y^{(t)}}(h),C_{Y^{(t)}},\nu_{Y^{(t)}})$ de $Y^{(t)}$ dans la filtration $\mathcal{G}^{(t)}$ sont données par

$$\begin{aligned} B_{Y^{(t)}}(h) &= (h\circ v)*\nu^{(t)}\\ C_{Y^{(t)}} &= 0\\ \nu_{Y^{(t)}}(ds,dx) &= \nu^{(t)}(ds,dx,M\times\mathbb{R}_+) \end{aligned}$$

où on a repris les notations de [13] : $(h\circ v)*\nu^{(t)}$ désigne le processus $(\nu^{(t)}([0,s]\otimes h\circ v))_{s\geq 0}$ (la fonction de troncation h étant fixée comme avant le théorème 12).

Cependant d'après le théorème 2.4(b) p. 420 de [13], pour prouver le théorème 12 pour la famille de processus $(Y^{(t)})_{t>0}$, il suffit de montrer que pour tout $s\geq 0$,

(20) $$\lim_{t\to+\infty}\left|\nu^{(t)}([0,s]\otimes h\circ v)-\nu([0,s]\otimes h)\right|\overset{\text{(P)}}{=}0$$

(convergence en probabilité) et que pour toute fonction $g\in\mathcal{C}_1$ nulle dans un voisinage de 0,

(21) $$\lim_{t\to+\infty}\nu^{(t)}([0,s]\otimes g\circ v)\overset{\text{(P)}}{=}\nu([0,s]\otimes g)$$

(car il est clair que le processus limite issu de 0 dont les caractéristiques locales sont $(B(h),0,\nu)$ est sans point fixé de discontinuité, voir [13], corollaire 5.11 p. 116 et théorème 4.15 p. 106).

Les considérations précédentes fournissent le shéma général de la démonstration dans l'esprit du livre de Jacod et Shiryaev. Pour l'appliquer à notre situation, il faut tout d'abord s'intéresser à la probabilité $G_n^{(t)}(ds,d(x,y,u))$, qui de par la propriété de Markov forte de l'algorithme, ne dépend en fait que des deux variables aléatoires $\widetilde{S}_n$ et $X_{\widetilde{S}_n}$ (on aura remarqué que $\mathcal{G}^{(t)}_{S_n/t}\subset\mathcal{F}_{S_n}$). Plus précisément,

$$\begin{aligned} &G_n^{(t)}(ds,d(x,y,u))\\ &= \mathbb{P}[t^{-1}S_{n+1}\in ds,\tau_t^{(l)}Z_{n+1}\in dx,X_{\widetilde{S}_{n+1}}\in dy,t^{-1}\widetilde{S}_{n+1}\in du|t^{-1}\widetilde{S}_n,X_{\widetilde{S}_n}]\\ &= \left(\mathbb{P}_{s't,y'}[t^{-1}S_1+s'\in ds,\tau_t^{(l)}Z(s't+S_1,T_1)\in dx,X_{s't+S_1}\in dy,s'+t^{-1}S_1\in du]\right)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\circ(s'=t^{-1}\widetilde{S}_n,y'=X_{\widetilde{S}_n}) \end{aligned}$$

où pour $s'>0$ et $y'\in M$, $\mathbb{P}_{s',y'}[\,\cdot\,]$ désigne la probabilité relative à un algorithme de recuit simulé issu de y' au temps 0 et dont l'évolution de l'inverse de la température est $(\beta_u^{(s')})_{u\geq 0}$.

Soient $0<\epsilon<s$ fixés, on va dans un premier temps montrer que si g est une fonction qui est soit comme dans la condition (21), soit l'application h, alors

(22) $$\lim_{t\to+\infty}\nu^{(t)}([\epsilon,s]\otimes g\circ v)\overset{\text{(P)}}{=}\nu([\epsilon,s]\otimes g)$$

Pour ceci, soit $\alpha>0$, on décompose $\nu^{(t)}([\epsilon,s]\otimes g\circ v)$ en $Y_1^{(t)}(\epsilon',\epsilon,s)+Y_2^{(t)}(\epsilon',\epsilon,s)$, avec

$$\begin{aligned} Y_1^{(t)}(\epsilon',\epsilon,s) &= \sum_{t^{-1}S_n<\epsilon'}\int_{s\wedge t^{-1}\widetilde{S}_n\vee\epsilon}^{\epsilon\vee(t^{-1}S_{n+1})\wedge s}\frac{1}{G_n^{(t)}([u,+\infty]\times\mathbb{R}_+\times M\times\mathbb{R}_+)}G_n^{(t)}(du,g\circ v)\\ Y_2^{(t)}(\epsilon',\epsilon,s) &= \sum_{\epsilon'\leq t^{-1}S_n\leq s}\int_{s\wedge t^{-1}\widetilde{S}_n\vee\epsilon}^{\epsilon\vee(t^{-1}S_{n+1})\wedge s}\frac{1}{G_n^{(t)}([u,+\infty]\times\mathbb{R}_+\times M\times\mathbb{R}_+)}G_n^{(t)}(du,g\circ v) \end{aligned}$$

et où $0 < \epsilon' < \epsilon$ est choisi (en fonction de ϵ) de manière à ce que

(23) $$\liminf_{t\to+\infty} I\!P[\exists\, n \in I\!N \,/\, \epsilon' t \leq S_n < \epsilon t] \geq 1 - \alpha$$

Ceci est bien possible, car il suffit de prendre $0 < \epsilon' < \epsilon$ tel que

$$\widetilde{\nu}(]\epsilon/\epsilon', +\infty[) \leq \alpha$$

(où $\widetilde{\nu}$ est la loi introduite dans la section 3 avant le théorème 12), et utiliser le fait que pour $y' \notin \breve{M}$ ($0 < \epsilon' < \epsilon$ ayant été fixé),

$$\lim_{t\to+\infty} I\!P_{\epsilon' t, y'}[t^{-1} S_1 \geq \epsilon] = \widetilde{\nu}(]\epsilon/\epsilon', +\infty[) \leq \alpha$$

et la convergence rappelée précédemment

$$\lim_{t\to+\infty} I\!P[X_{\epsilon' t} \in \breve{M}] = 0$$

Or s'il existe un S_n entre les instants $\epsilon' t$ et ϵt, on a $Y_1^{(t)}(\epsilon', \epsilon, s) = 0$, et on est donc ramené à l'étude de $Y_2^{(t)}(\epsilon', \epsilon, s)$.

Mais d'après la remarque de la fin de la section 2, il existe deux constantes $K_{23} > 0$ et $\eta_7 > 0$ telles que pour tous $\epsilon' \leq s' \leq s$, $\epsilon \vee s' \leq u \leq s$ et $y' \in \widetilde{M}$,

$$\left| I\!P_{s' t, y'}[t^{-1} S_1 + s' \geq u] - \widetilde{\nu}\left(\left[\frac{t}{1 + s' t}(u - s'), +\infty\right[\right)\right| \leq K_{23}(1 + \epsilon' t)^{-\eta_7}$$

ce qui implique notamment qu'il existe une nouvelle constante $K_{24} > 0$ (qui dépend de ϵ', ϵ et de s, mais pas de $t \geq 1$) telle que pour s', u et y' comme ci-dessus,

$$\left| \frac{1}{I\!P_{s' t, y'}[t^{-1} S_1 + s' \geq u]} - \widetilde{\nu}^{-1}\left(\left[(s')^{-1}(u - s'), +\infty\right[\right)\right| \leq K_{24}(1 + \epsilon' t)^{-\eta_7}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
&\left| Y_2^{(t)}(\epsilon', \epsilon, s) - \sum_{\epsilon' \leq t^{-1} S_n \leq s} \int_{s \wedge t^{-1} \widetilde{S}_n \vee \epsilon}^{\epsilon \vee (t^{-1} S_{n+1}) \wedge s} \widetilde{\nu}^{-1}([(t^{-1} \widetilde{S}_n)^{-1}(u - t^{-1} \widetilde{S}_n), +\infty[) G_n^{(t)}(du, g \circ v) \right| \\
\leq\ & \sum_{\epsilon' \leq t^{-1} S_n \leq s} \int_{s \wedge t^{-1} \widetilde{S}_n \vee \epsilon}^{\epsilon \vee (t^{-1} S_{n+1}) \wedge s} G_n^{(t)}(du, g \circ v) \\
& \qquad \left| \frac{1}{G_n^{(t)}([u, +\infty] \times I\!R_+ \times M \times I\!R_+)} - \widetilde{\nu}^{-1}([(t^{-1} \widetilde{S}_n)^{-1}(u - t^{-1} \widetilde{S}_n), +\infty[) \right| \\
\leq\ & K_{24}(1 + \epsilon' t)^{-\eta_7} \sum_{\epsilon' \leq t^{-1} S_n \leq s} I\!P_{\widetilde{S}_n, X_{\widetilde{S}_n}}[t^{-1} S_1 \leq s] \, \|g\|_\infty \\
\leq\ & K_{24} \|g\|_\infty (1 + \epsilon' t)^{-\eta_7} \operatorname{card}\{n \,/\, t^{-1} S_n \leq s\}
\end{aligned}$$

or le membre de droite tend vers 0, car on vérifiera ci-dessous que p.s.,

(24) $$\limsup_{t\to+\infty} \ln^{-1}(1 + t) \operatorname{card}\{n \,/\, S_n \leq st\} < +\infty$$

ce qui montre que pour l'étude du comportement asymptotique en probabilité de $Y_2^{(t)}(\epsilon',\epsilon,s)$, il suffit de s'intéresser à

$$\sum_{\epsilon'\leq t^{-1}S_n\leq s}\int_{s\wedge t^{-1}\widetilde{S}_n\vee\epsilon}^{\epsilon\vee(t^{-1}S_{n+1})\wedge s}\widetilde{\nu}^{-1}([(t^{-1}\widetilde{S}_n)^{-1}(u-t^{-1}\widetilde{S}_n),+\infty[)G_n^{(t)}(du,g\circ v)$$
$$=\sum_{\epsilon'\leq t^{-1}S_n\leq s}\left(I\!\!E_{s't,y'}\left[\mathbf{1}_{(\epsilon-s')_+\leq t^{-1}S_1\leq s''-s'}\widetilde{\nu}^{-1}([(s')^{-1}t^{-1}S_1,+\infty[)g(\tau_t^{(l)}Z(s't+S_1,T_1))\right]\right)$$
$$\circ(s'=s\wedge t^{-1}\widetilde{S}_n,y'=X_{\widetilde{S}_n},s''=\epsilon\vee(t^{-1}S_{n+1})\wedge s)$$

Mais du fait que g est globalement lipschitzienne, on a en effectuant un développement limité que pour une certaine constante $K_{25}>0$, pour tout $\epsilon'\leq\check{s}\leq s$ et tout $\check{y}\in\check{M}$,

$$\begin{aligned}&\left|I\!\!E_{\check{s}t,\check{y}}[g(\tau_t^{(l)}Z(\check{s}t,T_1))]-I\!\!E_{\check{s}t,\check{y}}[g(\tau_t^{(l)}(1+\check{s}t)^{k^{-1}l}T_1)]\right|\\ &\leq\ K_{25}\tau_t^{(l)}(1+\epsilon't)^{k^{-1}l-1}I\!\!E_{\check{s}t,\check{y}}[T_1^2]\\ &\leq\ K_{26}(1+t)^{-k^{-1}(l+\delta)}(1+\epsilon't)^{k^{-1}(l-k)}(1+\check{s}t)^{2k^{-1}\delta}\\ &\leq\ K_{27}(1+t)^{k^{-1}(\delta-k)}\end{aligned}$$

(l'avant-dernière inégalité découlant des considérations de la fin de la section précédente). En conditionnant par rapport à $(S_1,X_{S_1})=((\check{s}-s')t,\check{y})$, on en déduit que pour tous $\epsilon'\leq s'\leq s''\leq s$ et $y'\in\widetilde{M}$,

$$\begin{aligned}&\Big|I\!\!E_{s't,y'}\left[\mathbf{1}_{(\epsilon-s')_+\leq t^{-1}S_1\leq(s''\vee\epsilon)-s'}\widetilde{\nu}^{-1}([(s')^{-1}t^{-1}S_1,+\infty[)g(\tau_t^{(l)}Z(s't+S_1,T_1))\right]\\ &\quad-I\!\!E_{s't,y'}\left[\mathbf{1}_{(\epsilon-s')_+\leq t^{-1}S_1\leq(s''\vee\epsilon)-s'}\widetilde{\nu}^{-1}([(s')^{-1}t^{-1}S_1,+\infty[)g(\tau_t^{(l)}(1+s't+S_1)^{k^{-1}l}T_1)\right]\Big|\\ &\qquad\leq K_{27}(1+t)^{k^{-1}\delta-1}\end{aligned}$$

ce qui nous ramène, via (24) et le fait que $\delta<k$, à l'étude de

$$\sum_{\epsilon t\leq S_n\leq st}\left(I\!\!E_{s't,y'}\left[\mathbf{1}_{(\epsilon-s')_+\leq t^{-1}S_1\leq s''-s'}\widetilde{\nu}^{-1}([(s')^{-1}t^{-1}S_1,+\infty[)g(\tau_t^{(l)}(1+s't+S_1)^{k^{-1}l}T_1)\right]\right)$$
$$\circ(s'=s\wedge t^{-1}\widetilde{S}_n,y'=X_{\widetilde{S}_n},s''=\epsilon\vee(t^{-1}S_{n+1})\wedge s)$$

Pour $\widetilde{s}\geq 0$ et $\widetilde{y}\in\check{M}$, notons

$$\widetilde{G}_g(\widetilde{s},\widetilde{y})=\int_{I\!\!R_+}g\left(k^{-1}(l+\delta)\mu(N)\mu^{-1}(N_{\breve{M}})\widetilde{s}^{k^{-1}(l+\delta)}z\right)\ \breve{\nu}_{\widetilde{y}}(dz)$$

où la probabilité $\breve{\nu}_{\widetilde{y}}$ est la loi décrite dans la section précédente. On vérifie comme précédemment (en conditionnant par rapport au couple $(S_1,X_{S_1})=((\check{s}-s')t,\widetilde{y})$ et en utilisant les techniques et estimées des fins des sections 2 et 3, ainsi que l'équivalent (19) et la remarque qui le suit) qu'il existe une constante $K_{28}>0$ telle que pour tous $\epsilon'\leq s'\leq s''\leq s$ et $y'\in\widetilde{M}$,

$$\begin{aligned}&\Big|I\!\!E_{s't,y'}\left[\mathbf{1}_{(\epsilon-s')_+\leq t^{-1}S_1\leq(s''\vee\epsilon)-s'}\widetilde{\nu}^{-1}([(s't)^{-1}S_1,+\infty[)g(\tau_t^{(l)}(1+s't+S_1)^{k^{-1}l}T_1)\right]\\ &\quad-\int_{(s')^{-1}(\epsilon-s')_+}^{(s')^{-1}((s''\vee\epsilon)-s')}\frac{1}{\widetilde{\nu}([u,+\infty[)}G_g(s'+s'u)\,\widetilde{\nu}(du)\Big|\ \leq\ K_{28}(1+\ln(1+\epsilon t))^{-2}\end{aligned}$$

où on a posé pour tout $w\geq 0$,

$$\begin{aligned}G_g(w)\ &=\ \int\widetilde{G}_g(w,y)\,r_0(dy)\\ &=\ \int_{I\!\!R_+}g\left(k^{-1}(l+\delta)\mu(N)\mu^{-1}(N_{\breve{M}})w^{k^{-1}(l+\delta)}z\right)\ \breve{\nu}(dz)\end{aligned}$$

la loi $\breve{\nu}$ étant celle qui a déjà été introduite dans la section précédente.

Toujours grâce à (24), on en déduit la convergence en probabilité vers 0 de

$$\sum_{\epsilon' t\leq S_n\leq st}\Big[\Big(E_{s't,y'}[\mathbf{1}_{(\epsilon-s')_+\leq t^{-1}S_1\leq s''-s'}\breve{\nu}^{-1}([(s')^{-1}t^{-1}S_1,+\infty[)g(\tau_t^{(l)}(1+s't+S_1)^{k^{-1}l}T_1)]\Big)$$

$$\circ(s'=s\wedge t^{-1}\widetilde{S}_n,y'=X_{\widetilde{S}_n},s''=\epsilon\vee(t^{-1}S_{n+1})\wedge s)\Big]$$

$$-\sum_{\epsilon' t\leq S_n\leq st}\int_{(s\wedge t^{-1}\widetilde{S}_n)^{-1}(\epsilon-s\wedge t^{-1}\widetilde{S}_n)_+}^{(s\wedge t^{-1}\widetilde{S}_n)^{-1}(\epsilon\vee(t^{-1}S_{n+1})\wedge s-s\wedge t^{-1}\widetilde{S}_n)}\frac{1}{\breve{\nu}([u,+\infty[)}G_g(s\wedge t^{-1}\widetilde{S}_n+s\wedge t^{-1}\widetilde{S}_nu)\,\breve{\nu}(du)$$

Mais, en effectuant le changement de variable $u'=s'(1+u)$, on a pour tous $\epsilon'\leq s'\leq s''\leq s$,

$$\int_{(s')^{-1}(\epsilon-s')_+}^{(s')^{-1}(s''-s')}\frac{1}{\breve{\nu}([u,+\infty[)}G_g(s'+s'u)\,\breve{\nu}(du)\quad=\quad\widetilde{R}_0^{-1}\int_{\epsilon\vee s'}^{s''}\frac{1}{u'}G_g(u')\,du'$$

or

$$0\leq\sum_{\epsilon' t\leq S_n\leq st}\int_{\epsilon\vee t^{-1}S_n}^{\epsilon\vee(t^{-1}\widetilde{S}_n)\wedge s}G_g(u)\,du\leq\Big[\max_{\epsilon\leq u\leq s}G_g(u)\Big](1+t)^{-1}\int_0^{st}\mathbf{1}_{\breve{M}}(X_u)\,du$$

et il est bien connu (voir par exemple [18]) que le membre de droite converge p.s. vers 0 quand t devient grand, d'où finalement la convergence en probabilité de $Y_2^{(t)}(\epsilon',\epsilon,s)$ vers

$$\sum_{\epsilon' t\leq S_n\leq st}\int_{\epsilon\vee S_nt^{-1}}^{\epsilon\vee(t^{-1}S_{n+1})\wedge s}\frac{1}{u}G_g(u)\,du$$

Cependant, s'il existe un S_n entre les instants $\epsilon' t$ et ϵt, la somme précédente vaut

$$\int_\epsilon^s\frac{1}{u}G_g(u)\,du=\nu([\epsilon,s]\otimes g)$$

En fin de compte, on a donc montré, après une nouvelle application de (23), que pour tout $\alpha'>0$,

$$\limsup_{t\to+\infty}P\left[\left|\nu^{(t)}([\epsilon,s]\otimes g\circ v)-\nu([\epsilon,s]\otimes g)\right|>\alpha'\right]\leq 2\alpha$$

et ceci étant vérifié pour tout $\alpha>0$, on en déduit bien la convergence (22).

Pour obtenir les deux conditions (20) et (21), il suffit donc de montrer, $\alpha'>0$ étant fixé, que $\limsup_{t\to+\infty}P[\nu^{(t)}([0,\epsilon]\otimes g\circ v)\geq\alpha']$ converge vers 0 quand ϵ devient petit, ce qui peut se voir en vérifiant par exemple que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\limsup_{t\to+\infty}E[\nu^{(t)}([0,\epsilon]\otimes g\circ v)]=0\tag{25}$$

(car il est clair par ailleurs que $\lim_{\epsilon\to 0}\nu([0,\epsilon]\otimes g\circ v)=0$).

Cependant, notons que

$$\begin{aligned}E[\nu^{(t)}([0,\epsilon]\otimes g\circ v)] &= E[\mu^{(t)}([0,\epsilon]\otimes g\circ v)]\\ &= E\left[\sum_{S_n\leq\epsilon t}g(\tau_t^{(l)}Z(S_n,T_n))\right]\\ &\leq K_{29}\tau_t^{(l)}E\left[\sum_{S_n\leq\epsilon t}Z(S_n,T_n)\right]\end{aligned}$$

car il existe une constante $K_{29} > 0$ telle que pour tout $x \geq 0$, $0 \leq g(x) \leq K_{29}x$.

On vérifie aussi que pour une certaine constante $K_{30} > 0$, on a pour tout $n \geq 1$,

$$Z(S_n, T_n) \leq K_{30}(1+S_n)^{k^{-1}l}T_n$$

(car rappelons que $l \leq 0$), ainsi, en conditionnant dans $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{S_n \leq \epsilon t}(1+S_n)^{k^{-1}l}T_n]$ par (S_n, X_{S_n}) (c'est-à-dire par rapport à la tribu $\mathcal{F}_{S_n}$ des événements antérieurs au temps S_n pour l'algorithme $(X_s)_{s\geq 0}$), et en utilisant (18), on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\nu^{(t)}([0,\epsilon]\otimes g\circ v)] &\leq K_{31}\tau_t^{(l)}\mathbb{E}\left[\sum_{S_n\leq \epsilon t}(1+S_n)^{k^{-1}(l+\delta)}\right]\\ &\leq K_{32}(1+t)^{-k^{-1}(l+\delta)}\mathbb{E}\left[\sum_{S_n\leq \epsilon t}(1+S_n)^{k^{-1}(l+\delta)}\right]\end{aligned}$$

Pour évaluer le terme de droite, soit ϕ l'indicatrice de $\widetilde{M}'$, il existe une martingale $(M_u^\phi)_{u\geq 0}$ issue de 0 telle que pour tout $u \geq 0$,

$$\phi(X_u) = \phi(X_0) + \int_0^u L_{\beta_v}\phi(X_v)\,dv + M_u^\phi$$

ce qui s'écrit encore

$$\sum_{v\leq u}\phi(X_v) - \phi(X_{v-}) = \int_0^u L_{\beta_v}\phi(X_v)\,dv + M_u^\phi$$

En intégrant le processus prévisible (pour la filtration $(\mathcal{F}_u)_{u\geq 0}$ naturellement engendrée par l'algorithme $(X_u)_{u\geq 0}$) $v \mapsto (1+v)^{k^{-1}(l+\delta)}\mathbb{1}_{\widetilde{M}}(X_{v-})$ par rapport à ces processus, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{S_n\leq u}(1+S_n)^{k^{-1}(l+\delta)} &= \sum_{v\leq u}(1+v)^{k^{-1}(l+\delta)}\mathbb{1}_{\widetilde{M}}(X_{v-})[\phi(X_v)-\phi(X_{v-})]\\ &= \int_0^u(1+v)^{k^{-1}(l+\delta)}\mathbb{1}_{\widetilde{M}}(X_{v-})L_{\beta_v}\phi(X_v)\,dv + \int_0^u(1+v)^{k^{-1}(l+\delta)}\mathbb{1}_{\widetilde{M}}(X_{v-})\,dM_v^\phi\\ &= \int_0^u(1+v)^{k^{-1}(l+\delta)}\mathbb{1}_{\widetilde{M}}(X_v)L_{\beta_v}\phi(X_v)\,dv + \int_0^u(1+v)^{k^{-1}(l+\delta)}\mathbb{1}_{\widetilde{M}}(X_{v-})\,dM_v^\phi\end{aligned}$$

Ce dernier terme est une martingale, ainsi en prenant $u = \epsilon t$ et en intégrant, il apparaît que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{S_n\leq \epsilon t}(1+S_n)^{k^{-1}(l+\delta)}\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^{\epsilon t}(1+v)^{k^{-1}(l+\delta)}\mathbb{1}_{\widetilde{M}}(X_v)L_{\beta_v}\phi(X_v)\,dv\right]\\ &= \int_0^{\epsilon t}(1+v)^{k^{-1}(l+\delta)}m_v(\mathbb{1}_{\widetilde{M}}L_{\beta_v}\phi)\,dv\end{aligned}$$

où m_v est la loi de X_v sur M. Cependant d'après Holley et Stroock [10] (voir aussi Concordet [2] pour une amélioration de ces estimées), la densité de m_v par rapport à μ_{β_v} est uniformément bornée pour $v \geq 0$ (car $k > c(M,U)$), et on est donc ramené à évaluer

$$(1+t)^{-k^{-1}(l+\delta)}\int_0^{\epsilon t}(1+v)^{k^{-1}(l+\delta)}\mu_{\beta_v}(\mathbb{1}_{\widetilde{M}}L_{\beta_v}\phi)\,dv$$

L'égalité (25) découle alors immédiatement de l'existence d'un constante $K_{33} > 0$ telle que l'on ait pour tout $v \geq 0$

$$\mu_{\beta_v}(\mathbb{1}_{\widetilde{M}}L_{\beta_v}\phi) \leq K_{33}(1+v)^{-1}$$

Remarque :

Soit $S \geq 0$, en reprenant les démonstrations ci-dessus, on vérifierait facilement que la convergence dans la condition (20) est uniforme en $0 \leq s \leq S$. Ainsi, en utilisant le théorème 2.17 p. 423 de [13], on obtient que la convergence de $(Y_s^{(t)})_{s\geq 0}$ vers $Q_{a,b,c}$, avec a, b, c comme dans le théorème 12, à lieu non seulement pour les marginales finies, mais aussi au sens de la convergence étroite sur $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ muni de la topologie de Skorhokod. Par contre, notons que ce résultat est faux pour le processus continu $(G_s^{(t)}(\breve{M}, l))_{s\geq 0}$: En effet, si d est l'une des distances bornées compatibles avec la topologie de Skorokhod, il suffit pour s'en convaincre de considérer la fonction continue bornée $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}) \ni w \mapsto d(\mathbb{C}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}), w)$, où $\mathbb{C}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ est l'ensemble fermé des trajectoires continues de $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$.

Pour être complet, il faut encore vérifier (24), et pour cela on commence par reprendre la technique présentée ci-dessus :

$$\begin{aligned}
\mathrm{card}\{n \,/\, S_n \leq t\} &= \sum_{S_n \leq t} 1 \\
&= \int_0^t \mathbb{1}_{\widetilde{M}}(X_u) L_{\beta_u}\phi(X_u)\, du + \int_0^t \mathbb{1}_{\widetilde{M}}(X_{u-})\, dM_u^\phi
\end{aligned}$$

Cependant, d'après la proposition 3, il existe une constante $K_{34} > 0$ telle que pour t grand,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \mathbb{1}_{\widetilde{M}}(X_u) L_{\beta_u}\phi(X_u)\, du &\sim \int_0^t \mu_{\beta_u}(\mathbb{1}_{\widetilde{M}} L_{\beta_u}\phi)\, du \\
&\sim K_{34} \ln(1+t)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, la martingale

$$\left(\int_0^t \mathbb{1}_{\widetilde{M}}(X_{u-})\, dM_u^\phi\right)_{t\geq 0}$$

n'admet que des sauts de hauteur 1 et son crochet oblique est donné par

$$\begin{aligned}
\left\langle \int_0^\cdot \mathbb{1}_{\widetilde{M}}(X_{u-})\, dM_u^\phi \right\rangle_t &= \int_0^t \mathbb{1}_{\widetilde{M}}(X_{u-})\, d\left\langle M^\phi \right\rangle_u \\
&= \int_0^t \mathbb{1}_{\widetilde{M}}(X_u) \Gamma_{\beta_u}(\phi, \phi)(X_u)\, du
\end{aligned}$$

En utilisant à nouveau la proposition 3 et la loi du logarithme itéré pour les martingales (voir par exemple Lepingle [15]), on obtient alors que p.s.

$$\lim_{t\to+\infty} \ln^{-1}(1+t) \int_0^t \mathbb{1}_{\widetilde{M}}(X_{u-})\, dM_u^\phi = 0$$

ce qui permet de conclure à la validité de (24).

5 Généralisation et exemple

Pour pouvoir traiter le cas général, on a besoin d'une extension du théorème 12. Les démonstrations étant identiques à celles déjà présentées ci-dessus, on se contentera d'énoncer le résultat.

Soit donc $x_0 \in \widehat{M} \setminus \widehat{M}$ fixé quelconque. On reprend les notations de la section 3, rappelons notamment que $\breve{M}$ est la composante connexe de $\widehat{M} \setminus \widetilde{M}$ à laquelle appartient x_0 et que $A_1, \cdots, A_n$ sont les composantes connexes de $\breve{M} \cap \{x \in M \,/\, U(x) < k\}$. Soit $1 \leq i_0 \leq n$ tel que $x_0 \in A_{i_0}$, et supposons à nouveau que $(Z^{(r_0)}_u)_{u\geq 0}$ est un processus de Markov homogène sur $\check{G}$, admettant $\check{q}$ pour noyau d'intensités de transitions et de loi initiale r_0. On considère

$$\breve{T}^{(r_0,i_0)} = \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{i_0\}}(Z^{(r_0)}_u)\, du$$

qui est une variable aléatoire p.s. finie, et on note $\breve{\nu}^{(i_0)}$ sa loi.

Puis, pour $0 \geq l > \min_{A_{i_0}} U - k$, on pose pour tous $s, t \geq 0$,

$$G^{(t)}_s(A_{i_0}, l) = \left(\int_0^t \exp(l\beta_u)\mu_{\beta_u}(A_{i_0})\, du\right)^{-1} \int_0^{st} \exp(l\beta_u)\mathbf{1}_{A_{i_0}}(X_u)\, du$$

Enfin, pour tous réels a, b, c strictement positifs, soit $Q^{(i_0)}_{a,b,c}$ la loi sur $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$ du processus de sauts à accroissements indépendants dont les caractéristiques locales sont donnés par

$$\begin{array}{rcl} \nu(ds\,dx) & = & bs^{-1}ds\ \breve{\nu}^{(i_0)}(c^{-1}s^{-a}dx) \\ B(h) & = & h * \nu \\ C & \equiv & 0 \end{array}$$

Alors,

Théorème 14

On a la convergence étroite quand t devient grand des marginales finies du processus $(G^{(t)}_s(A_{i_0}, l))_{s\geq 0}$ vers les lois des marginales correspondantes sous $Q^{(i_0)}_{a,b,c}$, avec

$$\begin{array}{rcl} a & = & k^{-1}(l + k - \min_{A_{i_0}} U) \\ b & = & \widetilde{R}_0^{-1} \\ c & = & k^{-1}(l + k - \min_{A_{i_0}} U)\mu(N)\mu^{-1}(N_{A_{i_0}}) \end{array}$$

De la même manière que l'on déduit le corollaire 13 du théorème 12, on obtient ici,

Corollaire 15

On a la convergence étroite pour t grand des marginales finies du processus $(G^{(t)}_s(x_0))_{s\geq 0}$ vers les lois des marginales correspondantes sous $Q^{(i_0)}_{a,b,c}$, avec

$$\begin{array}{rcl} a & = & k^{-1}(k - U(x_0)) \\ b & = & \widetilde{R}_0^{-1} \\ c & = & k^{-1}(k - U(x_0))\mu(N)\mu^{-1}(N_{A_{i_0}}) \end{array}$$

On peut en fait expliciter plus précisément la forme de la loi $\breve{\nu}^{(i_0)}$:
Soient

$$\begin{array}{rcl} \widehat{S}^{(r_0)} & = & \inf\{s \geq 0 \,/\, Z^{(r_0)}_s \in \{0, i_0\}\} \\ p_1 & = & \mathbb{P}[Z^{(r_0)}_{\widehat{S}^{(r_0)}} = 0] \end{array}$$

Par ailleurs, considérons un processus de Markov homogène $(Z^{(r_{i_0})}_u)_{u\geq 0}$ sur $\check{G}$, admettant $\check{q}$ pour noyau d'intensités de transitions et de loi initiale r_{i_0}. Comme ci-dessus, soient

$$\begin{array}{rcl} \widehat{S}^{(r_{i_0})} & = & \inf\{s \geq 0 \,/\, Z^{(r_{i_0})}_s \in \{0, i_0\}\} \\ p_2 & = & \mathbb{P}[Z^{(r_{i_0})}_{\widehat{S}^{(r_{i_0})}} = 0] \end{array}$$

(par homogénéité, on trouverait les mêmes nombres p_1 et p_2 en considérant respectivement les chaînes de Markov $(\widetilde{Z}_u^{(r_0)})_{u\in\mathbb{N}}$ et $(\widetilde{Z}_u^{(r_{i_0})})_{u\in\mathbb{N}}$ définies comme dans la section 3).

On notera également $(T_p)_{p\geq 1}$ une famille de temps exponentiels indépendants et de moyenne $\widetilde{R}_{i_0}$. On calcule alors que pour tout $\lambda \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\exp(-\lambda \breve{T}^{(i_0)})] &= p_1 + (1-p_1)\sum_{p\geq 1}(1-p_2)^{p-1}p_2\mathbb{E}[\exp(-\lambda[T_1+\cdots+T_p])] \\
&= p_1 + (1-p_1)p_2\sum_{p\geq 1}(1-p_2)^{p-1}(1+\lambda\widetilde{R}_{i_0})^{-p} \\
&= p_1 + (1-p_1)p_2(1+\lambda\widetilde{R}_{i_0})^{-1}[1-(1-p_2)(1+\lambda\widetilde{R}_{i_0})^{-1}]^{-1} \\
&= p_1 + (1-p_1)(1+\lambda p_2^{-1}\widetilde{R}_{i_0})^{-1}
\end{aligned}$$

Ainsi, il apparaît que $\breve{\nu}^{(i_0)}$ est une somme pondérée d'une loi de Dirac en 0 et d'une loi exponentielle de moyenne $p_2^{-1}\widetilde{R}_{i_0}$:

$$\breve{\nu}^{(i_0)} = p_1\delta_0 + (1-p_1)\mathcal{E}(p_2^{-1}\widetilde{R}_{i_0})$$

Ce résultat est aussi valable pour $\breve{\nu}$ dans le cas décrit avant le corollaire 13, car on a alors $\breve{\nu} = \breve{\nu}^{(i_0)}$.

Nous pouvons maintenant traiter l'exemple le plus simple des situations discutées dans cet article : Soit un ensemble à trois points $M = \{x_1, x_2, x_3\}$, muni du noyau d'intensités de transitions q qui est défini par

$$q(x_1,x_2) = q(x_2,x_1) = q(x_2,x_3) = q(x_3,x_2) = 1$$

$$q(x_1,x_3) = q(x_3,x_1) = 0$$

et de la mesure μ qui est alors la probabilité équidistribuée sur M.

Soit $k > \delta > 0$, on considère le potentiel U prenant les valeurs :

$$\begin{aligned}
U(x_1) &= 0 \\
U(x_2) &= k \\
U(x_3) &= k-\delta
\end{aligned}$$

Comme dans l'introduction, on s'intéresse à un algorithme de recuit simulé $(X_s)_{s\geq 0}$ sur M associé à la fonction U et à la décroissance de la température donnée par $(\beta_s^{-1})_{s\geq 0}$, et on considère la famille indexée par $t > 0$ des processus de temps d'occupations en x_3 renormalisés, $(G_s^{(t)}(x_3))_{s\geq 0}$. D'après ce qui précède, ses marginales finies convergent pour t grand vers les marginales correspondantes du processus à accroissements indépendants dont les caractéristiques locales sont

$$\begin{aligned}
\nu(ds,dx) &= s^{-1}ds\left(\frac{1}{2}\delta_0(dx) + \frac{1}{4k^{-1}\delta s^{k^{-1}\delta}}\exp\left[-\frac{x}{2k^{-1}\delta s^{k^{-1}\delta}}\right]dx\right) \\
B(h) &= h*\nu \\
C &\equiv 0
\end{aligned}$$

Remarques :

- Les résultats présentés dans cet article ont quelques similarités avec certains de ceux obtenus par Dobrushin [6] et Hanen [9] (qui considèrent plutôt une famille (paramétrée par $n \in \mathbb{N}$) de chaînes de Markov homogènes arrétées à l'instant n, voir aussi [12]). On peut se demander s'il ne serait pas possible de les retrouver par les mêmes techniques que celles utilisées ici (qui à la base, reposent sur les estimées à basse température de la première valeur propre des générateurs dues à Holley et Stroock [10] (dont découle la proposition 1, voir [18], qui permet de résoudre le problème de sortie comme expliqué dans la section 2) et sur les théorèmes limites pour les semimartingales provenant du livre de Jacod et Shiryaev). Mais il faut pour cela étendre les calculs précédents aux situations non instantanément réversibles pour lesquels les intensités de transitions ne proviennent pas d'un potentiel donné a priori, ce qui complique la description des cycles, présentée dans ces cas par Hwang et Sheu [11] (voir aussi Trouvé [19]). Néanmoins, il ne devrait pas y avoir trop de difficultés, et on travaille actuellement à la résolution du problème de sortie dans ces situations et dans des cas continus où l'espace des phases est une variété riemannienne compacte et connexe à bord.

- Notons que le processus $(X_s)_{s\geq 0}$ satisfait la loi du 0-1 sur la tribu de queue qu'il engendre. En effet, d'après la démonstration du théorème 2 de Ueno [20], il suffit de voir que pour tout $t \geq 0$ fixé, l'algorithme $(X_s^{(t)})_{s\geq 0}$ associé à la fonction U et à l'évolution d'inverse de température $(\beta_s^{(t)})_{s\geq 0}$ converge en loi (et donc ici au sens de la variation totale) vers une probabilité μ' indépendante de la loi initiale de $X_0^{(t)}$. Or il est bien connu que ceci est vérifié (voir par exemple [17] ou [2] pour des résultats plus précis) et que $\mu' = \mu_\infty$, la renormalisation de la restriction de μ à N.

Soit $(Y_s)_{s\geq 0}$ un processus à accroissements indépendants admettant $Q_{a,b,c}$ pour loi, avec a, b, c comme dans le corollaire 15. En utilisant le fait que $\lim_{s\to 0^+} Y_s = 0$, que Y_s est la somme de ses sauts avant l'instant s et que les couples formés de l'instant de saut et de la hauteur du saut suivent une loi de Poisson sur $I\!R_+ \times I\!R_+$ (voir le théorème 4.8 p. 104 de [13]) associée à la mesure de Levy ν (on a inclus certains "sauts" de hauteur nulle, correspondant au fait que $\breve{\nu}(\{0\}) \neq 0$), on vérifie facilement que le support de la loi de Y_1 est tout $I\!R_+$.

La loi du 0-1 satisfaite par l'algorithme permet alors de se rendre compte que p.s.

$$\begin{aligned} \limsup_{t\to+\infty} g_t^{-1}(x_0)G_t(x_0) &= +\infty \\ \liminf_{t\to+\infty} g_t^{-1}(x_0)G_t(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

ce qui interdit notamment une loi forte des grands nombres.

Une loi faible des grands nombres (convergence de $g_t^{-1}(x_0)G_t(x_0)$ en probabilité au lieu de p.s.) est également à exclure, car la variable aléatoire limite devrait être déterministe, ce qui est en contradiction avec ce qui précède. On retrouve ainsi les remarques faites par Gantert [8] sur un exemple qui présente certaines similarités avec les situations traitées ici, même s'il ne rentre pas tout à fait dans notre cadre.

References

[1] O. Catoni, Sharp large deviations estimates for simulated annealing algorithms, *Annales de l'IHP*, vol. 27 n$^\text{o}$ 3, 1991, p. 291-383.

[2] D. Concordet, Estimation de la densité du recuit simulé, à paraître dans les *Annales de l'IHP*.

[3] M. Day, Recent Progress on the Small Parameter Exit Problem, *Stochastics*, vol. 20, 1987, p. 121-150.

[4] M. Day, Large Deviations Results for the Exit Problem with Charasteristic Boundary, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 147, 1990, p. 134-153.

[5] A. Devinatz et A. Friedman, The asymptotic behavior of the solution of a singularly perturbed Dirichlet problem, *Indiana J. Math.*, vol. 2, 1978, p. 527-537.

[6] R.L. Dobrushin, Limit Theorems for Two State Markov Chains, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 17, 1953, p. 291-329.

[7] M.I. Freidlin and A.D. Wentzell, *Random Perturbations of Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 1984.

[8] N. Gantert, Laws of Large Numbers for the Annealing Algorithm, *Stoch. Proc. and their Appl.*, vol. 35 n° 2, 1990, p. 309-313.

[9] A. Hanen, Théorèmes limites pour une suite de chaînes de Markov, *Ann. Inst. H. Poincaré*, 18, 1963, p. 197-301.

[10] R. Holley et D. Stroock, Annealing via Sobolev Inequalities, *C.M.P.*, vol. 115, 1988, p. 553-569.

[11] C.R. Hwang et S.J. Sheu, Singular Perturbed Markov Chains and Exact Behaviors of Simulated Annealing Processes, *Journal of Theoretical Probability*, vol. 5 n° 2, 1992, p. 223-249.

[12] M. Iosifescu, *Finite Markov Processes and Their Applications*, Wiley, 1980.

[13] J. Jacod et A.N. Shiryaev, *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer, 1987.

[14] S. Kamin, Elliptic perturbation of a first order operator with a singular point of attracting type, *Indiana U. Math. J.*, vol. 27, 1978, p. 935-952.

[15] D. Lepingle, Sur le comportement asymptotique des martingales locales, *Séminaire de Probabilités XII*, LNM. 649, Springer-Verlag, 1978, p. 148-161.

[16] B.J. Matkowsky et Z. Schuss, The exit problem for randomly perturbed dynamical systems, *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 36, 1979, p. 365-382.

[17] L. Miclo, Recuit simulé sans potentiel sur un ensemble fini, *Séminaire de Probabilités*, LNM. 1526, Springer-Verlag, 1992, p. 47-60.

[18] L. Miclo, Remarques sur l'ergodicité des algorithmes de recuit simulé sur un graphe, soumis à *Stochastic processes and their applications*, 1994.

[19] A. Trouvé, *Parallélisation massive du recuit simulé*, Thèse de doctorat, Université Paris 11, Janvier 1993.

[20] T. Ueno, Some Limit Theorems for Temporally Discrete Markov Processes, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I*, 7, 1957, p. 449-462.