which is obviously $\mathscr{B}_{\mathscr{M}}/\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$. Therefore, by a Monotone-Class argument, $L_H \in \mathscr{B}_{\mathscr{M}}/\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ for any bounded $H \in \mathscr{B}_{\mathscr{M}} \times \mathscr{F}^{\circ}_{\infty}/\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$. Finally, note that

$$\hat{L}(P) \triangleq P \circ f(P, \cdot)^{-1}(\hat{A}) = \int_{\Omega} \prod_{i=1}^{n} 1_{A_i}(f_{t_i}(P, \omega))P(d\omega),$$

and

$H \triangleq \prod_{i=1}^{n} (1_{A_i} \circ \pi_{t_i} \circ f) \in \mathscr{B}_{\mathscr{M}} \times \mathscr{F}^{\circ}_{\infty}/\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$, we see that $\hat{L} = L_H$ and the lemma follows.

Acknowledgements

I would like to thank Professor Naresh Jain for his valuable help during the time when most of this paper was accomplished. My thanks are also due to Professor N. V. Krylov form any useful discussions.

References

[1] E. N. Barron, R. Jensen and J. L. Menaldi, *Optimal Control and Differential Games with Measures*, Preprint, (1990).
[2] V. E. Beněs, L. A. Shepp and H. S. Witsenhausen, Some solvable stochastic control problems, *Stochastics*, **4** (1980), 39–83.
[3] D. P. Bertsekas and S. E. Shreve, *Stochastic Optimal Control, The Discrete Time Case*, Academic Press (1978).
[4] M. Chaleyat-Maurel, N. El Karoui and B, Marchal, Réflexion discontinue et systèmes stochastiques, *Ann. Probab.* **8** (1980), 1049–1067.
[5] P. Dupuis and H. Ishii, On Lipschitz continuity of the solution mapping to the Skorohod problem, with applications, *Stochastics and Stochastic Reports*, **35** (1991), 31–62.
[6] S. N. Ethier and T. G. Kurtz, *Markov Processes: Characterization and Convergence*, John Wiley & Sons. Inc. (1986).
[7] J. M. Harrison and M. I. Taksar, Instantaneous control of Brownian motion, *Math. of Oper. Res.*, **8**(3) (1983), 439–453.
[8] M. G. Crandall, H. Ishii and P.-L. Lions, User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc.* (New Series), **27** (1992), 1–67.
[9] N. El Karoui and I. Karatzas, Probabilistic aspects of finite-fuel, reflected follower problems, *Acta Applicandae Mathematicae* **11** (1988), 223–258.
[10] I. Karatzas, A class of singular stochastic control problems, *Adv. Appl. Prob.*, **15** (1983), 225–254.
[11] I. Karatzas and S. E. Shreve, Connections between optimal stopping and singular stochastic control II. Reflected follower problems, *SIAM J. Contr. and Optim.*, **23**(3) (1985), 433–451.
[12] I. Karatzas and S. E. Shreve, Equivalent models for finite-fuel stochastic control, *Stochastics* **18** (1986), 245–276.
[13] I. Karatzas and S. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, New York, 1987.
[14] J. Ma, On the principle of smooth fit for a class of singular stochastic control problems for diffusions, *SIAM J. Contr. and Optim.*, **30**, July (1992).
[15] J. Ma, Discontinuous reflection, and a class of singular stochastic control problems for diffusions, preprint (to appear in Stochastics), (1992).
[16] P. A. Meyer, *Un Cours Sur Les Intégrales Stochastiques*, Séminaire de Probabilités, X., Lecture *Notes in Math.* **511** (1976), Springer.
[17] P. Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations, A New Approach*, Springer-Verlag (1990).
[18] S. E. Shreve, J. P. Lehoczky and D. P. Gaver, Optimal consumption for general diffusions with absorbing and reflecting barriers, *SIAM. J. Contr. and Optim.*, **22**(1) (1984), 55–75.
[19] H. M. Soner and S. E. Shreve, Regularity of the value function for a two-dimensional singular stochastic control problem, *SIAM. J. Contr. and Optim.*, **27**(4) (1989), 876–907.
[20] D. W. Stroock and S. R. S. Varadhan, *Multidimensional Diffusion Processes*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1979).

Stochastics and Stochastics Reports, Vol. 46, pp. 193–268
Reprints available directly from the publisher
Photocopying permitted by license only

UN ALGORITHME DE RECUIT SIMULÉ COUPLÉ AVEC UNE DIFFUSION

LAURENT MICLO

Département de mathématiques, Université Louis Pasteur, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France

(Received 4 June 1992; in final form 9 December 1992)

We consider a kind of simulated annealing algorithm to deal with a special potential which we cannot calculate explicitly. More precisely, let M be a compact and connected Riemannian manifold and, for a parameter θ living in the circle N, let b_θ be a vector field on M (we also suppose that b_θ is smooth in θ). We associate to b_θ a diffusion process X^θ described heuristically by $dX_t^\theta = dB_t + b_\theta(X_t^\theta)\,dt$ where B is a Brownian motion in M. There is a unique invariant probability μ_θ for this diffusion. Let f be a smooth function on $M \times N$, and define, for $\theta \in N$, $F(\theta) = \int_M f(x, \theta)\mu_\theta(dx)$. The purpose of this paper is to present an algorithm (using only directly b_θ and f) to find out where are hidden the global minima of the potential F on N. This algorithm is constructed on the interaction of a simulated annealing process on N with a certain non time-homogeneous diffusion on $M \times M$. The demonstration of the convergence is based on precise results for the instantaneous invariant measure associated with the process considered. Finally, we will prove that the method used can be adapted to deal with situations where X^θ is degenerate in some sense.

KEY WORDS Controlled Diffusions, Simulated Annealing, Instantaneous Invariant Probability

0 MOTIVATION

A l'origine de cet article se trouve une question sur les diffusions contrôlées posée par Etienne Pardoux, que je tiens tout particulièrement à remercier de m'avoir présenté ce sujet et de m'en avoir expliqué les motivations:

On considère sur $M = \mathbb{R}^n$ une diffusion $\tilde{X}$ dont l'évolution est décrite par

$$d\tilde{X}_t = dB_t + \tilde{b}(\tilde{X}_t, u(\tilde{X}_t))\,dt$$

où B est un mouvement brownien sur $\mathbb{R}^n$ indépendant de $\tilde{X}_0$, $\tilde{b}$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs régulier et u: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ est une loi de commande en boucle fermée.

Soient $\tilde{f}$ une fonction régulière sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ et $T > 0$, on s'intéresse à la quantité

$$I_T = \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{f}(\tilde{X}_t, u(\tilde{X}_t))\,dt$$

et plus précisément, à sa limite quand T tend vers l'infini.

D'un point de vue pratique, $\tilde{X}$ peut représenter les vibrations d'un système mécanique et I_T la gêne occasionnée par celles-ci en moyenne sur l'intervalle de temps $[0, T]$, et on cherche tout naturellement à trouver un contrôle u qui la minimise.

Cependant, pour un contrôle u fixé et sous de bonnes hypothèses sur b, la diffusion $\tilde{X}$ admet une unique probabilité invariante, disons $\tilde{\mu}_u$, et d'après le théorème ergodique, on a p.s.

$$\lim_{T\to+\infty} I_T = \int \tilde{f}(x, u(x))\tilde{\mu}_u(dx)$$

Pour des raisons de commodité des calculs, on peut être amené à se restreindre à ne considérer que certaines lois de commande u_θ paramétrées par $\theta \in N$, où N est, par exemple, un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

Le problème est alors de trouver une procédure n'utilisant que simplement $\tilde{b}$, $\tilde{f}$ et les u_θ (et ne faisant donc pas intervenir les probabilités invariantes $\tilde{\mu}_{u_\theta}$, pour lesquelles il n'existe pas en général de formule explicite) qui permet de trouver les minima globaux de la fonction

$$N \ni \theta \mapsto \int \tilde{f}(x, u_\theta(x))\tilde{\mu}_{u_\theta}(dx)$$

Remarquons que nous avons considéré ci-dessus une diffusion $\tilde{X}$ dont le générateur est elliptique, mais les équations de la mécanique sont en général dégénérées, et on se demande également s'il n'est pas possible de répondre à la question précédente dans cette situation.

Le but de cet article est de donner un algorithme de recuit simulé "partiel" (ou "doublement partiel" pour la situation dégénérée) qui effectuera cette opération d'optimisation, du moins dans le cas compact où M est une variété riemannienne compacte et connexe et où N est le cercle, l'idée étant de coupler un processus qui estimera $\tilde{\mu}_{u_0}$ (et $(\partial/\partial\theta)\tilde{\mu}_{u_\theta}$) avec un algorithme de recuit simulé sur N.

Se limiter au cas où N est le cercle est évidemment trop restrictif et pas très intéressant d'un point de vue pratique, mais il est probable que cette restriction est d'ordre technique et que la convergence de l'algorithme présenté reste satisfaite sous les mêmes conditions si on prend pour N un tore de dimension quelconque (dans [7], on a prouvé par une méthode un peu différente ce résultat, mais à condition d'accélérer fortement (en t^3 au lieu de $\ln^{2+\varepsilon}(t)$ ici) la diffusion adjointe à l'algorithme de recuit, ce qui n'est pas non plus très satisfaisant pratiquement). D'ailleurs, certains des calculs sont valables dans cette généralité (la section 2 par example), mais pour conclure, nous avons eu besoin de renseignements précis sur la probabilité invariante associée à une diffusion quelconque sur N, ce qui nous a restreint au cas du cercle.

1 DESCRIPTION DE L'ALGORITHME ET RÉSULTAT

Soient M une variété riemannienne compacte et connexe, et $N = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}$ le cercle unitaire (qu'on identifiera souvent avec $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$), muni de sa structure riemannienne usuelle. Comme d'habitude, on notera $\langle\ ,\ \rangle$, $|\ |$, ∇, div, Δ et λ, le produit

scalaire, la norme, le gradient, la divergence, le laplacien et la probabilité associés à la structure riemannienne de M.

On se donne une famille de champs de vecteurs sur M, $b(\cdot, \theta)$, paramétrée par $\theta \in N$, et on suppose que l'application

$$M \times N \to TM$$

$$(x, \theta) \mapsto b(x, \theta)$$

est de classe C^∞.

Pour $\theta \in N$ fixé, on considère une diffusion $\tilde{X}$ sur M, décrite heuristiquement par

$$d\tilde{X}_t = dB_t + b(\tilde{X}_t, \theta)\, dt$$

où B est un mouvement brownien sur M, supposé indépendant de $\tilde{X}_0$. (Rigoureusement, on entendra par là que la loi de $\tilde{X}$ est une solution au problème de martingales associé à l'opérateur

$$L_\theta \cdot = \frac{1}{2}\Delta \cdot + \langle b(x, \theta), \nabla \cdot \rangle$$

défini sur $C^2(M)$. Rappelons que cette probabilité est uniquement déterminée, si on se donne la loi de $\tilde{X}_0$.)

Il est bien connu que cette diffusion admet une unique probabilité invariante μ_θ. De plus, cette probabilité admet, par rapport à λ, une densité (encore notée μ_θ, et plus généralement, on conviendra, dans toute la suite, de désigner de la même manière une probabilité absolument continue par rapport à une probabilité riemannienne donnée, et sa densité) de classe C^∞, et on verra, que considérée comme une fonction de $\theta \in N$, $\mu_\theta(x)$ est au moins deux fois dérivable, ses dérivées première et seconde en θ étant continues comme fonctions de $(x, \theta) \in M \times N$.

Soit $f \in C^\infty(M \times N)$, on pose, pour $\theta \in N$,

$$F(\theta) = \int_M f(x, \theta)\mu_\theta(dx)$$

et on cherche à trouver les minima globaux de cette fonction, mais sans la calculer, i.e. sans effectuer les intégrations par rapport aux μ_θ, car il n'existe pas, en général, de formule explicite pour ces dernières; on ne se permet d'utiliser les données du problème b et f, que de manière relativement simple.

Pour effectuer cette opération, on utilise un algorithme de recuit simulé sur N couplé avec une diffusion sur $M \times M$ qui estimera μ_θ (et $(\partial/\partial\theta)\mu_\theta$). Présentons plus précisément ce processus stochastique.

Pour $h > 0$, x, $y \in M$ et $\theta \in N$, posons

$$l_h(x, y, \theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} f(x, \theta) + \frac{1}{h}(f(y, \theta) - f(x, \theta))$$

L'intérêt de cette fonction provient du calcul suivant;

$$\int l_h(x, y, \theta)\mu_\theta(dx)\mu_{\theta+h}(dy) = \int \frac{\partial}{\partial\theta} f(x, \theta)\mu_\theta(dx) + \int f(x, \theta)\frac{1}{h}(\mu_{\theta+h}(x) - \mu_\theta(x))\lambda(dx)$$

et le membre de droite tend, quand h tend vers 0, vers

$$\frac{\partial}{\partial\theta} F(\theta) = \int \frac{\partial}{\partial\theta} f(x, \theta)\mu_\theta(dx) + \int f(x, \theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\mu_\theta(x)\lambda(dx)$$

qui est l'opposé de la dérive pour un algorithme de recuit usuel, associé à F, sur N.

Pour approximer μ_θ et $\mu_{\theta+h}$, on va utiliser des diffusions les admettant pour probabilités invariantes, c'est-à-dire, les diffusions sur M dont les dérives sont, respectivement, $b(\cdot, \theta)$ et $b(\cdot, \theta + h)$.

On est donc amené à s'intéresser aux diffusions (X, Y, Θ) sur $M \times M \times N$ définies heuristiquement par

$$\begin{cases} dX_t = dB_t^{(1)} + b(X_t, \Theta_t)\,dt \\ dY_t = dB_t^{(2)} + b(Y_t, \Theta_t + h_t)\,dt \\ d\Theta_t = \gamma_t^{1/2}\,dW_t - \gamma_t\beta_t l_{h_t}(X_t, Y_t, \Theta_t)\,dt \end{cases} \tag{1}$$

où $(B^{(1)}, B^{(2)}, W)$ est un mouvement brownien sur $M \times M \times N$, et où

$$\beta, \gamma, h \in C^1([0, +\infty[, \mathbb{R}_+^*)$$

sont des évolutions à déterminer pour que Θ_t tende, en temps grand, vers les minima globaux de F.

On va choisir β, γ et h de manière que

$$\lim_{t\to+\infty} \beta_t^{-1} = 0$$

$$\lim_{t\to+\infty} \gamma_t = 0$$

$$\lim_{t\to+\infty} h_t = 0$$

tout le problème étant de trouver les bons taux de convergence.

Décrivons intuitivement le comportement que l'on espère pour cette diffusion. Par la présence de γ (qui exprime le fait que l'on a accéléré l'évolution de X et de Y par rapport à celle de Θ), Θ va évoluer suffisamment lentement par rapport à X et Y, pour qu'en temps t grand, X_t et Y_t finissent par être presque indépendants, sachant que $\Theta_t = \theta$, et de lois proches, respectivement, de μ_θ et de $\mu_{\theta+h_t}$. Ainsi, si on ne s'intéresse qu'à Θ, son évolution sera donnée, approximativement, par

$$d\Theta_t \simeq \gamma_t^{1/2}\,dW_t - \gamma_t\beta_t\left(\int l_{h_t}(x, y, \Theta_t)\mu_{\Theta_t}(dx)\mu_{\Theta_t+h_t}(dy)\right)dt$$

Or, $\lim_{t\to+\infty} h_t = 0$ et d'après un calcul précédent, on aura donc, en temps grand,

$$d\Theta_t \simeq \gamma_t^{1/2}\,dW_t - \gamma_t\beta_t\frac{\partial}{\partial\theta} F(\Theta_t)\,dt$$

Remarquons que cet algorithme est un processus de recuit usuel (cas où $\gamma_t \equiv 1$) désaccéléré; on a multiplié par un facteur γ_t le générateur à l'instant t. Ainsi, si l'intégrale de γ_t permet de définir un changement de temps bijectif, on est ramené à la théorie du recuit simulé classique qui affirme que si pour t assez grand, on prend $\beta_t = k^{-1}\ln(t)$, avec k assez grand, alors Θ_t tend à se concentrer au voisinage des minima globaux de F.

Notre but est de prouver rigoureusement cette convergence, mais on ne cherchera pas à justifier directement les explications précédentes. On utilisera plutôt des techniques faisant intervenir l'entropie pour montrer que la loi du processus s'approche, en temps grand (sous de bonnes évolutions de β, γ et h), de la probabilité invariante instantanée associée (i.e. la probabilité invariante pour le générateur du processus à cet instant), et en étudiant soigneusement le comportement de cette dernière, on obtiendra le résultat annoncé.

Introdusions quelques notations.

Si on part d'une probabilité initiale m sur $M \times M \times N$, on note m_t son image à l'instant $t \geq 0$, par la diffusion décrite par (1) (c'est-à-dire la loi de (X_t, Y_t, Θ_t)), et n_t la projection de m_t sur N (i.e. la loi de Θ_t).

Posons également $F_0 = \min_{\theta\in N} F(\theta)$.

Le principal résultat de cet article s'énonce alors:

Théorème 1 *Prenons pour t assez grand des évolutions de la forme*

$$\beta_t = k^{-1}\ln(t)$$

$$\gamma_t = \beta_t^{-p}$$

$$h_t = \beta_t^{-q}$$

Il existe une constante $c \geq 0$, telle que si $k > c$, $q > 0$ et $p > 2 + 4q$, alors, pour *toute constante* $\delta > 0$,

$$\lim_{t \to +\infty} n_t(\{F - F_0 \geq \delta\}) = 0$$

Ce théorème justifie donc l'algorithme (1), la localisation des minima globaux de F se faisant en observant où tend à se diriger Θ_t. Précisons que les évolutions précédentes ne sont certainement pas optimales, et qu'on pourrait donner des conditions plus générales de convergence.

Remarque Si l'on veut éviter le calcul de la dérivée de f par rapport à θ, on peut prendre

$$\tilde{l}_h(x, y, \theta) = \frac{1}{h}\,[f(y, \theta + h) - f(x, \theta)]$$

En effet, cette fonction satisfait la même propriété que $l_n(x, y, \theta)$ quand h tend vers 0, et il est facile de vérifier que la démonstration qui suit reste alors valable, avec $\tilde{l}_h$ à la place de l_h.

La majeure partie de cet article est consacrée à l'étude des probabilités invariantes. Dans la section suivante, on obtiendra des estimées sur celles-ci en utilisant les équations elliptiques qu'elles satisfont. Puis, on s'intéressera, dans la section 3, à la dérivabilité de ces probabilités par rapport à un paramètre. La section 4 verra ces résultats appliqués aux probabilités invariantes instantanées associées à l'algorithme (1), pour obtenir notamment, sous certaines conditions sur les évolutions, un principe de grandes déviations pour leur projection sur N. La section 5 rappelle les inégalités de Sobolev logarithmiques prouvées par Holley, Kusoka et Stroock, et leur conséquence qu'en à l'ergodicité des processus homogènes dans le temps. La section 6 est vouée à la démonstration du théorème 1, qui s'inspire, en fait, de la procédure déjà employée dans [6]. Enfin, dans la dernière section, on adapte la méthode précédente pour traiter des situations dégénérées.

2 ESTIMÉES SUR LA PROBABILITÉ INVARIANTE OBTENUES PAR LOCALISATION

Les calculs effectués dans cette section sont de natures analytiques, et ne nécessitent pas que N soit le cercle. En fait, on va se placer dans le cadre général suivant: soient V et N deux variétés riemanniennes compactes et connexes, de dimension respective m et n, et soit $b = (b_1, b_2)$ un champ de vecteurs de classe C^∞ sur $V \times N$, b_1 (respectivement b_2) désignant la composante de b dans TV (respectivement dans TN). On conviendra (dans cette section seulement) de noter avec un indice 1 (respectivement un indice 2) les notions relatives à la structure riemannienne de V (respectivement de N).

On considère une diffusion (X, Θ) sur $V \times N$ définie heuristiquement par

$$\begin{cases} dX_t = dB_t + b_1(X_t, \Theta_t)\,dt \\ d\Theta_t = \gamma^{1/2}\,dW_t + \gamma\beta b_2(X_t, \Theta_t)\,dt \end{cases} \tag{2}$$

où (B, W) est un mouvement brownien sur $V \times N$, et où $0 < \gamma \leq 1$ et $\beta \geq 0$ sont deux réels donnés.

Il est bien connu qu'il existe une unique probabilité $\mu_{\gamma,\beta}$ invariante pour cette diffusion, et qu'elle admet, par rapport à la probabilité riemannienne $\lambda_1 \otimes \lambda_2$, une densité strictement positive et de classe C^∞, qui satisfait l'équation

$$L^*_{\gamma,\beta}(\mu_{\gamma,\beta}) = 0 \tag{3}$$

où

$$\begin{aligned} L^*_{\gamma,\beta}\,\cdot = {} & \frac{1}{2}\,\Delta_1\cdot - \langle b_1, \nabla_1\cdot\rangle_1 - \operatorname{div}_1(b_1)\cdot \\ & + \gamma\left[\frac{1}{2}\,\Delta_2\cdot - \beta\langle b_2, \nabla_2\cdot\rangle_2 - \beta\,\operatorname{div}_2(b_2)\cdot\right] \end{aligned}$$

est la restriction à $C^2(V \times N)$, de l'opérateur adjoint, dans $L^2(\lambda_1 \otimes \lambda_2)$, au générateur associé à la diffusion décrite par (2).

Pour étudier l'équation (3), on effectue le changement de variable logarithmique

$$\mu_{\gamma,\beta} = \exp(u_{\gamma,\beta})$$

Ainsi, $u_{\gamma,\beta}$ appartient à $C^\infty(V \times N)$ et satisfait l'équation

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\,\Delta_1 u_{\gamma,\beta} + \frac{1}{2}\,|\nabla_1 u_{\gamma,\beta}|_1^2 - \langle b_1, \nabla_1 u_{\gamma,\beta}\rangle_1 - \operatorname{div}_1(b_1) \\ & \quad + \gamma\left[\frac{1}{2}\,\Delta_2 u_{\gamma,\beta} + \frac{1}{2}\,|\nabla_2 u_{\gamma,\beta}|_2^2 - \beta\langle b_2, \nabla_2 u_{\gamma,\beta}\rangle_2 - \beta\,\operatorname{div}_2(b_2)\right] = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Notre but, dans cette section, est d'obtenir, à partir de cette équation, des estimées sur $u_{\gamma,\beta}$, et plus précisément, de montrer le résultat suivant:

PROPOSITION 2 *Il existe une constante $K \geq 0$, ne dépendant que des structures riemanniennes de V et N ainsi que d'une norme C^3 du champ b, telle que pour tout*

$0 < \gamma \leq 1$ *et tout* $\beta \geq 0$, *on ait*

$$\||\nabla_1 u_{\gamma,\beta}|_1\|_\infty \leq K[1 + \gamma^{1/2}\beta]$$

$$\||\nabla_2 u_{\gamma,\beta}|_2\|_\infty \leq K[\gamma^{-1/2} + \beta]$$

$$\|\Delta_1 u_{\gamma,\beta}\|_\infty \leq K[1 + \gamma\beta^2]$$

$$\|\Delta_2 u_{\gamma,\beta}\|_\infty \leq K[\gamma^{-1} + \beta^2]$$

Remarque Cette proposition se généralise immédiatement au cas d'un nombre fini de champs de vecteurs, $b^i = (b^i_1, b^i_2)$, pour $1 \leq i \leq p$. On s'intéresse alors à la diffusion décrite heuristiquement par

$$\begin{cases} dX_t = dB_t + \sum_{i=1}^{i=p} b^i_1(X_t, \Theta_t)\, dt \\ d\Theta_t = \gamma^{1/2}\, dW_t + \gamma \sum_{i=1}^{i=p} \beta_i b^i_2(X_t, \Theta_t)\, dt \end{cases} \tag{5}$$

sous les mêmes hypothèses que ci-dessus, et $\beta_1 \geq 0, \ldots, \beta_p \geq 0$.

Il existe alors constante K, dépendant de V et N et d'une norme C^3 des champs b^i, pour $1 \leq i \leq p$, telle que la proposition soit vérifiée avec $\beta = \max\{\beta_1, \ldots, \beta_p\}$. C'est pour ne pas surcharger les notations que l'on s'est restreint au cas d'un seul champ de vecteurs, bien que dans l'application à l'algorithme décrit dans l'introduction, on utilise les estimées précédentes avec $p = 2$ (et $V = M \times M$).

Démonstration de la Proposition 2 Elle s'effecue par localisation de l'équation (4): Notons Ω_1 (respectivement Ω_2) le cube

$$\Omega_1 = \{x = (x_i)_{1 \leq i \leq m} \in \mathbb{R}^m / \forall 1 \leq i \leq m, |x_i| < 1\}$$

(respectivement

$$\Omega_2 = \{x = (x_i)_{m+1 \leq i \leq m+n} \in \mathbb{R}^n / \forall m+1 \leq i \leq m+n, |x_i| < 1\}),$$

et posons $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.

On recouvre V par un nombre fini de cartes (O_k, ϕ_k) dont l'image est Ω_1, et N par un nombre fini de cartes (U_l, φ_l) dont l'image est Ω_2, ce qui permet de recouvrir $V \times N$ par les cartes $(O_k \times U_l, \phi_k \times \varphi_l)$, dont l'image est Ω. Placons-nous dans une telle carte, et notons $a = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m+n}$ l'inverse de la matrice définissant la métrique riemannienne de $V \times N$ (remarquons que a est symétrique et que si $i \leq m < j$, alors $a_{i,j} \equiv 0$) et $(b^i)_{1 \leq i \leq m+n}$ les coordonnées locales du champ de vecteurs b. Notons également c_1 (respectivement c_2) l'expression, dans cette carte, de $-\mathrm{div}_1(b_1)$ (respectivement de $-\mathrm{div}_2(b_2)$), et pour $1 \leq i \leq m+n$, $\bar{b}_i = D \sum_{1 \leq j \leq m+n} \partial_j(D^{-1} a_{i,j})$, où $D = \sqrt{\det(a)}$ et où on a convenu d'utiliser la notation courte $\partial_i = \partial/\partial x_i$.

Considérons l'application $v = u_{\gamma,\beta} \circ (\phi_k, \varphi_l)^{-1}$ définie sur Ω. D'après (4), elle satisfait, sur ce domaine, l'équation

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j \leq m} a_{i,j} \partial_{i,j} v + \frac{1}{2} \sum_{i,j \leq m} a_{i,j} \partial_i v \partial_j v - \sum_{i \leq m} b_i \partial_i v + \frac{1}{2} \sum_{i \leq m} \bar{b}_i \partial_i v + c_1$$
$$+ \gamma \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j > m} a_{i,j} \partial_{i,j} v + \frac{1}{2} \sum_{i,j > m} a_{i,j} \partial_i v_j v - \beta \sum_{i > m} b_i \partial_i v + \frac{1}{2} \sum_{i > m} \bar{b}_i \partial_i v + \beta c_2 \right] = 0$$

Pour faire disparaître le coefficient γ affectant les termes du second ordre, on effectue le changement de variables défini par l'application g suivante:

$$\Omega \to \tilde{\Omega}$$
$$x = (x_i)_{1 \leq i \leq m+n} \mapsto ((x_i)_{1 \leq i \leq m}, \gamma^{-1/2}(x_i)_{m+1 \leq i \leq m+n})$$

où $\tilde{\Omega} = \Omega_1 \times \gamma^{-1/2}\Omega_2$.

Si f est une fonction définie sur Ω, on notera $\tilde{f} = f \circ g^{-1}$ l'application obtenue sur $\tilde{\Omega}$ par ce changement de variable. Ainsi, si $f \in C^1(\Omega)$, alors $\tilde{f} \in C^1(\tilde{\Omega})$ et pour tout $x \in \tilde{\Omega}$,

$$\partial_i \tilde{f}(x) = \begin{cases} \partial_i f(g^{-1}(x)), & \text{si} \quad 1 \leq i \leq m \\ \gamma^{1/2} \partial_i f(g^{-1}(x)), & \text{si} \quad m+1 \leq i \leq m+n. \end{cases}$$

Ceci permet de voir que $\tilde{v}$ satisfait, sur $\tilde{\Omega}$, l'équation

$$\sum_{1 \leq i,j \leq m+n} \tilde{a}_{i,j} \partial_{i,j} \tilde{v} + \sum_{1 \leq i,j \leq m+n} \tilde{a}_{i,j} \partial_i \tilde{v} \partial_j \tilde{v} + \sum_{1 \leq i,j \leq m+n} \hat{b}_i \partial_i \tilde{v} + \hat{c} = 0 \tag{6}$$

où on a posé, pour tout $x \in \tilde{\Omega}$,

$$\hat{b}_i(x) = \begin{cases} -2b_i(g^{-1}(x)) + \bar{b}_i(g^{-1}(x)), & \text{si} \quad 1 \leq i \leq m \\ -2\gamma^{1/2}\beta b_i(g^{-1}(x)) + \gamma^{1/2}\bar{b}_i(g^{-1}(x)), & \text{si} \quad m+1 \leq i \leq m+n \end{cases}$$

$$\hat{c}(x) = 2c_1(g^{-1}(x)) + 2\gamma\beta c_2(g^{-1}(x))$$

Cependant, cette équation est bien connue, et il est possible d'en déduire des estimées sur $\sum_{1 \leq i,j \leq m+n} \tilde{a}_{i,j} \partial_i \tilde{v} \partial_j \tilde{v}$, si cette expression atteint son maximum sur $\tilde{\Omega}$.

En effet, introduisons sur $C^p(\tilde{\Omega})$, pour $p \in \mathbb{N}$, les quantités $\|\cdot\|_{\tilde{\Omega},p}$ et $\|\cdot\|_{C^p(\tilde{\Omega})}$ (à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$), définies respectivement par

$$\forall f \in C^p(\tilde{\Omega}), \quad \|f\|_{\tilde{\Omega},p} = \sup_{x \in \tilde{\Omega}} \sqrt{\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{m+n} \\ |\alpha| = p}} |\partial_\alpha f|^2(x)}$$

et

$$\|f\|_{C^2(\bar{\Omega})} = \sum_{k=0}^{k=p} \|f\|_{\bar{\Omega},k}$$

(Rappelons que pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_i)_{1\le i\le m+n} \in \mathbb{N}^{m+n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{m+n}$ et $\partial_\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\cdots\partial_{m+n}^{\alpha_{m+n}}$.)

Posons également

$$\tilde{S}_\gamma = \max_{1\le i,j\le m+n} \|\tilde{a}_{i,j}\|_{C^2(\bar{\Omega})} < +\infty$$

et $\theta > 0$ la plus grande constante telle que

$$\forall x \in \tilde{\Omega}, \quad \forall y = (y_i)_{1\le i\le m+n} \in \mathbb{R}^{m+n}, \qquad \sum_{1\le i,j\le m+n} \tilde{a}_{i,j}(x) y_i y_j \ge \theta \sum_{1\le i\le m+n} y_i^2 \tag{7}$$

(notons que cette constante est indépendante de γ).

Un calcul classique (dit méthode de Bernstein, *voir* la démonstration du lemme 5 présentée dans [6], et les références qui y sont données) montre alors qu'il existe une constante $\tilde{k}(\tilde{S}_\gamma, \theta^{-1}) > 0$, ne dépendant que de $\tilde{S}_\gamma$ et de θ^{-1} (et des dimensions m et n), croissante en ses arguments, et telle que si la fonction

$$\tilde{z} = \sum_{1\le i,j\le m+n} \tilde{a}_{i,j}\partial_i\tilde{v}\partial_j\tilde{v}$$

admet un maximum local en $\tilde{x}_0 \in \tilde{\Omega}$, alors

$$\tilde{z}(\tilde{x}_0) \le \tilde{k}(\tilde{S}_\gamma, \theta^{-1})\left[1 + \max_{1\le i\le m+n} \|\hat{b}_i\|^2_{C^1(\bar{\Omega})} + \|\hat{c}\|^2_{C^1(\bar{\Omega})}\right]$$

Or, pour tout $0 < \gamma \le 1$, tout $\beta \ge 0$ et tout $1 \le i, j \le m+n$,

$$\begin{aligned}
\|\tilde{a}_{i,j}\|_{C^2(\bar{\Omega})} &= \|\tilde{a}_{i,j}\|_{\bar{\Omega},0} + \|\tilde{a}_{i,j}\|_{\bar{\Omega},1} + \|\tilde{a}_{i,j}\|_{\bar{\Omega},2} \\
&\le \|a_{i,j}\|_{\Omega,0} + \|a_{i,j}\|_{\Omega,1} + \|a_{i,j}\|_{\Omega,2} \\
&= \|a_{i,j}\|_{C^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

et de même,

$$\|\hat{b}_i\|_{C^1(\bar{\Omega})} \le 2\max\{1; \gamma^{1/2}\beta\}\|b_i\|_{C^1(\Omega)} + \|\bar{b}_i\|_{C^1(\Omega)}$$

$$\|\hat{c}\|_{C^1(\bar{\Omega})} \le 2\|c_1\|_{C^1(\Omega)} + 2\gamma\beta\|c_2\|_{C^1(\Omega)}$$

Revenons sur Ω, posons $S = \max_{1\le i,j\le m+n}\|a_{i,j}\|_{C^2(\Omega)} < +\infty$, et intéressons-nous à l'application z définie sur Ω par

$$z = \tilde{z}\circ g = \sum_{i,j\le m} a_{i,j}\partial_i v\partial_j v + \gamma \sum_{i,j>m} a_{i,j}\partial_i v\partial_j v$$

D'après les résultats précédents, il est clair qu'il existe une constante $k(S,\theta) > 0$, ne dépendant que de S et θ, telle que si z atteint un maximum local en $x_0 \in \Omega$, alors

$$z(x_0) \le k(S,\theta)\left[1 + \max\{1;\gamma\beta^2\} \max_{1\le i\le m+n} \|b_i\|^2_{C^1(\Omega)} + \|c_1\|^2_{C^1(\Omega)} + \gamma^2\beta^2\|c_2\|^2_{C^1(\Omega)}\right]$$

(on aura noté que $\|\bar{b}_i\|_{C^1(\Omega)}$ peut se borner l'aide d'une constante ne dépendant que de S et θ).

Remarquons que z est l'expression, dans la carte $(O_k \times U_l, \phi_k \times \varphi_l)$, de la quantité

$$|\nabla_1 u_{\gamma,\beta}|_1^2 + \gamma|\nabla_2 u_{\gamma,\beta}|_2^2$$

Ainsi, si on note k_1 (respectivement B et C) le maximum des constantes $k(S,\theta)$ (respectivement des termes $\max_{1\le i\le m+n}\|b_i\|^2_{C^1(\Omega)}$ et $\|c_1\|^2_{C^1(\Omega)} + \|c_2\|^2_{C^1(\Omega)}$) qui apparaissent pour les diverses cartes $(O_k \times U_l, \phi_k \times \varphi_l)$, on a montré, en considérant une carte où $|\nabla_1 u_{\gamma,\beta}|_1^2 + \gamma|\nabla_2 u_{\gamma,\beta}|_2^2$ atteint son maximum global sur $V \times N$, que

$$\begin{aligned}
\||\nabla_1 u_{\gamma,\beta}|_1^2 + \gamma|\nabla_2 u_{\gamma,\beta}|_2^2\|_\infty &\le k_1(1 + \max\{1;\gamma\beta^2\}B + \max\{1;\gamma^2\beta^2\}C) \\
&\le k_1(1 + (B+C)\max\{1;\gamma\beta^2\}) \\
&\le k_1(1+B+C)(1+\gamma\beta^2)
\end{aligned}$$

ce qui prouve les deux premières estimées de la proposition.

Reste donc à démontrer les deux dernières majorations de la proposition, et pour ce faire, on va revenir à l'équation (6).

Pour simplifier les notations, on conviendra, dans toute la suite, de désigner par $K(A_1; A_2; \ldots; A_p)$ diverses constantes qui ne dependent que des réels $A_1, A_2, \ldots, A_p$ (et éventuellement des dimensions m et n), et qui sont croissantes en ces arguments.

Pour $0 < \gamma \le 1$ et $\beta \ge 0$ donnés, on considère une solution $\tilde{v}$ de (6) sur $\tilde{\Omega}$, pour laquelle on suppose que l'on connait, a priori, une majoration de la norme du gradient du type:

$$\|\tilde{v}\|_{\bar{\Omega},1} \le k_2[1 + \gamma^{1/2}\beta] \tag{8}$$

pour une certaine constante $k_2 \ge 0$, indépendante de $0 < \gamma \le 1$ et $\beta \ge 0$ (ce qui est bien satisfait, avec $k_2 = \sqrt{\theta^{-1}k_1(1+B+C)}$, si on prend pour $\tilde{v}$ l'application obtenue à partir de $u_{\gamma,\beta}$ par localisation dans une carte $(O_k \times U_l, \phi_k \times \varphi_l)$ et composition par g^{-1}).

Soient h_i, pour $1 \leq i \leq m$, des fonctions de classe C^∞ sur $\tilde{\Omega}$, dont les dérivées jusqu'à l'ordre 2 sont uniformément bornées sur $\tilde{\Omega}$.

On s'intéresse à l'application

$$\tilde{Z}_1 = \sum_{i,j \leq m} \tilde{a}_{i,j}\partial_{i,j}\tilde{v} + \sum_{i \leq m} h_i \partial_i \tilde{v}$$

définie sur $\tilde{\Omega}$, et on suppose qu'elle admet en $\tilde{x}_1 \in \tilde{\Omega}$ un minimum local.

On a alors,

$$\sum_{1 \leq p,q \leq m+n} \tilde{a}_{p,q}(\tilde{x}_1)\partial_{p,q}\tilde{Z}_1(\tilde{x}_1) \geq 0$$

Cependant, remarquons que pour i, $j \leq m$ (respectivement i, $j > m$), $a_{i,j}(x)$ ne dépend que des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_m$ (respectivement $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{m+n}$) de x. Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\sum_{1 \leq p,q \leq m+n} \tilde{a}_{p,q}\partial_{p,q}\Bigg(\sum_{1 \leq i,j \leq m} \tilde{a}_{i,j}\partial_{i,j}\tilde{v}\Bigg) \\
&\quad = \sum_{1 \leq p,q \leq m} \tilde{a}_{p,q}\partial_{p,q}\Bigg(\sum_{1 \leq i,j \leq m} \tilde{a}_{i,j}\partial_{i,j}\tilde{v}\Bigg) + \sum_{m+1 \leq p,q \leq m+n} \tilde{a}_{p,q}\partial_{p,q}\Bigg(\sum_{1 \leq i,j \leq m} \tilde{a}_{i,j}\partial_{i,j}\tilde{v}\Bigg) \\
&\quad = \sum_{1 \leq p,q \leq m} \tilde{a}_{p,q}\partial_{p,q}\Bigg(\sum_{1 \leq i,j \leq m} \tilde{a}_{i,j}\partial_{i,j}\tilde{v}\Bigg) + \sum_{m+1 \leq p,q \leq m+n} \tilde{a}_{p,q}\Bigg(\sum_{1 \leq i,j \leq m} \tilde{a}_{i,j}\partial_{p,q,i,j}\tilde{v}\Bigg) \\
&\quad = \sum_{1 \leq p,q \leq m} \tilde{a}_{p,q}\partial_{p,q}\Bigg(\sum_{1 \leq i,j \leq m} \tilde{a}_{i,j}\partial_{i,j}\tilde{v}\Bigg) + \sum_{1 \leq i,j \leq m} \tilde{a}_{i,j}\partial_{i,j}\Bigg(\sum_{m+1 \leq p,q \leq m+n} \tilde{a}_{p,q}\partial_{p,q}\tilde{v}\Bigg) \\
&\quad = \sum_{1 \leq i,j \leq m} \tilde{a}_{i,j}\partial_{i,j}\Bigg(\sum_{1 \leq p,q \leq m+n} \tilde{a}_{p,q}\partial_{p,q}\tilde{v}\Bigg) \\
&\quad = -\sum_{1 \leq i,j \leq m} \tilde{a}_{i,j}\partial_{i,j}\Bigg(\sum_{1 \leq p,q \leq m+n} \tilde{a}_{p,q}\partial_p\tilde{v}\partial_q\tilde{v} + \sum_{1 \leq p \leq m+n} \hat{b}_p\partial_p\tilde{v} + \hat{c}\Bigg) \\
&\quad = -\sum_{1 \leq i,j \leq m} \tilde{a}_{i,j}\Bigg[\Bigg(\sum_{1 \leq p,q \leq m+n} 2\tilde{a}_{p,q}\partial_{p,i}\tilde{v}\partial_{q,j}\tilde{v} + R_{p,q,i,j}\Bigg) + \sum_{1 \leq p \leq m+n} R_{p,i,j} + \partial_{i,j}\hat{c}\Bigg]
\end{aligned}$$

où par symétrie,

$$R_{p,q,i,j} = \partial_{i,j}\tilde{a}_{p,q}\partial_p\tilde{v}\partial_q\tilde{v} + 4\partial_i\tilde{a}_{p,q}\partial_{p,j}\tilde{v}\partial_q\tilde{v} + 2\tilde{a}_{p,q}\partial_{p,i,j}\tilde{v}\partial_q\tilde{v}$$

$$R_{p,i,j} = \partial_{i,j}\hat{b}_p\partial_p\tilde{v} + 2\partial_i\hat{b}_p\partial_{p,j}\tilde{v} + \hat{b}_p\partial_{p,i,j}\tilde{v}$$

On a donc prouvé qu'en $\tilde{x}_1$,

$$\begin{aligned}
&2\sum_{1 \leq i,j \leq m} \tilde{a}_{i,j}\Bigg(\sum_{1 \leq p,q \leq m+n} \tilde{a}_{p,q}\partial_{p,i}\tilde{v}\partial_{q,j}\tilde{v}\Bigg) \\
&\quad \leq -\sum_{1 \leq i,j \leq m} \tilde{a}_{i,j}\Bigg(\sum_{1 \leq p,q \leq m+n} R_{p,q,i,j} + \sum_{1 \leq p \leq m+n} R_{p,i,j} + \partial_{i,j}\hat{c}\Bigg) \\
&\qquad + \sum_{1 \leq p,q \leq m+n} \tilde{a}_{p,q}\partial_{p,q}\Bigg(\sum_{i \leq m} h_i\partial_i\tilde{v}\Bigg)
\end{aligned} \tag{9}$$

Or, le fait intéressant à noter, est que

$$\sum_{1 \leq i,j \leq m} \tilde{a}_{i,j}\Bigg(\sum_{1 \leq p,q \leq m+n} \tilde{a}_{p,q}\partial_{p,i}\tilde{v}\partial_{q,j}\tilde{v}\Bigg) \geq \theta^2 J$$

où θ est la constante définie précédement par (7), et où on a posé, par définition,

$$J = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq p \leq m+n}} (\partial_{p,i}\tilde{v})^2$$

En effet, soit $\alpha = (\alpha_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m+n}$ une matrice définie positive telle que

$$\alpha^t\alpha = \tilde{a}$$

et posons, pour $1 \leq l \leq m+n$ et $1 \leq i \leq m$,

$$V_{l,i} = \sum_{1 \leq k \leq m+n} \alpha_{l,k}\partial_{k,i}\tilde{v}$$

On a alors,

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i,j \leq m} \tilde{a}_{i,j} \sum_{1 \leq p,q \leq m+n} \tilde{a}_{p,q}\partial_{p,i}\tilde{v}\partial_{q,j}\tilde{v} &= \sum_{1 \leq i,j \leq m} \tilde{a}_{i,j} \sum_{1 \leq p,q \leq m+n} \sum_{1 \leq l \leq m+n} \alpha_{l,p}\alpha_{l,q}\partial_{p,i}\tilde{v}\partial_{q,j}\tilde{v} \\
&= \sum_{1 \leq l \leq m+n} \sum_{1 \leq i,j \leq m} \tilde{a}_{i,j}V_{l,i}V_{l,j} \\
&\geq \theta \sum_{1 \leq l \leq m+n} \sum_{1 \leq i \leq m} V_{l,i}^2 \\
&= \theta \sum_{1 \leq l \leq m+n} \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq p,q \leq m+n} \alpha_{l,p}\alpha_{l,q}\partial_{p,i}\tilde{v}\partial_{q,i}\tilde{v} \\
&= \theta \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq p,q \leq m+n} \tilde{a}_{p,q}\partial_{p,i}\tilde{v}\partial_{q,i}\tilde{v} \\
&\geq \theta^2 \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq p \leq m+n} (\partial_{p,i}\tilde{v})^2
\end{aligned}$$

ce qui prouve le fait annoncé.

Intéressons-nous maintenant au membre de droite de (9) et commençons par évaluer le terme

$$\sum_{1\le i,j\le m} \tilde{a}_{i,j} \sum_{1\le p,q\le m+n} R_{p,q,i,j}$$

On a:

$$\left| \sum_{1\le i,j\le m} \tilde{a}_{i,j} \sum_{1\le p,q\le m+n} \partial_{i,j}\tilde{a}_{p,q}\partial_p\tilde{v}\partial_q\tilde{v} \right| \le K\Big(\max_{1\le p,q\le m+n} \|\tilde{a}_{p,q}\|_{C^2(\bar{\Omega})}\Big)\|\tilde{v}\|^2_{\bar{\Omega},1}$$

et

$$\left| \sum_{1\le i,j\le m} \tilde{a}_{i,j} \sum_{1\le p,q\le m+n} \partial_i\tilde{a}_{p,q}\partial_{p,j}\tilde{v}\partial_q\tilde{v} \right| \le K\Big(\max_{1\le p,q\le m+n} \|\tilde{a}_{p,q}\|_{C^1(\bar{\Omega})}\Big)\|\tilde{v}\|_{\bar{\Omega},1}\sqrt{J}$$

quant au terme

$$\sum_{1\le i,j\le m} \tilde{a}_{i,j} \sum_{1\le p,q\le m+n} \tilde{a}_{p,q}\partial_{p,i,j}\tilde{v}\partial_q\tilde{v}$$

notons qu'il vaut, du fait que $\partial_p\tilde{Z}_1(\tilde{x}_1) = 0$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\le p,q\le m+n} \tilde{a}_{p,q}\partial_q\tilde{v} \sum_{1\le i,j\le m} \tilde{a}_{i,j}\partial_{p,i,j}\tilde{v}\\
&\quad= \sum_{1\le p,q\le m+n} \tilde{a}_{p,q}\partial_q\tilde{v}\Big[\partial_p\Big(\sum_{1\le i,j\le m} \tilde{a}_{i,j}\partial_{i,j}\tilde{v}\Big) - \sum_{1\le i,j\le m} \partial_p\tilde{a}_{i,j}\partial_{i,j}\tilde{v}\Big]\\
&\quad= \sum_{1\le p,q\le m+n} \tilde{a}_{p,q}\partial_q\tilde{v}\Big[\partial_p\Big(-\sum_{1\le i\le m} h_i\partial_i\tilde{v}\Big) - \sum_{1\le i,j\le m} \partial_p\tilde{a}_{i,j}\partial_{i,j}\tilde{v}\Big]
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{1\le i,j\le m} \tilde{a}_{i,j} \sum_{1\le p,q\le m+n} \tilde{a}_{p,q}\partial_{p,i,j}\tilde{v}\partial_q\tilde{v} \right|\\
&\quad\le K\Big(\max_{1\le p,q\le m+n} \|\tilde{a}_{p,q}\|_{C^1(\bar{\Omega})};\ \max_{1\le i\le m} \|h_i\|_{C^1(\bar{\Omega})}\Big)\|\tilde{v}\|_{\bar{\Omega},1}[\|\tilde{v}\|_{\bar{\Omega},1} + \sqrt{J}]
\end{aligned}$$

On a donc obtenu l'estimée

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{1\le i,j\le m} \tilde{a}_{i,j} \sum_{1\le p,q\le m+n} R_{p,q,i,j} \right|\\
&\quad\le K\Big(\max_{1\le p,q\le m+n} \|\tilde{a}_{p,q}\|_{C^2(\bar{\Omega})};\ \max_{1\le i\le m} \|h_i\|_{C^1(\bar{\Omega})}\Big)\|\tilde{v}\|_{\bar{\Omega},1}[\|\tilde{v}\|_{\bar{\Omega},1} + \sqrt{J}]
\end{aligned}$$

De même, on montre que

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{1\le i,j\le m} \tilde{a}_{i,j}\Big(\sum_{1\le p\le m+n} R_{p,i,j} + \partial_{i,j}\hat{c}\Big)\right|\\
&\quad\le K\Big(\max_{1\le p,q\le m+n} \|\tilde{a}_{p,q}\|_{C^1(\bar{\Omega})};\ \max_{1\le i\le m} \|h_i\|_{C^1(\bar{\Omega})}\Big)\\
&\qquad\times\Big[\Big(\max_{1\le i\le m+n} \|\hat{b}_i\|_{\bar{\Omega},0} + \max_{1\le i\le m+n} \|\hat{b}_i\|_{\bar{\Omega},2}\Big)\|\tilde{v}\|_{\bar{\Omega},1}\\
&\qquad+\Big(\max_{1\le i\le m+n} \|\hat{b}_i\|_{\bar{\Omega},0} + \max_{1\le i\le m+n} \|\hat{b}_i\|_{\bar{\Omega},1}\Big)\sqrt{J} + \|\hat{c}\|_{\bar{\Omega},2}\Big]
\end{aligned}$$

Reste à considérer le dernier terme du membre de droite de (9):

$$\sum_{1\le p,q\le m+n} \tilde{a}_{p,q}\partial_{p,q}\Big(\sum_{i\le m} h_i\partial_i\tilde{v}\Big) = \sum_{1\le p,q\le m+n} \tilde{a}_{p,q} \sum_{i\le m} \partial_{p,q}h_i\partial_i\tilde{v} + 2\partial_p h_i\partial_{q,i}\tilde{v} + h_i\partial_{p,q,i}\tilde{v}$$

Cependant,

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{1\le p,q\le m+n} \tilde{a}_{p,q} \sum_{i\le m} h_i\partial_{p,q,i}\tilde{v}\right|\\
&\quad= \left| \sum_{i\le m} h_i\partial_i\Big(\sum_{1\le p,q\le m+n} \tilde{a}_{p,q}\partial_{p,q}\tilde{v}\Big) - \sum_{i\le m} h_i \sum_{1\le p,q\le m+n} \partial_i\tilde{a}_{p,q}\partial_{p,q}\tilde{v}\right|\\
&\quad= \Bigg| \sum_{i\le m} h_i\partial_i\Big(\sum_{1\le p,q\le m+n} \tilde{a}_{p,q}\partial_p\tilde{v}\partial_q\tilde{v} + \sum_{1\le p\le m+n} \hat{b}_p\partial_p\tilde{v} + \hat{c}\Big)\\
&\qquad+ \sum_{i\le m} h_i \sum_{1\le p,q\le m} \partial_i\tilde{a}_{p,q}\partial_{p,q}\tilde{v}\Bigg|
\end{aligned}$$

(car rappelons que pour $1 \le i \le m$, $\partial_i\tilde{a}_{p,q} = 0$, si $p > m$ ou $q > m$)

$$\begin{aligned}
&\le K\Big(\max_{1\le p,q\le m+n} \|\tilde{a}_{p,q}\|_{C^1(\bar{\Omega})};\ \max_{1\le i\le m} \|h_i\|_{C^0(\bar{\Omega})}\Big)\\
&\quad\times\Big[\|\tilde{v}\|^2_{\bar{\Omega},1} + \max_{1\le i\le m+n} \|\hat{b}_i\|_{\bar{\Omega},1}\|\tilde{v}\|_{\bar{\Omega},1}\\
&\quad+\Big(1 + \max_{1\le i\le m+n} \|\hat{b}_i\|_{\bar{\Omega},0} + \|\tilde{v}\|_{\bar{\Omega},1}\Big)\sqrt{J} + \|\hat{c}\|_{\bar{\Omega},1}\Big]
\end{aligned}$$

D'autre part, il est clair que

$$\left|\sum_{1\le p,q\le m+n} \tilde a_{p,q} \sum_{i\le m} \partial_{p,q} h_i \partial_i \tilde v + 2\partial_p h_i \partial_{q,i}\tilde v\right|$$
$$\le K\left(\max_{1\le p,q\le m+n} \|\tilde a_{p,q}\|_{C^0(\tilde\Omega)};\ \max_{1\le i\le m}\|h_i\|_{C^2(\tilde\Omega)}\right)[\|\tilde v\|_{\tilde\Omega,1}+\sqrt{J}]$$

En regroupant les résultats précédents, on a donc montré que

$$\begin{aligned}
J \le\ & \theta^{-2}K\left(\max_{1\le p,q\le m+n}\|\tilde a_{p,q}\|_{C^2(\tilde\Omega)};\ \max_{1\le i\le m}\|h_i\|_{C^2(\tilde\Omega)}\right)\\
&\times\left[\left(1+\|\tilde v\|_{\tilde\Omega,1}+\max_{1\le i\le m+n}\|\hat b_i\|_{C^2(\tilde\Omega)}\right)(\|\tilde v\|_{\tilde\Omega,1}+\sqrt{J})+\|\hat c\|_{C^2(\tilde\Omega)}\right]\\
\le\ & \frac{J}{2}+\frac{1}{2}\,\theta^{-4}\left(K\left(\max_{1\le p,q\le m+n}\|\tilde a_{p,q}\|_{C^2(\tilde\Omega)};\ \max_{1\le i\le m}\|h_i\|_{C^2(\tilde\Omega)}\right)\right.\\
&\left.\times\left(1+\|\tilde v\|_{\tilde\Omega,1}+\max_{1\le i\le m+n}\|\hat b_i\|_{C^2(\tilde\Omega)}\right)\right)^2\\
&+\theta^{-2}K\left(\max_{1\le p,q\le m+n}\|\tilde a_{p,q}\|_{C^2(\tilde\Omega)};\ \max_{1\le i\le m}\|h_i\|_{C^2(\tilde\Omega)}\right)\\
&\times\left[\left(1+\|\tilde v\|_{\tilde\Omega,1}+\max_{1\le i\le m+n}\|\hat b_i\|_{C^2(\tilde\Omega)}\right)\|\tilde v\|_{\tilde\Omega,1}+\|\hat c\|_{C^2(\tilde\Omega)}\right]
\end{aligned}$$

c'est-à-dire:

$$\begin{aligned}
J\le\ & K\left(\max_{1\le p,q\le m+n}\|\tilde a_{p,q}\|_{C^2(\tilde\Omega)};\ \max_{1\le i\le m}\|h_i\|_{C^2(\tilde\Omega)};\ \theta^{-1}\right)\\
&\times\left[1+\max_{1\le i\le m+n}\|\hat b_i\|^2_{C^2(\tilde\Omega)}+\|\hat c\|_{C^2(\tilde\Omega)}+\|\tilde v\|^2_{\tilde\Omega,1}\right]
\end{aligned}$$

On utilise alors l'estimée a priori (8), pour obtenir

$$\begin{aligned}
J\le\ & K\left(\max_{1\le p,q\le m+n}\|\tilde a_{p,q}\|_{C^2(\tilde\Omega)};\ \max_{1\le i\le m}\|h_i\|_{C^2(\tilde\Omega)};\ \theta^{-1};\ k_2\right)\\
&\times\left[1+\max_{1\le i\le m+n}\|\hat b_i\|^2_{C^2(\tilde\Omega)}+\|\hat c\|_{C^2(\tilde\Omega)}+\gamma\beta^2\right]
\end{aligned}$$

Cependant,

$$\begin{aligned}
|\tilde Z_1(\tilde x_1)|\le\ & K\left(\max_{1\le p,q\le m+n}\|\tilde a_{p,q}\|_{C^0(\tilde\Omega)};\ \max_{1\le i\le m}\|h_i\|_{C^0(\tilde\Omega)}\right)[\sqrt{J}+\|\tilde v\|_{\tilde\Omega,1}]\\
\le\ & K\left(\max_{1\le p,q\le m+n}\|\tilde a_{p,q}\|_{C^2(\tilde\Omega)};\ \max_{1\le i\le m}\|h_i\|_{C^2(\tilde\Omega)};\ \theta^{-1};\ k_2\right)\\
&\times\left[1+\max_{1\le i\le m+n}\|\hat b_i\|_{C^2(\tilde\Omega)}+\|\hat c\|_{C^2(\tilde\Omega)}+\gamma^{1/2}\beta\right]
\end{aligned}$$

Le résultat à retenir est donc que si $\tilde Z_1$ atteint un minimum local en $\tilde x_1\in\tilde\Omega$, alors

$$\begin{aligned}
\tilde Z_1(\tilde x_1)\ge\ & -K\left(\max_{1\le p,q\le m+n}\|\tilde a_{p,q}\|_{C^2(\tilde\Omega)};\ \max_{1\le i\le m}\|h_i\|_{C^2(\tilde\Omega)};\ \theta^{-1};\ k_2\right)\\
&\times\left[1+\max_{1\le i\le m+n}\|\hat b_i\|_{C^2(\tilde\Omega)}+\|\hat c\|_{C^2(\tilde\Omega)}+\gamma^{1/2}\beta\right]
\end{aligned}$$

Remarquons que symétriquement, si l'application $\tilde Z_2$ définie sur $\tilde\Omega$ par

$$x\mapsto\sum_{i,j>m}\tilde a_{i,j}(x)\partial_{i,j}\tilde v(x)+\sum_{i>m}h_i(x)\partial_i\tilde v(x)$$

(où les h_i, pour $m+1\le i\le m+n$, sont des fonctions de classe C^∞ sur $\tilde\Omega$, dont les dérivées jusqu'à l'ordre 2 sont uniformément bornées sur $\tilde\Omega$) atteint un minimum local en $\tilde x_2\in\tilde\Omega$, alors

$$\begin{aligned}
\tilde Z_2(\tilde x_2)\ge\ & -K\left(\max_{1\le p,q\le m+n}\|\tilde a_{p,q}\|_{C^2(\tilde\Omega)};\ \max_{m+1\le i\le m+n}\|h_i\|_{C^2(\tilde\Omega)};\ \theta^{-1};\ k_2\right)\\
&\times\left[1+\max_{1\le i\le m+n}\|\hat b_i\|_{C^2(\tilde\Omega)}+\|\hat c\|_{C^2(\tilde\Omega)}+\gamma^{1/2}\beta\right]
\end{aligned}$$

Transcrivons ces résultats sur Ω. On définit sur ce domaine, les applications

$$Z_1=\tilde Z_1\circ g=\sum_{i,j\le m}a_{i,j}\partial_{i,j}v+\sum_{i\le m}(h_i\circ g)\partial_i v$$

et

$$Z_2=\tilde Z_2\circ g=\gamma\sum_{i,j>m}a_{i,j}\partial_{i,j}v+\gamma^{1/2}\sum_{i>m}(h_i\circ g)\partial_i v$$

On prend pour h_i les applications suivantes (définies sur $\tilde{\Omega}$)

$$h_i = \begin{cases} \bar{b}_i \circ g^{-1}, & \text{si} \quad 1 \le i \le m \\ \gamma^{1/2}\bar{b}_i \circ g^{-1}, & \text{si} \quad m+1 \le i \le m+n \end{cases}$$

où rappelons que $\bar{b}_i = D \sum_{1 \le j \le m+n} \partial_j(D^{-1}a_{i,j})$, avec $D = \sqrt{\det(a)}$.
En fait, on a, pour tout $1 \le i \le m+n$,

$$h_i = \tilde{D} \sum_{1 \le j \le m+n} \partial_j(\tilde{D}^{-1}\tilde{a}_{i,j})$$

et il est facile de vérifier sur cette expression, que pour tout $1 \le i \le m+n$, on a

$$\|h_i\|_{C^2(\tilde{\Omega})} \le K\left(\max_{1 \le p,q \le m+n} \|\tilde{a}_{p,q}\|_{C^3(\tilde{\Omega})};\ \theta^{-1}\right)$$

On a aussi, toujours pour $0 < \gamma \le 1$,

$$\|\tilde{a}_{i,j}\|_{C^3(\tilde{\Omega})} \le \|a_{i,j}\|_{C^3(\Omega)}$$

$$\|\hat{b}_i\|_{C^2(\tilde{\Omega})} \le 2\max\{1; \gamma^{1/2}\beta\}\|b_i\|_{C^2(\Omega)} + \|\bar{b}_i\|_{C^2(\Omega)}$$

$$\|\hat{c}\|_{C^2(\tilde{\Omega})} \le 2\|c_1\|_{C^2(\Omega)} + 2\gamma\beta\|c_2\|_{C^2(\Omega)}$$

ce qui prouve les résultats suivants:
Si Z_1 (respectivement Z_2) atteint un minimum local en $x_1 \in \Omega$ (respectivement en $x_2 \in \Omega$), alors

$$Z_1(x_1) \ge -K\left(\max_{1 \le p,q \le m+n} \|\tilde{a}_{p,q}\|_{C^3(\Omega)};\ \theta^{-1};\ k_2\right) \times \left[1 + \max\{1; \gamma^{1/2}\beta\} \max_{1 \le i \le m+n} \|b_i\|_{C^2(\Omega)} + \|c_1\|_{C^2(\Omega)} + \gamma\beta\|c_2\|_{C^2(\Omega)} + \gamma^{1/2}\beta\right]$$

(respectivement

$$Z_2(x_2) \ge -K\left(\max_{1 \le p,q \le m+n} \|\tilde{a}_{p,q}\|_{C^3(\Omega)};\ \theta^{-1};\ k_2\right) \times \left[1 + \max\{1; \gamma^{1/2}\beta\} \max_{1 \le i \le m+n} \|b_i\|_{C^2(\Omega)} + \|c_1\|_{C^2(\Omega)} + \gamma\beta\|c_2\|_{C^2(\Omega)} + \gamma^{1/2}\beta\right]\Bigg),$$

Mais remarquons que Z_1 (respectivement Z_2) est l'expression, dans la carte $(O_k \times U_l, \phi_k \times \varphi_l)$, de $\Delta_1 u_{\gamma,\beta}$ (respectivement de $\gamma\Delta_2 u_{\gamma,\beta}$). Ainsi, si on note K_1

(respectivement $\bar{B}$ et $\bar{C}$) le maximum des constantes

$$K\left(\max_{1 \le p,q \le m+n} \|\tilde{a}_{p,q}\|_{C^3(\Omega)};\ \theta^{-1};\ k_2\right)$$

(respectivement des termes

$$\max_{1 \le i \le m+n} \|b_i\|_{C^2(\Omega)} \quad \text{et} \quad \|c_1\|_{C^2(\Omega)} + \|c_2\|_{C^2(\Omega)})$$

qui apparaissent ci-dessus, pour les diverses cartes $(O_k \times U_l, \phi_k \times \varphi_l)$, on a montré, en considérant une carte où $\Delta_1 u_{\gamma,\beta}$ (respectivement de $\Delta_2 u_{\gamma,\beta}$) atteint son minimum global sur $V \times N$, que pour tout $0 < \gamma \le 1$, tout $\beta \ge 0$ et tout $y \in V \times N$,

$$\Delta_1 u_{\gamma,\beta}(y) \ge -K_1(1 - \bar{B} + \bar{C})(1 + \gamma^{1/2}\beta)$$

$$\Delta_2 u_{\gamma,\beta}(y) \ge -K_1(1 + \bar{B} + \bar{C})(\gamma^{-1} + \gamma^{-1/2}\beta)$$

Ces deux inégalités, les deux premières estimées de la proposition et l'équation (4) permettent alors de voir qu'il existe une constante $K_2 \ge 0$, ne dépendant que des structures riemanniennes de V et N et du champ b, telle que pour tout $0 < \gamma \le 1$, tout $\beta \ge 0$ et tout $y \in V \times N$, on ait

$$\Delta_1 u_{\gamma,\beta}(y) \le K_2[1 + \gamma\beta^2]$$

$$\Delta_2 u_{\gamma,\beta}(y) \le K_2[\gamma^{-1} + \beta^2]$$

ce qui termine la démonstration de la proposition. ■

Pour $\theta \in N$, notons $\mu_{\gamma,\beta}(\cdot|\theta)$ la version régulière de la probabilité conditionnelle, sous $\mu_{\gamma,\beta}$, sachant que la seconde coordonnée sur $V \times N$ vaut θ. La projection sur V de cette probabilité est absolument continue par rapport à λ_1, et pour tout $x \in V$, on a

$$\mu_{\gamma,\beta}(x|\theta) = \left(\int \mu_{\gamma,\beta}(y,\theta)\lambda_1(dy)\right)^{-1} \mu_{\gamma,\beta}(x,\theta)$$

La première estimée de la proposition 2 permet alors d'obtenir une inégalité de Harnack "partielle":

COROLLAIRE 3 *Il existe une constante $K' \ge 0$, ne dépendant que des structures riemanniennes de V et N et du champ b, telle que pour tout $0 < \gamma \le 1$ et tout $\beta \ge 0$, on ait*

$$\exp(-K'[1 + \gamma^{1/2}\beta]) \le \mu_{\gamma,\beta}(x|\theta) \le \exp(K'[1 + \gamma^{1/2}\beta])$$

Démonstration Soit $\theta \in N$ fixé. Il existe $y_\theta \in V$ tel que

$$\int \mu_{\gamma,\beta}(y, \theta)\lambda_1(dy) = \mu_{\gamma,\beta}(y_\theta, \theta)$$

Pour $x \in V$, soit $g: [0, T] \to V$ une géodésique de longueur minimale et de vecteurs dérivés unitaires, allant de y_θ à x. Si on appelle d la distance associée à la structure riemannienne de V, on a, par définition, $d(y_\theta, x) = T$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\left|\ln\left(\frac{\mu_{\gamma,\beta}(x, \theta)}{\mu_{\gamma,\beta}(y_\theta, \theta)}\right)\right| &= \int_0^T \langle \nabla_1 \ln(\mu_{\gamma,\beta})(g_t), dg_t\rangle_1 \\ &\leq \int_0^T |\nabla_1 \ln(\mu_{\gamma,\beta})|_1(g_t)\, dt \\ &\leq K(1 + \gamma^{1/2}\beta)d(y_\theta, x)\end{aligned}$$

K étant la constante qui apparaît dans la proposition 2. Or, comme V est compacte, elle est de diamètre D fini, et on en déduit le corollaire avec $K' = KD$. ■

D'autre part, les estimées sur les laplaciens "partiels" Δ_1 et Δ_2 de $u_{\gamma,\beta}$ vont permettre de voir que $u_{\gamma,\beta}$ est dérivable par rapport à $\gamma \in]0, 1[$ et fourniront une majoration de $\|(\partial/\partial\gamma)u_{\gamma,\beta}\|_\infty$. On renvoie, pour cela, à la fin de la section suivante.

3 DIFFÉRENTIATION DE LA PROBABILITÉ INVARIANTE PAR RAPPORT À UN PARAMÈTRE

On s'intéresse, dans un premier temps, à la situation suivante, rencontrée dans l'introduction:

On dispose d'une famille, paramétrée par $\theta \in N$, (N étant à nouveau le cercle), de champs de vecteurs, $b(\cdot, \theta)$, sur une variété riemannienne compacte et connexe V et on suppose que l'application

$$\begin{aligned} V \times N &\to TV \\ (x, \theta) &\mapsto b(x, \theta)\end{aligned}$$

est de classe C^∞.

Pour $\theta \in N$ fixé, considérons l'opérateur

$$L_\theta \cdot = \frac{1}{2}\Delta \cdot + \langle b(x, \theta), \nabla \cdot\rangle$$

défini sur $C^2(V)$.

Il existe une unique probabilité μ_θ invariante pour cet opérateur, c'est-à-dire, qui vérifie,

$$\forall f \in C^2(V), \quad \mu_\theta(L_\theta f) = 0$$

On a déjà rappelé que μ_θ est absolument continue par rapport à λ et que sa densité est de classe C^∞.

On va chercher ici à obtenir des résultats de régularité de μ_θ en θ et à calculer ses deux premières dérivées. On prouvera également que le potentiel associé à L_θ (*voir* la définition donnée ci-dessous) est deux fois dérivable en θ, et que les opérateurs ainsi obtenus restent continus sur $C^0(V)$, résultat qui nous sera bien utile par la suite. Puis, à la fin de cette section, on s'intéressera à la différentiation de la probabilité invariante par rapport à un autre type de dépendance en un paramètre.

Pour les premiers de ces résultats, les méthodes utilisées seront essentiellement probabilistes (contrairement à dans [6], où nous avons utilisé la théorie des opérateurs pour obtenir la différentiabilité de μ_θ en θ, dans le cas particulier où N était la droite réelle et où $b(x, \theta)$ s'écrivait sous la forme $\theta b(x)$), et on aura besoin des objets suivants:

$(B_t)_{t\geq 0}$ désignera un mouvement brownien sur V, c'est-à-dire, une diffusion dont la restriction du générateur à $C^2(V)$ est la moitié du laplacien, $\frac{1}{2}\Delta$.

$(Z_t^\theta)_{t\geq 0}$ (respectivement $(\tilde{Z}_t^\theta)_{t\geq 0}$) désignera une diffusion sur V dont le générateur restreint à $C^2(V)$ est L_θ (respectivement $\tilde{L}_\theta \cdot = \frac{1}{2}\Delta \cdot + \langle \nabla \ln(\mu_\theta)(x) - b(x, \theta), \nabla \cdot\rangle$).

Pour indiquer qu'une diffusion est issue d'un point $x \in V$, on écrira le x en indice de l'espérance, et pour toute probabilité μ sur V, on conviendra, comme d'habitude, de noter $\mathbb{E}_\mu[\cdot] = \int \mu(dx)\mathbb{E}_x[\cdot]$ l'espérance par rapport à une diffusion de loi initiale μ.

On notera $(P_t^\theta)_{t\geq 0}$ (respectivement $(\tilde{P}_t^\theta)_{t\geq 0}$) le semi-groupe (sur $C^0(V)$) associé à l'opérateur L_θ (respectivement $\tilde{L}_\theta$). On a donc,

$$\forall t \geq 0, \quad \forall \theta \in N, \quad \forall x \in V, \quad \forall f \in C^0(V), \quad P_t^\theta f(x) = \mathbb{E}_x[f(Z_t^\theta)]$$

Une notion importante qui lui est associée, est celle de potentiel (réduit): On pose, pour $f \in C^0(V)$,

$$A^\theta(f)(x) = \int_0^\infty P_t^\theta(f - \mu_\theta(f))(x)\, dt$$

et

$$\tilde{A}^\theta(f)(x) = \int_0^\infty \tilde{P}_t^\theta(f - \mu_\theta(f))(x)\, dt$$

Le théorème ergodique permet de voir que ces opérateurs sont bien définis (on aura remarqué que μ_θ est aussi la probabilité invariante pour $\tilde{L}_\theta$), et qu'en fait, on a convergence absolue et uniforme en $(x, \theta) \in V \times N$. Plus précisément, on peut montrer, à partir des inégalités de Sobolev logarithmiques satisfaites par μ_θ (cf., par example, la section 5 ci-après, avec $\beta = 1$), qu'il existe deux constantes $K \geq 0$ et $\alpha > 0$ telles que

$$\forall \theta \in N, \quad \forall x \in V, \quad \forall f \in C^0(V), \quad |P_t^\theta(f - \mu_\theta(f))(x)| \leq K\|f\|_\infty \exp(-\alpha t) \tag{10}$$

et

$$|\tilde{P}_t^\theta(f - \mu_\theta(f))(x)| \leq K\|f\|_\infty \exp(-\alpha t) \tag{11}$$

Les constantes K et α ne dépendent que de V et de normes C^2 des $b(\cdot, \theta)$, pour $\theta \in N$.

On fera constamment appel aux inégalités (10) et (11) dans la suite de cette section. Elles permettent notamment de voir que les opérateurs A^θ et $\tilde{A}^\theta$ sont bornés sur $C^0(V)$ et de norme majorée par $K\alpha^{-1}$.

D'autre part, remarquons que A^θ est l'inverse de $-L_\theta$, sur l'orthogonal des fonctions constantes dans $L^2(\mu_\theta)$, intersecté avec $C^2(V)$;

$$\forall f \in C^2(V), \quad \mu_\theta(f) = 0 \Rightarrow A^\theta(-L_\theta(f)) = -L_\theta(A^\theta(f)) = f$$

(et on a la même propriété avec $\tilde{A}^\theta$ et $-\tilde{L}_\theta$, respectivement à la place de A^θ et $-L_\theta$).

Pour prouver que l'application $\theta \mapsto \mu_\theta(x)$ est différentiable, pour un $x \in V$ fixé, et que $\partial_\theta \mu_\theta(x)$ est continue en $(x, \theta) \in V \times N$ (on utilise la notation courte $\partial_\theta = \partial/\partial\theta$), il suffit, d'après un résultat classique de la théorie des distributions, de prouver qu'il existe une fonction continue $g: V \times N \to \mathbb{R}$ telle que pour toute fonction $f \in C^0(V)$, $\theta \mapsto \mu_\theta(f)$ est différentiable et de dérivée $\partial_\theta \mu_\theta(f) = \int g(x, \theta) f(x) \lambda(dx)$.

Soit $f \in C^0(V)$ fixé. Pour démontrer que $\theta \mapsto \mu_\theta(f)$ est dérivable, on va approcher $\mu_\theta(f)$ par $P_t^\theta(f)(x)$, pour un $x \in V$ fixé quelconque, et utiliser le résultat classique suivant:

Lemme 4 *Soit $(F_t)_{t \geq 0}$ une famille de fonctions appartenant à $C^1(N)$. Supposons que F_t converge (a priori simplement) vers une fonction F et que $\partial_\theta F_t$ converge uniformément vers une fonction g, quand t tend vers l'infini. Alors F est de classe C^1 et $\partial_\theta F = g$.*

Pour tout $y \in V$, posons

$$\begin{aligned} G_\theta(y) &= -\langle \partial_\theta b(y, \theta), \nabla \ln \mu_\theta(y) \rangle - \operatorname{div}(\partial_\theta b(\cdot, \theta))(y) \\ &= -\frac{1}{\mu_\theta(y)} \operatorname{div}[\mu_\theta(\cdot)\partial_\theta b(\cdot, \theta)](y) \end{aligned}$$

En utilisant les considérations précédentes, on va montrer le résultat suivant:

Proposition 5 *Pour tout $y \in V$ fixé, $\mu_\theta(y)$ est dérivable en θ, et de dérivée*

$$\partial_\theta \mu_\theta(y) = \mu_\theta(y) \tilde{A}^\theta(G_\theta)(y)$$

Démonstration On est donc amené à étudier $P_t^\theta(f)(x)$, et on utilise pour cela la formule de Girsanov;

$$P_t^\theta(f)(x) = \mathbb{E}_x\left[f(B_t)\mathscr{E}\left(\int_0^t \langle b(B_s, \theta), dB_s \rangle\right)\right]$$

où $\mathscr{E}(\int_0^t \langle b(B_s, \theta), dB_s \rangle)$ est l'exponentielle stochastique de l'intégrale d'Itô

$$\int_0^t \langle b(B_s, \theta), dB_s \rangle,$$

$$\mathscr{E}\left(\int_0^t \langle b(B_s, \theta), dB_s \rangle\right) = \exp\left(\int_0^t \langle b(B_s, \theta), dB_s \rangle - \frac{1}{2}\int_0^t |b(B_s, \theta)|^2 \, ds\right)$$

(pour les notions et résultats de géométrie stochastique utilisés ici, on renvoie à [2].)

Il apparaît ainsi que $P_t^\theta(f)(x)$ est continûment différentiable en θ et que sa dérivée est donnée par

$$\begin{aligned} \partial_\theta P_t^\theta(f)(x) &= \mathbb{E}_x\left[f(B_t)\left[\int_0^t \langle \partial_\theta b(B_s, \theta), dB_s \rangle \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. - \int_0^t \langle b(B_s, \theta), \partial_\theta b(B_s, \theta) \rangle \, ds\right]\mathscr{E}\left(\int_0^t \langle b(B_s, \theta), dB_s \rangle\right)\right] \\ &= \mathbb{E}_x\left[f(Z_t^\theta)\left[\int_0^t \langle \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta), dZ_s^\theta \rangle - \int_0^t \langle b(Z_s^\theta, \theta), \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta) \rangle \, ds\right]\right] \end{aligned}$$

Montrons que cette expression oublie, exponentiellement vite, quand t tend vers l'infini, la condition initiale x et qu'elle s'approche, en fait, de

$$\mathbb{E}_{\mu_\theta}\left[f(Z_t^\theta)\left[\int_0^t \langle \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta), dZ_s^\theta \rangle - \int_0^t \langle b(Z_s^\theta, \theta), \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta) \rangle \, ds\right]\right]$$

Pour prouver ceci, on la décompose en

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_x\left[f(Z_t^\theta)\left[\int_0^t \langle \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta), dZ_s^\theta \rangle - \int_0^t \langle b(Z_s^\theta, \theta), \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta) \rangle \, ds\right]\right] \\ &\quad = \mathbb{E}_x\left[f(Z_t^\theta)\left[\int_0^{t/2} \langle \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta), dZ_s^\theta \rangle - \int_0^{t/2} \langle b(Z_s^\theta, \theta), \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta) \rangle \, ds\right]\right] \\ &\qquad + \mathbb{E}_x\left[f(Z_t^\theta)\left[\int_{t/2}^t \langle \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta), dZ_s^\theta \rangle - \int_{t/2}^t \langle b(Z_s^\theta, \theta), \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta) \rangle \, ds\right]\right] \end{aligned}$$

Le premier terme s'écrit aussi

$$\mathbb{E}_x\left[\left[\int_0^{t/2} \langle \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta), dZ_s^\theta \rangle - \int_0^{t/2} \langle b(Z_s^\theta, \theta), \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta)\rangle\, ds\right]\mathbb{E}_{Z_{t/2}^\theta}[f(Z_{t/2}^\theta)]\right]$$

mais d'après (10), on a, pour tout $y \in V$,

$$|\mathbb{E}_y[f(Z_{t/2}^\theta)] - \mu_\theta(f)| \leq K\|f\|_\infty \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t\right)$$

ainsi,

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\mathbb{E}_x\left[\left[\int_0^{t/2} \langle \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta), dZ_s^\theta \rangle - \int_0^{t/2} \langle b(Z_s^\theta, \theta), \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta)\rangle\, ds\right]\mathbb{E}_{Z_{t/2}^\theta}[f(Z_{t/2}^\theta)]\right] \\
&\quad - \mathbb{E}_x\left[\left[\int_0^{t/2} \langle \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta), dZ_s^\theta \rangle - \int_0^{t/2} \langle b(Z_s^\theta, \theta), \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta)\rangle\, ds\right]\mu_\theta(f)\right]\Bigg| \\
&\quad \leq \mathbb{E}_x\left[\left|\int_0^{t/2} \langle \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta), dZ_s^\theta \rangle - \int_0^{t/2} \langle b(Z_s^\theta, \theta), \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta)\rangle\, ds\right|\right] \\
&\quad \times K\|f\|_\infty \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t\right) \\
&\quad \leq \sqrt{\mathbb{E}_x\left[\left(\int_0^{t/2} \langle \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta), dZ_s^\theta \rangle - \int_0^{t/2} \langle b(Z_s^\theta, \theta), \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta)\rangle\, ds\right)^2\right]} \\
&\quad \times K\|f\|_\infty \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t\right)
\end{aligned}$$

Heuristiquement, puisque $(Z_s^\theta)_{s\geq 0}$ est régie par

$$dZ_s^\theta = dB_s + b(Z_s, \theta)\, ds$$

on a envie d'écrire

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x\left[\left(\int_0^{t/2} \langle \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta), dZ_s^\theta \rangle - \int_0^{t/2} \langle b(Z_s^\theta, \theta), \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta)\rangle\, ds\right)^2\right] \\
&\quad = \mathbb{E}_x\left[\left(\int_0^{t/2} \langle \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta), dB_s \rangle\right)^2\right] \\
&\quad = \int_0^{t/2} \mathbb{E}_x[|\partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta)|^2]\, ds
\end{aligned}$$

mais le terme intermédiaire n'a pas de sens. Néanmoins, le résultat est correct et pour le justifier, on peut passer par la formule de Girsanov;

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x\left[\left(\int_0^{t/2} \langle \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta), dZ_s^\theta \rangle - \int_0^{t/2} \langle b(Z_s^\theta, \theta), \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta)\rangle\, ds\right)^2\right] \\
&\quad = \mathbb{E}_x\left[\left(\int_0^{t/2} \langle \partial_\theta b(B_s, \theta), dB_s \rangle - \int_0^{t/2} \langle b(B_s, \theta), \partial_\theta b(B_s, \theta)\rangle\, ds\right)^2\right. \\
&\quad \left.\times\, \mathscr{E}\left(\int_0^{t/2} \langle b(B_s, \theta), dB_s\rangle\right)\right]
\end{aligned}$$

Notons

$$M_{t/2} = \int_0^{t/2} \langle \partial_\theta b(B_s, \theta), dB_s \rangle - \int_0^{t/2} \langle b(B_s, \theta), \partial_\theta b(B_s, \theta)\rangle\, ds$$

on a alors,

$$\begin{aligned}
M_{t/2}^2 &= 2\int_0^{t/2} M_s\, dM_s + \int_0^{t/2} |\partial_\theta b(B_s, \theta)|^2\, ds \\
&= 2\int_0^{t/2} M_s\langle \partial_\theta b(B_s, \theta), dB_s\rangle - 2\int_0^{t/2} M_s\langle b(B_s, \theta), \partial_\theta b(B_s, \theta)\rangle\, ds \\
&\quad + \int_0^{t/2} |\partial_\theta b(B_s, \theta)|^2\, ds
\end{aligned}$$

Posons, pour $0 \leq s \leq t/2$,

$$N_s = 2\int_0^s M_u\langle \partial_\theta b(B_u, \theta), dB_u\rangle$$

et remarquons que $(N_s)_{0\leq s\leq t/2}$ est une martingale.
Considérons également, pour $0 \leq s \leq t/2$, la martingale

$$\mathscr{E}_s = \mathscr{E}\left(\int_0^s \langle b(B_u, \theta), dB_u\rangle\right)$$

qui satisfait l'équation,

$$\mathscr{E}_s = \int_0^s \mathscr{E}_u\langle b(B_u, \theta), dB_u\rangle$$

Ainsi,

$$N_{t/2}\mathscr{E}_{t/2} = \int_0^{t/2} N_s\, d\mathscr{E}_s + \int_0^{t/2} \mathscr{E}_s\, dN_s + 2\int_0^{t/2} M_s\mathscr{E}_s\langle b(B_s, \theta), \partial_\theta b(B_s, \theta)\rangle\, ds$$

puis,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x[N_{t/2}\mathscr{E}_{t/2}] &= 2\mathbb{E}_x\left[\int_0^{t/2} M_s\mathscr{E}_s\langle b(B_s, \theta), \partial_\theta b(B_s, \theta)\rangle\, ds\right]\\ &= 2\int_0^{t/2} \mathbb{E}_x[M_s\mathscr{E}_s\langle b(B_s, \theta), \partial_\theta b(B_s, \theta)\rangle]\, ds\\ &= 2\int_0^{t/2} \mathbb{E}_x[M_s\langle b(B_s, \theta), \partial_\theta b(B_s, \theta)\rangle\mathscr{E}_{t/2}]\, ds\end{aligned}$$

On a donc obtenu,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x[M_{t/2}^2\mathscr{E}_{t/2}] &= 2\mathbb{E}_x\left[\left(\int_0^{t/2} M_s\langle b(B_s, \theta), \partial_\theta b(B_s, \theta)\rangle\, ds\right)\mathscr{E}_{t/2}\right]\\ &\quad + \mathbb{E}_x\left[\left(-2\int_0^{t/2} M_s\langle b(B_s, \theta), \partial_\theta b(B_s, \theta)\rangle\, ds\right.\right.\\ &\quad \left.\left. + \int_0^{t/2} |\partial_\theta b(B_s, \theta)|^2\, ds\right)\mathscr{E}_{t/2}\right]\\ &= \mathbb{E}_x\left[\int_0^{t/2} |\partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta)|^2\, ds\right]\end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat annoncé. On en déduit notamment que

$$\sqrt{\mathbb{E}_x\left[\left(\int_0^{t/2} \langle\partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta), dZ_s^\theta\rangle - \int_0^{t/2} \langle b(Z_s^\theta, \theta), \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta)\rangle\, ds\right)^2\right]} \leq \||\partial_\theta b|\|_\infty\sqrt{\frac{t}{2}}$$

puis, que

$$\begin{aligned}&\left|\mathbb{E}_x\left[\left[\int_0^{t/2} \langle\partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta), dZ_s^\theta\rangle - \int_0^{t/2} \langle b(Z_s^\theta, \theta), \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta)\rangle\, ds\right]f(Z_t^\theta)\right]\right.\\ &\quad \left. - \mathbb{E}_x\left[\left[\int_0^{t/2} \langle\partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta), dZ_s^\theta\rangle - \int_0^{t/2} \langle b(Z_s^\theta, \theta), \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta)\rangle\, ds\right]\mu_\theta(f)\right]\right|\\ &\leq K\||\partial_\theta b|\|_\infty\|f\|_\infty\sqrt{\frac{t}{2}}\exp\left(-\frac{\alpha}{2}t\right)\end{aligned}$$

Mais, notons que

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_x\left[\left[\int_0^{t/2} \langle\partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta), dZ_s^\theta\rangle - \int_0^{t/2} \langle b(Z_s^\theta, \theta), \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta)\rangle\, ds\right]\mu_\theta(f)\right]\\ &= \mu_\theta(f)\mathbb{E}_x\left[\int_0^{t/2} \langle\partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta), dZ_s^\theta\rangle - \int_0^{t/2} \langle b(Z_s^\theta, \theta), \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta)\rangle\, ds\right]\\ &= \mu_\theta(f)\mathbb{E}_x\left[\left[\int_0^{t/2} \langle\partial_\theta b(B_s, \theta), dB_s\rangle\right.\right.\\ &\quad \left.\left. - \int_0^{t/2} \langle b(B_s, \theta), \partial_\theta b(B_s, \theta)\rangle\, ds\right]\mathscr{E}\left(\int_0^{t/2} \langle b(B_s, \theta), dB_s\rangle\right)\right]\\ &= \mu_\theta(f)\partial_\theta\mathbb{E}_x\left[\mathscr{E}\left(\int_0^{t/2} \langle b(B_s, \theta), dB_s\rangle\right)\right]\\ &= \mu_\theta(f)\partial_\theta P_{t/2}^\theta(1)(x)\\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi, le premier terme que l'on se proposait d'étudier tend exponentiellement vite vers 0;

$$\begin{aligned}&\left|\mathbb{E}_x\left[\left[\int_0^{t/2} \langle\partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta), dZ_s^\theta\rangle - \int_0^{t/2} \langle b(Z_s^\theta, \theta), \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta)\rangle\, ds\right]f(Z_t^\theta)\right]\right|\\ &\leq K\||\partial_\theta b|\|_\infty\|f\|_\infty\sqrt{\frac{t}{2}}\exp\left(-\frac{\alpha}{2}t\right)\end{aligned}$$

De même (ou en intégrant cette expression par rapport à $\mu_\theta(dx)$, car la convergence précédente est uniforme en x), on montre que

$$\begin{aligned}&\left|\mathbb{E}_{\mu_\theta}\left[\left[\int_0^{t/2} \langle\partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta), dZ_s^\theta\rangle - \int_0^{t/2} \langle b(Z_s^\theta, \theta), \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta)\rangle\, ds\right]f(Z_s^\theta)\right]\right|\\ &\leq K\||\partial_\theta b|\|_\infty\|f\|_\infty\sqrt{\frac{t}{2}}\exp\left(-\frac{\alpha}{2}t\right)\end{aligned}$$

On a donc prouvé, pour le premier terme, que

$$\begin{aligned}&\left|\mathbb{E}_x\left[f(Z_t^\theta)\left[\int_0^{t/2} \langle\partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta), dZ_s^\theta\rangle - \int_0^{t/2} \langle b(Z_s^\theta, \theta), \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta)\rangle\, ds\right]\right]\right.\\ &\quad \left. - \mathbb{E}_{\mu_\theta}\left[f(Z_t^\theta)\left[\int_0^{t/2} \langle\partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta), dZ_s^\theta\rangle - \int_0^{t/2} \langle b(Z_s^\theta, \theta), \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta)\rangle\, ds\right]\right]\right|\\ &\leq \sqrt{2}K\||\partial_\theta b|\|_\infty\|f\|_\infty\sqrt{t}\exp\left(-\frac{\alpha}{2}t\right)\end{aligned}$$

Intéressons-nous maintenant au second terme, il vaut

$$\mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_{Z^\theta_{t/2}}\left[f(Z^\theta_{t/2})\left[\int_0^{t/2}\langle\partial_\theta b(Z^\theta_s,\theta),dZ^\theta_s\rangle-\int_0^{t/2}\langle b(Z^\theta_s,\theta),\partial_\theta b(Z^\theta_s,\theta)\rangle\,ds\right]\right]\right]$$

Notons, pour tout $y\in V$,

$$G(y)=\mathbb{E}_y\left[f(Z^\theta_{t/2})\left[\int_0^{t/2}\langle\partial_\theta b(Z^\theta_s,\theta),dZ^\theta_s\rangle-\int_0^{t/2}\langle b(Z^\theta_s,\theta),\partial_\theta b(Z^\theta_s,\theta)\rangle\,ds\right]\right]$$

D'après un calcul précédent, on a

$$\|G\|_\infty\le\||\partial_\theta b|\|_\infty\|f\|_\infty\sqrt{\frac{t}{2}}$$

ainsi en utilisant (10), on obtient,

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_{Z^\theta_{t/2}}\left[f(Z^\theta_{t/2})\left[\int_0^{t/2}\langle\partial_\theta b(Z^\theta_s,\theta),dZ^\theta_s\rangle-\int_0^{t/2}\langle b(Z^\theta_s,\theta),\partial_\theta b(Z^\theta_s,\theta)\rangle\,ds\right]\right]\right]\right.\\
&\qquad\left.-\mathbb{E}_{\mu_\theta}\left[\mathbb{E}_{Z^\theta_{t/2}}\left[f(Z^\theta_{t/2})\left[\int_0^{t/2}\langle\partial_\theta b(Z^\theta_s,\theta),dZ^\theta_s\rangle-\int_0^{t/2}\langle b(Z^\theta_s,\theta),\partial_\theta b(Z^\theta_s,\theta)\rangle\,ds\right]\right]\right]\right|\\
&\quad=\left|\mathbb{E}_x\left[G(Z^\theta_{t/2})-\int\mu_\theta(dy)G(y)\right]\right|\\
&\quad\le K\||\partial_\theta b|\|_\infty\|f\|_\infty\sqrt{\frac{t}{2}}\exp\left(-\frac{\alpha}{2}t\right)
\end{aligned}$$

En regroupant les résultats précédents, on a donc obtenu l'estimée suivante,

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}_x\left[f(Z^\theta_t)\left[\int_0^t\langle\partial_\theta b(Z^\theta_s,\theta),dZ^\theta_s\rangle-\int_0^t\langle b(Z^\theta_s,\theta),\partial_\theta b(Z^\theta_s,\theta)\rangle\,ds\right]\right]\right.\\
&\qquad\left.-\mathbb{E}_{\mu_\theta}\left[f(Z^\theta_t)\left[\int_0^t\langle\partial_\theta b(Z^\theta_s,\theta),dZ^\theta_s\rangle-\int_0^t\langle b(Z^\theta_s,\theta),\partial_\theta b(Z^\theta_s,\theta)\rangle\,ds\right]\right]\right|\\
&\quad\le(2^{1/2}+2^{-1/2})K\||\partial_\theta b|\|_\infty\|f\|_\infty\sqrt{t}\exp\left(-\frac{\alpha}{2}t\right)
\end{aligned}$$

Du fait que μ_θ est la probabilité invariante pour la diffusion Z^θ, l'expression

$$\mathbb{E}_{\mu_\theta}\left[f(Z^\theta_t)\left[\int_0^t\langle\partial_\theta b(Z^\theta_s,\theta),dZ^\theta_s\rangle-\int_0^t\langle b(Z^\theta_s,\theta),\partial_\theta b(Z^\theta_s,\theta)\rangle\,ds\right]\right]$$

va être facile à traiter, en retournant le temps.

Posons, pour $0\le s\le t$,

$$\tilde Z^\theta_s=Z^\theta_{t-s}$$

et notons que sous $\mathbb{E}_{\mu_\theta}$, $(\tilde Z^\theta_s)_{0\le s\le t}$ est bien une diffusion de générateur $\tilde L_\theta$ (et de loi initiale μ_θ).

Pour effectuer facilement le retournement du temps, il est commode d'utiliser l'intégrale stochastique de Stratonovitch, que l'on désignera par $\oint$, car rappelons que p.s. sous $\mathbb{E}_{\mu_\theta}$,

$$\oint_0^t\langle b(Z^\theta_s),dZ^\theta_s\rangle=-\oint_0^t\langle b(\tilde Z^\theta_s),d\tilde Z^\theta_s\rangle$$

Cependant, il est bien connu que dans notre situation, on passe de l'intégrale d'Itô à celle de Stratonovitch par la formule

$$\int_0^t\langle b(Z^\theta_s),dZ^\theta_s\rangle=\oint_0^t\langle b(Z^\theta_s),dZ^\theta_s\rangle-\frac12\int_0^t\operatorname{div}(b)(Z^\theta_s)\,ds$$

pour tout champ de vecteurs b sur V.

On obtient ainsi, en considérant le champ de vecteurs $\partial_\theta b(\cdot,\theta)$,

$$\begin{aligned}
\int_0^t\langle\partial_\theta b(Z^\theta_s,\theta),dZ^\theta_s\rangle&=\oint_0^t\langle\partial_\theta b(Z^\theta_s,\theta),dZ^\theta_s\rangle-\frac12\int_0^t\operatorname{div}(\partial_\theta b(\cdot,\theta))(Z^\theta_s)\,ds\\
&=-\oint_0^t\langle\partial_\theta b(\tilde Z^\theta_s,\theta),d\tilde Z^\theta_s\rangle-\frac12\int_0^t\operatorname{div}(\partial_\theta b(\cdot,\theta))(\tilde Z^\theta_s)\,ds\\
&=-\int_0^t\langle\partial_\theta b(\tilde Z^\theta_s,\theta),d\tilde Z^\theta_s\rangle-\int_0^t\operatorname{div}(\partial_\theta b(\cdot,\theta))(\tilde Z^\theta_s)\,ds
\end{aligned}$$

puis,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mu_\theta}\left[f(Z^\theta_t)\left[\int_0^t\langle\partial_\theta b(Z^\theta_s,\theta),dZ^\theta_s\rangle-\int_0^t\langle b(Z^\theta_s,\theta),\partial_\theta b(Z^\theta_s,\theta)\rangle\,ds\right]\right]\\
&\quad=\mathbb{E}_{\mu_\theta}\left[f(\tilde Z^\theta_0)\left[-\int_0^t\langle\partial_\theta b(\tilde Z^\theta_s,\theta),d\tilde Z^\theta_s\rangle-\int_0^t\operatorname{div}(\partial_\theta b(\cdot,\theta))(\tilde Z^\theta_s)\,ds\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.-\int_0^t\langle b(\tilde Z^\theta_s,\theta),\partial_\theta b(\tilde Z^\theta_s,\theta)\rangle\,ds\right]\right]\\
&\quad=\int\mu_\theta(dy)f(y)\mathbb{E}_y\left[-\int_0^t\langle\partial_\theta b(\tilde Z^\theta_s,\theta),d\tilde Z^\theta_s\rangle-\int_0^t(\operatorname{div}(\partial_\theta b(\cdot,\theta))(\tilde Z^\theta_s)\right.\\
&\qquad\left.+\langle b(\tilde Z^\theta_s,\theta),\partial_\theta b(\tilde Z^\theta_s,\theta)\rangle)\,ds\right]
\end{aligned}$$

Heuristiquement, puisque $\tilde{Z}^\theta$ est régie par

$$d\tilde{Z}_s^\theta = dB_s + (\nabla \ln(\mu_\theta)(\tilde{Z}_s^\theta) - b(\tilde{Z}_s^\theta, \theta))\, ds$$

on voudrait bien affirmer que pour tout $y \in V$,

$$\mathbb{E}_y\left[\int_0^t \langle \partial_\theta b(\tilde{Z}_s^\theta, \theta), d\tilde{Z}_s^\theta\rangle\right] = \mathbb{E}_y\left[\int_0^t \langle \partial_\theta b(\tilde{Z}_s^\theta, \theta), \nabla \ln(\mu_\theta)(\tilde{Z}_s^\theta) - b(\tilde{Z}_s^\theta, \theta)\rangle\, ds\right]$$

Ce résultat est correct et on peut le justifier, comme précédemment, en réutilisant la formule de Girsanov, ou plus simplement, en utilisant le fait que $\partial_\theta \tilde{P}_t^\theta(1)(y) = 0$.

On obtient ainsi que

$$\mathbb{E}_y\left[-\int_0^t \langle \partial_\theta b(\tilde{Z}_s^\theta, \theta), d\tilde{Z}_s^\theta\rangle - \int_0^t (\operatorname{div}(\partial_\theta b(\cdot, \theta))(\tilde{Z}_s^\theta) + \langle b(\tilde{Z}_s^\theta, \theta), \partial_\theta b(\tilde{Z}_s^\theta, \theta)\rangle)\, ds\right]$$
$$= \int_0^t \mathbb{E}_y[G_\theta(\tilde{Z}_s^\theta)]\, ds$$

Remarquons que $\mu_\theta(G_\theta) = 0$, ce qui montre que

$$\left|\tilde{A}^\theta(G_\theta)(y) - \int_0^t \mathbb{E}_y[G_\theta(\tilde{Z}_s^\theta)]\, ds\right| = \left|\int_t^\infty \mathbb{E}_y[G_\theta(\tilde{Z}_s^\theta)]\, ds\right|$$
$$\leq K\|G_\theta\|_\infty \int_t^\infty \exp(-\alpha s)\, ds$$

(d'après l'inégalité (11))

$$= K\|G_\theta\|_\infty \alpha^{-1} \exp(-\alpha t)$$

Or, par localisation et utilisation de la méthode de Bernstein, on peut obtenir une constante $K_1 \geq 0$, ne dépendant que de V et de b, telle que pour tout $\theta \in N$,

$$\||\nabla \ln(\mu_\theta)|\|_\infty \leq K_1$$

ainsi, il existe une constante $K_2 \geq 0$, ne dépendant que de V et de b, telle que pour tout $\theta \in N$ et tout $y \in V$,

$$\left|\tilde{A}^\theta(G_\theta)(y) - \int_0^t \mathbb{E}_y[G_\theta(\tilde{Z}_s^\theta)]\, ds\right| \leq K_2 \exp(-\alpha t)$$

En définitive, on a donc prouvé l'estimée suivante;

$$\forall \theta \in N, \quad \forall x \in V, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall f \in C^0(V),$$
$$\left|\partial_\theta P_t^\theta(f)(x) - \int \mu_\theta(dy) f(y) \tilde{A}^\theta(G_\theta)(y)\right| \leq K_3\|f\|_\infty(1 + \sqrt{t}) \exp\left(-\frac{\alpha}{2} t\right) \quad (12)$$

où K_3 est une constante ne dépendant que de V et de b,

$$K_3 = \max\left\{(2^{1/2} + 2^{-1/2})K \sup_{\theta \in N} \||\partial_\theta b(\cdot, \theta)|\|_\infty ; K_2\right\}$$

avec les notations précédentes.

Mais il est facile de voir que $\tilde{A}^\theta(G_\theta)(y)$ est continue, en tant que fonction de $(y, \theta) \in V \times N$, ce qui termine la démonstration de la proposition, d'après le lemme 4 et la discussion le précédant. ■

Remarquons que l'inégalité (12) permet également de prouver que $A^\theta(f)(x)$ est dérivable en θ. En effet, posons, pour $T \geq 0$,

$$A_T^\theta(f)(x) = \int_0^T P_t^\theta(f - \mu_\theta(f))(x)\, dt$$

Il est clair, d'après le résultat précédent, que $A_T^\theta(f)(x)$ est dérivable en θ, et de dérivée

$$\partial_\theta A_T^\theta(f)(x) = \int_0^T [\partial_\theta P_t^\theta(f)(x) - \partial_\theta \mu_\theta(f)]\, dt$$
$$= \int_0^T [\partial_\theta P_t^\theta(f)(x) - \mu_\theta(G_\theta f)]\, dt$$

or, l'estimée (12) montre que cette expression est convergente, quand T tend vers l'infini, uniformément en $(x, \theta) \in V \times N$, ainsi, d'après le lemme 4, on a montré le résultat suivant.

PROPOSITION 6 *Pour tout $x \in V$ et toute fonction $f \in C^0(V)$ fixés, $A^\theta(f)(x)$ est dérivable en θ, et de dérivée*

$$\partial_\theta A^\theta(f)(x) = \int_0^\infty [\partial_\theta P_t^\theta(f)(x) - \mu_\theta(G_\theta f)]\, dt$$

De plus, il existe une constante $K_4 \geq 0$, ne dépendant que de V et de b, telle que pour tout $\theta \in N$,

$$\|\partial_\theta A^\theta(f)\|_\infty \leq K_4\|f\|_\infty$$

Au lieu de considérer une fonction $f \in C^0(V)$, considérons $f \in C^{0,1}(V \times N)$ (on entend par là que f appartient à $C^0(V \times N)$, est dérivable en la seconde variable et que $\partial_\theta f$ appartient à $C^0(V \times N)$), la proposition 6 permet alors de montrer (*voir* aussi la fin de la démonstration de la proposition ci-dessous) qu'il existe un constante $K_5 \geq 0$, ne dépendant que de V et de b, telle que pour tout $\theta \in N$,

$$\|\partial_\theta(A^\theta(f(\cdot,\theta))\|_\infty \leq K_5[\|f(\cdot,\theta)\|_\infty + \|\partial_\theta f(\cdot,\theta)\|_\infty]$$

et c'est sous cette forme que la proposition 6 nous sera utile ultérieurement.

En fait, nous aurons également besoin d'une estimée sur la dérivée seconde de $A^\theta(f)(x)$ en θ, et le reste de la première partie de cette section est voué à la démonstration du résultat suivant.

Proposition 7 *Pour tout $y \in V$ fixé, $\mu_\theta(y)$ est de classe C^2 en θ, et sa dérivée seconde est donnée par*

$$\partial_\theta^2 \mu_\theta(y) = -\mu_\theta(y)\tilde{A}^\theta\left(\frac{1}{\mu_\theta(\cdot)}\operatorname{div}[\mu_\theta(\cdot)(\partial_\theta^2 b(\cdot,\theta) + 2\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\cdot)\partial_\theta b(\cdot,\theta))]\right)(y)$$

De plus, pour tout $x \in V$ et toute fonction $f \in C^{0,2}(V \times N)$, l'application

$$(x,\theta) \mapsto A^\theta(f(\cdot,\theta))(x)$$

appartient à $C^{0,2}(V \times N)$, et il existe une constante $K' \geq 0$, ne dépendant que de V et de b, telle que pour tout $\theta \in N$,

$$\|\partial_\theta^2(A^\theta(f(\cdot,\theta))\|_\infty \leq K'[\|f(\cdot,\theta)\|_\infty + \|\partial_\theta f(\cdot,\theta)\|_\infty + \|\partial_\theta^2 f(\cdot,\theta)\|_\infty]$$

Démonstration La démonstration est similaire à celle des propositions 5 et 6, notre principal soucis étant d'estimer l'expression $\partial_\theta^2 P_t^\theta(f)(x)$, pour un $x \in V$ et une fonction $f \in C^0(V)$ fixés, dans le but de montrer qu'elle converge, quand t tend vers l'infini, exponentiellement vite (et uniformément en θ), vers une certaine limite.

On part, comme précédemment, de la formule de Girsanov, qui permet de voir que $P_t^\theta(f)(x)$ est deux fois continûment dérivable en θ, et que sa dérivée seconde est donnée par

$$\begin{aligned}\partial_\theta^2 P_t^\theta(f)(x) = \mathbb{E}_x\bigg[f(B_t)\bigg[&\int_0^t \langle \partial_\theta^2 b(B_s,\theta), dB_s\rangle - \int_0^t \langle b(B_s,\theta), \partial_\theta^2 b(B_s,\theta)\rangle\, ds \\ &- \int_0^t |\partial_\theta b(B_s,\theta)|^2\, ds\bigg]\mathscr{E}\left(\int_0^t \langle b(B_s,\theta), dB_s\rangle\right)\bigg] \\ &+ \mathbb{E}_x\bigg[f(B_t)\bigg[\int_0^t \langle \partial_\theta b(B_s,\theta), dB_s\rangle - \int_0^t \langle b(B_s,\theta), \partial_\theta b(B_s,\theta)\rangle\, ds\bigg]^2 \\ &\times \mathscr{E}\left(\int_0^t \langle b(B_s,\theta), dB_s\rangle\right)\bigg]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \mathbb{E}_x\bigg[f(Z_t^\theta)\bigg[\int_0^t \langle \partial_\theta^2 b(Z_s^\theta,\theta), dZ_s^\theta\rangle - \int_0^t \langle b(Z_s^\theta,\theta), \partial_\theta^2 b(Z_s^\theta,\theta)\rangle\, ds \\ &\qquad - \int_0^t |\partial_\theta b(Z_s^\theta,\theta)|^2\, ds\bigg]\bigg] \\ &\quad + \mathbb{E}_x\bigg[f(Z_t^\theta)\bigg[\int_0^t \langle \partial_\theta b(Z_s^\theta,\theta), dZ_s^\theta\rangle - \int_0^t \langle b(Z_s^\theta,\theta), \partial_\theta b(Z_s^\theta,\theta)\rangle\, ds\bigg]^2\bigg]\end{aligned}$$

Nous allons, dans un premier temps, montrer que cette expression s'approche exponentiellement vite, quand t tend vers l'infini, de

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mu_\theta}\bigg[f(Z_t^\theta)\bigg[\int_0^t \langle \partial_\theta^2 b(Z_s^\theta,\theta), dZ_s^\theta\rangle - \int_0^t \langle b(Z_s^\theta,\theta), \partial_\theta^2 b(Z_s^\theta,\theta)\rangle\, ds - \int_0^t |\partial_\theta b(Z_s^\theta,\theta)|^2\, ds\bigg]\bigg] \\ &\quad + \mathbb{E}_{\mu_\theta}\bigg[f(Z_t^\theta)\bigg[\int_0^t \langle \partial_\theta b(Z_s^\theta,\theta), dZ_s^\theta\rangle - \int_0^t \langle b(Z_s^\theta,\theta), \partial_\theta b(Z_s^\theta,\theta)\rangle\, ds\bigg]^2\bigg]\end{aligned}$$

Pour simplifier l'écriture, définissons, pour $0 \leq s \leq t$,

$$R_{s,t}^\theta = \int_s^t \langle \partial_\theta b(Z_u^\theta,\theta), dZ_u^\theta\rangle - \int_s^t \langle b(Z_u^\theta,\theta), \partial_\theta b(Z_u^\theta,\theta)\rangle\, du$$

$$S_{s,t}^\theta = \int_s^t \langle \partial_\theta^2 b(Z_u^\theta,\theta), dZ_u^\theta\rangle - \int_s^t \langle b(Z_u^\theta,\theta), \partial_\theta^2 b(Z_u^\theta,\theta)\rangle\, du - \int_s^t |\partial_\theta b(Z_u^\theta,\theta)|^2\, du$$

ainsi, l'expression qui nous intéresse s'écrit

$$\begin{aligned}\partial_\theta^2 P_t^\theta(f)(x) &= \mathbb{E}_x[f(Z_t^\theta)[S_{0,t}^\theta + (R_{0,t}^\theta)^2]] \\ &= \mathbb{E}_x[f(Z_t^\theta)[S_{0,t/3}^\theta + S_{t/3,t}^\theta + (R_{0,t/3}^\theta + R_{t/3,t}^\theta)^2]] \\ &= I_{1,t}^\theta(f)(x) + I_{2,t}^\theta(f)(x)\end{aligned}$$

la décomposition ci-dessus correspondant à

$$I_{1,t}^\theta(f)(x) = \mathbb{E}_x[f(Z_t^\theta)[S_{0,t/3}^\theta + (R_{0,t/3}^\theta)^2 + 2R_{0,t/3}^\theta R_{t/3,t}^\theta]]$$

$$I_{2,t}^\theta(f)(x) = \mathbb{E}_x[f(Z_t^\theta)[S_{t/3,t}^\theta + (R_{t/3,t}^\theta)^2]]$$

Commençons par étudier $I_{2,t}^\theta(f)(x)$. D'après la propriété de Markov satisfaite par la diffusion $(Z_s^\theta)_{s\geq 0}$, on a,

$$I_{2,t}^\theta(f)(x) = \mathbb{E}_x[G_t^\theta(f)(Z_{t/3}^\theta)]$$

où on a noté, pour tout $y \in V$,

$$G_t^\theta(f)(y) = \mathbb{E}_y[f(Z^\theta_{2t/3})[S^\theta_{0,\,2t/3} + (R^\theta_{0,\,2t/3})^2]]$$

Evaluons $\| G_t^\theta(f)(\cdot)\|_\infty$. En reprenant un calcul présenté dans la démonstration de la proposition 5 (justification par la formule de Girsanov de l'utilisation de la formule heuristique $dZ_t^\theta = dB_t + b(Z_t^\theta, \theta)\,dt$), on voit que pour tout $y \in V$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_y[|S^\theta_{0,\,2t/3}|] &\leq \mathbb{E}_y\left[\left|\int_0^{2t/3} \langle \partial_\theta^2 b(Z_s^\theta, \theta), dZ_s^\theta\rangle - \int_0^{2t/3} \langle \partial_\theta^2 b(Z_s^\theta, \theta), b(Z_s^\theta, \theta)\rangle\, ds\right|\right] \\
&\quad + \mathbb{E}_y\left[\int_0^{2t/3} |\partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta)|^2\, ds\right] \\
&\leq \sqrt{\mathbb{E}_y\left[\left(\int_0^{2t/3} \langle \partial_\theta^2 b(Z_s^\theta, \theta), dZ_s^\theta\rangle - \int_0^{2t/3} \langle b(Z_s^\theta, \theta), \partial_\theta^2 b(Z_s^\theta, \theta)\rangle\, ds\right)^2\right]} \\
&\quad + \frac{2t}{3}\, \| |\partial_\theta b(\cdot, \theta)|^2 \|_\infty \\
&= \sqrt{\mathbb{E}_y\left[\int_0^{2t/3} |\partial_\theta^2 b(Z_s^\theta, \theta)|^2\, ds\right]} + \frac{2t}{3}\, \| |\partial_\theta b(\cdot, \theta)|^2 \|_\infty \\
&\leq \sqrt{\frac{2t}{3}}\, \| |\partial_\theta^2 b(\cdot, \theta)| \|_\infty + \frac{2t}{3}\, \| |\partial_\theta b(\cdot, \theta)|^2 \|_\infty
\end{aligned} \tag{13}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_y[(R^\theta_{0,\,2t/3})^2] &= \mathbb{E}_y\left[\left(\int_0^{2t/3} \langle \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta), dZ_s^\theta\rangle - \int_0^{2t/3} \langle \partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta), b(Z_s^\theta, \theta)\rangle\, ds\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}_y\left[\int_0^{2t/3} |\partial_\theta b(Z_s^\theta, \theta)|^2\, ds\right] \\
&\leq \frac{2t}{3}\, \| |\partial_\theta b(\cdot, \theta)|^2 \|_\infty
\end{aligned} \tag{14}$$

Ainsi, en posant

$$K'_1 = \sup_{\theta \in N} \left(\max\left(\frac{4}{3}\, \| |\partial_\theta b(\cdot, \theta)|^2 \|_\infty ;\ \sqrt{\frac{2}{3}}\, \| |\partial_\theta^2 b(\cdot, \theta)| \|_\infty\right)\right),$$

on voit que

$$\forall \theta \in N, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall f \in C^0(V), \quad \| G_t^\theta(f) \|_\infty \leq K'_1 \| f \|_\infty (\sqrt{t} + t)$$

On peut alors appliquer le résultat ergodique (10), pour obtenir,

$$\begin{aligned}
|I^\theta_{2,t}(f)(x) + \mathbb{E}_{\mu_\theta}[G_t^\theta(f)(Z^\theta_{t/3})]| &= |I^\theta_{2,t}(f)(x) - \mu_\theta(G_t^\theta(f))| \\
&= |\mathbb{E}_x[G_t^\theta(f)(Z^\theta_{t/3}) - \mu_\theta(G_t^\theta(f))]| \\
&\leq K K'_1 \| f \|_\infty (\sqrt{t} + t)\, \mathrm{ex}\left(-\frac{\alpha}{3}\, t\right)
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat escompté pour $I^\theta_{2,t}(f)(x)$.

Etudions maintenant $I^\theta_{1,t}(f)(x)$. Notons que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[[S^\theta_{0,t/3} + (R^\theta_{0,t/3})^2 + 2R^\theta_{0,t/3} R^\theta_{t/3,t}]\mu_\theta(f)] &= \mu_\theta(f)\partial_\theta^2 P^\theta_{t/3}(1)(x) + 2\mu_\theta(f)\mathbb{E}_x[R^\theta_{0,t/3} R^\theta_{t/3,t}] \\
&= 2\mu_\theta(f)\mathbb{E}_x[R^\theta_{0,t/3}\mathbb{E}_{Z^\theta_{t/3}}[R^\theta_{0,\,2t/3}]] \\
&= 0
\end{aligned}$$

car on a déjà vu, dans la démonstration de la proposition 5, que pour tout $y \in V$ et tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}_y[R^\theta_{0,t}] = \partial_\theta P_t^\theta(1)(y) = 0 \tag{15}$$

ainsi,

$$\begin{aligned}
|I^\theta_{1,t}(f)(x)| &= |\mathbb{E}_x[[S^\theta_{0,t/3} + (R^\theta_{0,t/3})^2 + 2R^\theta_{0,t/3} R^\theta_{t/3,t}](f(Z_t^\theta) - \mu_\theta(f))]| \\
&\leq |\mathbb{E}_x[[S^\theta_{0,t/3} + (R^\theta_{0,t/3})^2](f(Z_t^\theta) - \mu_\theta(f))]| \\
&\quad + 2|\mathbb{E}_x[R^\theta_{0,t/3} R^\theta_{t/3,\,2t/3}(f(Z_t^\theta) - \mu_\theta(f))]| \\
&\quad + 2|\mathbb{E}_x[R^\theta_{0,t/3} R^\theta_{2t/3,t}(f(Z_t^\theta) - \mu_\theta(f))]| \\
&= |\mathbb{E}_x[[S^\theta_{0,t/3} + (R^\theta_{0,t/3})^2]\mathbb{E}_{Z^\theta_{t/3}}[(f(Z^\theta_{2t/3}) - \mu_\theta(f))]]| \\
&\quad + 2|\mathbb{E}_x[R^\theta_{0,t/3} R^\theta_{t/3,\,2t/3}\mathbb{E}_{Z^\theta_{2t/3}}[(f(Z^\theta_{t/3}) - \mu_\theta(f))]]| \\
&\quad + 2|\mathbb{E}_x[R^\theta_{0,t/3}\mathbb{E}_{Z^\theta_{t/3}}[\mathbb{E}_{Z^\theta_{t/3}}[R^\theta_{0,t/3}(f(Z^\theta_{t/3}) - \mu_\theta(f))]]]|
\end{aligned}$$

Mais, d'après (10), (13) et (14), les deux premiers termes du membre de droite sont majorés, respectivement, par

$$K'_2 \| f \|_\infty (\sqrt{t} + t) \exp\left(-\frac{2\alpha}{3}\, t\right)$$

et

$$K'_2 \| f \|_\infty t \exp\left(-\frac{\alpha}{3}\, t\right)$$

où $K'_2 \geq 0$ est une constante ne dépendant que de V et de b.

Cependant, il existe une autre constante $K'_3 \geq 0$, ne dépendant que de V et de b, telle que pour tout $y \in V$, tout $\theta \in N$, tout $t \geq 0$ et toute fonction $f \in C^0(V)$, on ait,

$$|\mathbb{E}_y[R^\theta_{0,t/3}(f(Z^\theta_{t/3}) - \mu_\theta(f))]| \leq K'_3 \| f \|_\infty \sqrt{t}$$

ainsi,

$$\begin{aligned}
&|\mathbb{E}_x[R^\theta_{0,t/3}\mathbb{E}_{Z^\theta_{t/3}}[\mathbb{E}_{Z^\theta_{t/3}}[R^\theta_{0,t/3}(f(Z^\theta_{t/3}) - \mu_\theta(f))]]]| \\
&\quad = \left| \mathbb{E}_x\left[R^\theta_{0,t/3}\mathbb{E}_{Z^\theta_{t/3}}\left[\mathbb{E}_{Z^\theta_{t/3}}[R^\theta_{0,t/3}(f(Z^\theta_{t/3}) - \mu_\theta(f))] \right.\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.\left. - \int \mu_\theta(dy)\mathbb{E}_y[R^\theta_{0,t/3}(f(Z^\theta_{t/3}) - \mu_0(f))] \right]\right]\right|
\end{aligned}$$

(en utilisant (15))

$$\begin{aligned}
&\leq \mathbb{E}_x[|R^\theta_{0,t/3}|]KK'_3 \| f \|_\infty \sqrt{t} \exp\left(-\frac{\alpha}{3} t \right) \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{3}} KK'_3 \| |\partial_\theta b(\cdot, \theta)| \|_\infty \| f \|_\infty t \exp\left(-\frac{\alpha}{3} t \right)
\end{aligned}$$

ce qui prouve qu'en prenant $K'_4 = 2K'_2 + (1/\sqrt{3})KK'_3 \sup_{\theta \in N} \| |\partial_\theta b(\cdot, \theta)| \|_\infty$, on a

$$|I^\theta_{1,t}(f)(x)| \leq K'_4 \| f \|_\infty (\sqrt{t} + t) \exp\left(-\frac{\alpha}{3} t \right)$$

En intégrant cette inégalité par rapport à $\mu_\theta(dx)$ (ce qui est bien permis, car la constante K'_4 est indépendante de $x \in V$), on obtient aussi

$$|\mathbb{E}_{\mu_\theta}[f(Z^\theta_t)[S^\theta_{0,t/3} + (R^\theta_{0,t/3})^2 + 2R^\theta_{0,t/3}R^\theta_{t/3,t}]]| \leq K'_4 \| f \|_\infty (\sqrt{t} + t) \exp\left(-\frac{\alpha}{3} t \right)$$

d'où une estimée du type de celle que l'on cherchait:

$$\begin{aligned}
&|I^\theta_{1,t}(f)(x) - \mathbb{E}_{\mu_\theta}[f(Z^\theta_t)[S^\theta_{0,t/3} + (R^\theta_{0,t/3})^2 + 2R^\theta_{0,t/3}R^\theta_{t/3,t}]]| \\
&\qquad \leq 2K'_4 \| f \|_\infty (\sqrt{t} + t) \exp\left(-\frac{\alpha}{3} t \right)
\end{aligned}$$

En résumé, on a donc prouvé la convergence exponentielle annoncée;

$\forall x \in V, \quad \forall \theta \in N, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall f \in C^0(V),$

$$|\partial^2_\theta P^\theta_t(f)(x) - \mathbb{E}_{\mu_\theta}[f(Z^\theta_t)[S^\theta_{0,t} + (R^\theta_{0,t})^2]]| \leq K'_5 \| f \|_\infty (\sqrt{t} + t) \exp\left(-\frac{\alpha}{3} t \right)$$

où $K'_5 = 2K'_4 + KK'_1$.

Pour pouvoir continuer, il faut retourner le temps. Il est immédiat, d'après les calculs présentés dans la démonstration de la proposition 5, que par cette opération, l'expression

$$\mathbb{E}_{\mu_\theta}[f(Z^\theta_t)[S^\theta_{0,t} + (R^\theta_{0,t})^2]]$$

se transforme en

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mu_\theta}\left[f(\tilde{Z}^\theta_0)\left[-\int_0^t \langle \partial^2_\theta b(\tilde{Z}^\theta_s, \theta), d\tilde{Z}^\theta_s \rangle - \int_0^t \operatorname{div}(\partial^2_\theta b(\cdot, \theta))(\tilde{Z}^\theta_s)\, ds \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. - \int_0^t \langle b(\tilde{Z}^\theta_s, \theta), \partial^2_\theta b(\tilde{Z}^\theta_s, \theta) \rangle\, ds - \int_0^t |\partial_\theta b(\tilde{Z}^\theta_s, \theta)|^2\, ds \right]\right] \\
&\qquad + \mathbb{E}_{\mu_\theta}\left[f(\tilde{Z}^\theta_t)\left[-\int_0^t \langle \partial_\theta b(\tilde{Z}^\theta_s, \theta), d\tilde{Z}^\theta_s \rangle - \int_0^t \operatorname{div}(\partial_\theta b(\cdot, \theta))(\tilde{Z}^\theta_s)\, ds \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. - \int_0^t \langle b(\tilde{Z}^\theta_s, \theta), \partial_\theta b(\tilde{Z}^\theta_s, \theta) \rangle\, ds \right]^2\right] \\
&\quad = \int \mu_\theta(dy) f(y)\mathbb{E}_y[\tilde{S}^\theta_t] + \int \mu_\theta(dy) f(y)\mathbb{E}_y[(\tilde{R}^\theta_t)^2]
\end{aligned}$$

où on a posé, pour tout $t \geq 0$,

$$\tilde{R}^\theta_t = \int_0^t \langle \partial_\theta b(\tilde{Z}^\theta_s, \theta), d\tilde{Z}^\theta_s \rangle + \int_0^t \operatorname{div}(\partial_\theta b(\cdot, \theta))(\tilde{Z}^\theta_s)\, ds + \int_0^t \langle b(\tilde{Z}^\theta_s, \theta), \partial_\theta b(\tilde{Z}^\theta_s, \theta) \rangle\, ds$$

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^\theta_t = &-\int_0^t \langle \partial^2_\theta b(\tilde{Z}^\theta_s, \theta), d\tilde{Z}^\theta_s \rangle - \int_0^t \operatorname{div}(\partial^2_\theta b(\cdot, \theta))(\tilde{Z}^\theta_s)\, ds \\
&- \int_0^t \langle b(\tilde{Z}^\theta_s, \theta), \partial^2_\theta b(\tilde{Z}^\theta_s, \theta) \rangle\, ds - \int_0^t |\partial_\theta b(\tilde{Z}^\theta_s, \theta)|^2\, ds
\end{aligned}$$

Rappelons que $(\tilde{Z}^\theta_s)_{s \geq 0}$ est une diffusion décrite heuristiquement par

$$d\tilde{Z}^\theta_s = dB_s + (\nabla \ln(\mu_\theta)(\tilde{Z}^\theta_s) - b(\tilde{Z}^\theta_s, \theta))\, ds$$

ainsi, pour tout $y \in V$,

$$\mathbb{E}_y\left[\int_0^t \langle \partial^2_\theta b(\tilde{Z}^\theta_s, \theta), d\tilde{Z}^\theta_s \rangle - \int_0^t \langle \partial^2_\theta b(\tilde{Z}^\theta_s, \theta), \nabla \ln(\mu_\theta)(\tilde{Z}^\theta_s) - b(\tilde{Z}^\theta_s, \theta) \rangle\, ds \right] = 0$$

c'est-à-dire,

$$\mathbb{E}_y[\tilde{S}_t^\theta] = \mathbb{E}_y\left[\int_0^t h_\theta(\tilde{Z}_s^\theta)\, ds\right]$$

où pour $z \in V$,

$$h_\theta(z) = -\langle \partial_\theta^2 b(z, \theta), \nabla \ln(\mu_\theta)(z)\rangle - \operatorname{div}(\partial_\theta^2 b(\cdot, \theta))(z) - |\partial_\theta b(z, \theta)|^2$$

Intéressons-nous maintenant au terme $\mathbb{E}_y[(\tilde{R}_t^\theta)^2]$, et convenons de noter, pour $t \geq 0$,

$$M_t^\theta = \int_0^t \langle \partial_\theta b(\tilde{Z}_s^\theta, \theta), d\tilde{Z}_s^\theta\rangle - \int_0^t \langle \partial_\theta b(\tilde{Z}_s^\theta, \theta), \nabla \ln(\mu_\theta)(\tilde{Z}_s^\theta) - b(\tilde{Z}_s^\theta, \theta)\rangle\, ds$$

$$N_t^\theta = -\int_0^t G_\theta(\tilde{Z}_s^\theta)\, ds$$

où rappelons que, pour tout $z \in V$,

$$G_\theta(z) = -\operatorname{div}(\partial_\theta b(\cdot, \theta))(z) - \langle \nabla \ln(\mu_\theta)(z), \partial_\theta b(z, \theta)\rangle$$

On a alors $\tilde{R}_t^\theta = M_t^\theta + N_t^\theta$.

Mais il est facile de voir, en réutilisant la formule de Girsanov, que $(M_t^\theta)_{t\geq 0}$ est une martingale (dans la filtration naturelle engendrée par le processus $(\tilde{Z}_t^\theta)_{t\geq 0}$), dont le processus croissant associé est

$$\langle M^\theta\rangle_t = \int_0^t |\partial_\theta b(\tilde{Z}_s^\theta, \theta)|^2\, ds$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_y[(\tilde{R}_t^\theta)^2] &= \mathbb{E}_y[(M_t^\theta)^2] + \mathbb{E}_y[(N_t^\theta)^2] + 2\mathbb{E}_y[M_t^\theta N_t^\theta]\\ &= \int_0^t \mathbb{E}_y[|\partial_\theta b(\tilde{Z}_s^\theta, \theta)|^2]\, ds + \mathbb{E}_y[(N_t^\theta)^2] + 2\mathbb{E}_y[M_t^\theta N_t^\theta] \qquad (16)\end{aligned}$$

Pour calculer le dernier terme du membre de droite ci-dessus, notons que l'application $\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\cdot)$ $(= \partial_\theta \ln(\mu_\theta)(\cdot)$, d'après la proposition 5) est de classe C^∞, car elle satisfait l'équation aux dérivées partielles elliptique

$$\tilde{L}_\theta(\tilde{A}^\theta(G_\theta)) = -G_\theta$$

dont les coefficients appartiennent à $C^\infty(V)$.

De plus, on peut voir (*cf.* les théorèmes 3.9, p. 32 et 6.5, p. 65 de [1], que l'on applique d'abord aux densités μ_θ, en utilisant les inégalités de Harnack qu'elles satisfont) qu'il existe une constante $K_6' \geq 0$, ne dépendant que de V et de b, telle que pour tout $\theta \in N$,

$$\|\,|\nabla \tilde{A}^\theta(G_\theta)|\,\|_\infty \leq K_6' \qquad (17)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_y[M_t^\theta N_t^\theta] &= -\mathbb{E}_y\left[M_t^\theta \int_0^t G_\theta(\tilde{Z}_s^\theta)\, ds\right]\\ &= \mathbb{E}_y\left[M_t^\theta \int_0^t \tilde{L}_\theta(\tilde{A}^\theta(G_\theta))(\tilde{Z}_s^\theta)\, ds\right]\end{aligned}$$

Cependant, la formule d'Itô affirme que

$$\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}_t^\theta) = \tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}_0^\theta) + \tilde{M}_t^\theta + \int_0^t \tilde{L}_\theta(\tilde{A}^\theta(G_\theta))(\tilde{Z}_s^\theta)\, ds$$

où $(\tilde{M}_t^\theta)_{t\geq 0}$ est la martingale

$$\tilde{M}_t^\theta = \int_0^t \langle \nabla \tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}_s^\theta), d\tilde{Z}_s^\theta\rangle - \int_0^t \langle \nabla \tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}_s^\theta), \nabla \ln(\mu_\theta)(\tilde{Z}_s^\theta) - b(\tilde{Z}_s^\theta, \theta)\rangle\, ds$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_y[M_t^\theta N_t^\theta] &= \mathbb{E}_y[M_t^\theta \tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}_t^\theta)] - \tilde{A}^\theta(G_\theta)(y)\mathbb{E}_y[M_t^\theta] - \mathbb{E}_y[M_t^\theta \tilde{M}_t^\theta]\\ &= \mathbb{E}_y[M_t^\theta \tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}_t^\theta)] - \mathbb{E}_y\left[\int_0^t \langle \partial_\theta b(\tilde{Z}_s^\theta, \theta), \nabla \tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}_s^\theta)\rangle\, ds\right]\end{aligned}$$

car $(M_t^\theta)_{t\geq 0}$ est une martingale issue de 0, dont le crochet avec $(\tilde{M}_t^\theta)_{t\geq 0}$ est donné par

$$\langle M^\theta, \tilde{M}^\theta\rangle_t = \int_0^t \langle \partial_\theta b(\tilde{Z}_s^\theta, \theta), \nabla \tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}_s^\theta)\rangle\, ds$$

Calculons à présent le second terme du membre de droite de (16),

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_y[(N_t^\theta)^2] &= 2\mathbb{E}_y\left[\int_0^t N_s^\theta\, dN_s^\theta\right] \\
&= 2\mathbb{E}_y\left[\int_0^t ds \int_0^s du G_\theta(\tilde{Z}_u^\theta) G_\theta(\tilde{Z}_s^\theta)\right] \\
&= 2\int_0^t du \mathbb{E}_y\left[G_\theta(\tilde{Z}_u^\theta)\int_u^t ds\, G_\theta(\tilde{Z}_s^\theta)\right] \\
&= 2\int_0^t du\, \mathbb{E}_y\left[G_\theta(\tilde{Z}_u^\theta)\mathbb{E}_{\tilde{Z}_u^\theta}\left[\int_0^{t-u} ds\, G_\theta(\tilde{Z}_s^\theta)\right]\right]
\end{aligned}
$$

Cependant, puisque $\mu_\theta(G_\theta)=0$, on a, pour tout $z\in V$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_z\left[\int_0^{t-u} G_\theta(\tilde{Z}_s^\theta)\, ds\right] &= \mathbb{E}_z\left[\int_0^{\infty} G_\theta(\tilde{Z}_s^\theta)\, ds\right] - \mathbb{E}_z\left[\int_{t-u}^{\infty} G_\theta(\tilde{Z}_s^\theta)\, ds\right] \\
&= \tilde{A}^\theta(G_\theta)(z) - \mathbb{E}_z\left[\mathbb{E}_{\tilde{Z}_{t-u}^\theta}\left[\int_0^{\infty} G_\theta(\tilde{Z}_s^\theta)\, ds\right]\right] \\
&= \tilde{A}^\theta(G_\theta)(z) - \mathbb{E}_z[\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}_{t-u}^\theta)]
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_y[(N_t^\theta)^2] &= 2\int_0^t du\, \mathbb{E}_y[G_\theta(\tilde{Z}_u^\theta)\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}_u^\theta)] - 2\int_0^t du\, \mathbb{E}_y[G_\theta(\tilde{Z}_u^\theta)\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}_t^\theta)] \\
&= 2\int_0^t du\, \mathbb{E}_y[G_\theta(\tilde{Z}_u^\theta)\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}_u^\theta)] + 2\mathbb{E}_y[N_t^\theta\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}_t^\theta)]
\end{aligned}
$$

En résumé, on a donc montré que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_y[\tilde{S}_t^\theta + (\tilde{R}_t^\theta)^2] = \int_0^t &\mathbb{E}_y[h_\theta(\tilde{Z}_s^\theta) + |\partial_\theta b(\tilde{Z}_s^\theta, \theta)|^2 - 2\langle\partial_\theta b(\tilde{Z}_s^\theta, \theta), \nabla\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}_s^\theta)\rangle \\
&+ 2G_\theta(\tilde{Z}_s^\theta)A^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}_s^\theta)]\, ds \\
&+ 2\mathbb{E}_y[M_t^\theta\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}_t^\theta)] + 2\mathbb{E}_y[N_t^\theta\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}_t^\theta)] \\
= \int_0^t &\mathbb{E}_y[H_\theta(\tilde{Z}_s^\theta)]\, ds + 2\mathbb{E}_y[\tilde{R}_t^\theta\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}_t^\theta)]
\end{aligned}
$$

où on a posé, pour tout $z\in V$,

$$
\begin{aligned}
H_\theta(z) &= -\langle\partial_\theta^2 b(z,\theta), \nabla\ln(\mu_\theta)(z)\rangle - \operatorname{div}(\partial_\theta^2 b(\cdot,\theta))(z) - 2\langle\partial_\theta b(z,\theta), \nabla\tilde{A}^\theta(G_\theta)(z)\rangle \\
&\quad + 2G_\theta(z)\tilde{A}^\theta(G_\theta)(z) \\
&= -\frac{1}{\mu_\theta(z)}\operatorname{div}(\mu_\theta\partial_\theta^2 b(\cdot,\theta))(z) - \frac{2}{\mu_\theta(z)}\operatorname{div}(\mu_\theta\tilde{A}^\theta(G_\theta)\partial_\theta b(\cdot,\theta))(z)
\end{aligned}
$$

Il est clair sur cette expression que

$$\mu_\theta(H_\theta) = 0$$

D'autre part, notamment d'après (17), il existe une constante $K'_7\geq 0$, ne dépendant que de V et de b, telle que pour tout $\theta\in N$,

$$\|H_\theta\|_\infty \leq K'_7$$

On utilise alors à nouveau (11), pour voir, que pour tout $y\in V$,

$$\left|\int_0^t \mathbb{E}_y[H_\theta(\tilde{Z}_s^\theta)]\, ds - \tilde{A}^\theta(H_\theta)(y)\right| \leq \frac{K}{\alpha}K'_7\exp(-\alpha t)$$

Quant au terme $\mathbb{E}_y[\tilde{R}_t^\theta\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}_t^\theta)]$, il se rapproche exponentiellement vite de

$$\mathbb{E}_{\mu_\theta}[\tilde{R}_t^\theta\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}_t^\theta)]$$

En effet, décomposons le, comme d'habitude, en

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_y[\tilde{R}_t^\theta\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}_t^\theta)] &= \mathbb{E}_y[\tilde{R}_{t/2}^\theta\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}_t^\theta)] + \mathbb{E}_y[(\tilde{R}_t^\theta - \tilde{R}_{t/2}^\theta)\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}_t^\theta)] \\
&= \mathbb{E}_y[\tilde{R}_{t/2}^\theta\mathbb{E}_{\tilde{Z}_{t/2}^\theta}[\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}_{t/2}^\theta)]] + \mathbb{E}_y[\mathbb{E}_{\tilde{Z}_{t/2}^\theta}[\tilde{R}_{t/2}^\theta\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}_{t/2}^\theta)]]
\end{aligned}
$$

Or, pour tout $z\in V$,

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{E}_z[\tilde{R}_{t/2}^\theta\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}_{t/2}^\theta)]| &\leq \|\tilde{A}^\theta(G_\theta)\|_\infty\mathbb{E}_z[|\tilde{R}_{t/2}^\theta|] \\
&\leq \|\tilde{A}^\theta(G_\theta)\|_\infty(\mathbb{E}_z[|M_{t/2}^\theta|] + \mathbb{E}_z[|N_{t/2}^\theta|]) \\
&\leq \|\tilde{A}^\theta(G_\theta)\|_\infty\left[\||\partial_\theta b(\cdot,\theta)|\|_\infty\sqrt{\frac{t}{2}} + \|G_\theta\|_\infty\frac{t}{2}\right]
\end{aligned}
$$

et on a donc, pour tout $y\in V$,

$$
\begin{aligned}
&|\mathbb{E}_y[\mathbb{E}_{\tilde{Z}_{t/2}^\theta}[\tilde{R}_{t/2}^\theta\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}_{t/2}^\theta)]] - \mathbb{E}_{\mu_\theta}[\mathbb{E}_{\tilde{Z}_{t/2}^\theta}[\tilde{R}_{t/2}^\theta[\tilde{R}_{t/2}^\theta\tilde{A}^\theta(G_\theta(\tilde{Z}_{t/2}^\theta)]]]| \\
&\quad = \left|\mathbb{E}_y\left[\mathbb{E}_{\tilde{Z}_{t/2}^\theta}[\tilde{R}_{t/2}^\theta\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}_{t/2}^\theta)] - \int\mu_\theta(dz)\mathbb{E}_z[\tilde{R}_{t/2}^\theta\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}_{t/2}^\theta)]\right]\right| \\
&\quad \leq K\|\tilde{A}^\theta(G_\theta)\|_\infty\left[\||\partial_\theta b(\cdot,\theta)|\|_\infty\sqrt{\frac{t}{2}} + \|G_\theta\|_\infty\frac{t}{2}\right]\exp\left(-\frac{\alpha}{2}t\right)
\end{aligned}
$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
&|\mathbb{E}_y[\tilde{R}^\theta_{t/2}\mathbb{E}_{\tilde{Z}^\theta_{t/2}}[\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}^\theta_{t/2}) - \mu_\theta(\tilde{A}^\theta(G_\theta))]]| \\
&\quad \leq \mathbb{E}_y[|\tilde{R}^\theta_{t/2}|] \sup_{z\in V} |\mathbb{E}_z[\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}^\theta_{t/2}) - \mu_\theta(\tilde{A}^\theta(G_\theta))]| \\
&\quad \leq K\left[\| |\partial_\theta b(\cdot,\theta)| \|_\infty \sqrt{\frac{t}{2}} + \|G_\theta\|_\infty \frac{t}{2}\right] \|\tilde{A}^\theta(G_\theta)\|_\infty \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t\right)
\end{aligned}$$

Cependant,

$$\begin{aligned}
\mu_\theta(\tilde{A}^\theta(G_\theta)) &= \int \mu_\theta(dy)\int_0^\infty \mathbb{E}_y[G_\theta(\tilde{Z}^\theta_t)]\,dt \\
&= \int_0^\infty \mathbb{E}_{\mu_\theta}[G_\theta(\tilde{Z}^\theta_t)]\,dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

et on a donc, pour tout $y \in V$,

$$|\mathbb{E}_y[\tilde{R}^\theta_{t/2}\mathbb{E}_{\tilde{Z}^\theta_{t/2}}[\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}^\theta_{t/2})]]| \leq K\|\tilde{A}^\theta(G_\theta)\|_\infty\left[\| |\partial_\theta b(\cdot,\theta)| \|_\infty \sqrt{\frac{t}{2}} + \|G_\theta\|_\infty \frac{t}{2}\right]\exp\left(-\frac{\alpha}{2}t\right)$$

puis,

$$\begin{aligned}
&|\mathbb{E}_y[\tilde{R}^\theta_{t/2}\mathbb{E}_{\tilde{Z}^\theta_{t/2}}[\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}^\theta_{t/2})]] - \mathbb{E}_{\mu_\theta}[\tilde{R}^\theta_{t/2}\mathbb{E}_{\tilde{Z}^\theta_{t/2}}[\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}^\theta_{t/2})]]| \\
&\quad \leq 2K\|\tilde{A}^\theta(G_\theta)\|_\infty\left[\| |\partial_\theta b(\cdot,\theta)| \|_\infty \sqrt{\frac{t}{2}} + \|G_\theta\|_\infty \frac{t}{2}\right]\exp\left(-\frac{\alpha}{2}t\right)
\end{aligned}$$

On a ainsi obtenu le résultat que l'on annonçait; il existe une constante $K'_8 \geq 0$ ne dépendant que de V et de b, telle que

$$|\mathbb{E}_y[\tilde{R}^\theta_t\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}^\theta_t)] - \mathbb{E}_{\mu_\theta}[\tilde{R}^\theta_t\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}^\theta_t)]| \leq K'_8(\sqrt{t}+t)\exp\left(-\frac{\alpha}{2}t\right)$$

Mais, du fait que μ_θ est la probabilité invariante pour la diffusion $(\tilde{Z}^\theta_t)_{t\geq 0}$, on peut

calculer $\mathbb{E}_{\mu_\theta}[\tilde{R}^\theta_t\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}^\theta_t)]$ par retournement du temps. On obtient:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mu_\theta}[\tilde{R}^\theta_t\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}^\theta_t)] &= \mathbb{E}_{\mu_\theta}\left[\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}^\theta_0)\left(-\int_0^t \langle\partial_\theta b(Z^\theta_s,\theta), dZ^\theta_s\rangle\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \int_0^t \langle\partial_\theta b(Z^\theta_s,\theta), b(Z^\theta_s,\theta)\rangle\,ds\right)\right] \\
&= -\mathbb{E}_{\mu_\theta}[\tilde{A}^\theta(G_\theta)(\tilde{Z}^\theta_0)R^\theta_{0,t}] \\
&= -\int \mu_\theta(dy)\tilde{A}^\theta(G_\theta)(y)\mathbb{E}_y[R^\theta_{0,t}] \\
&= 0
\end{aligned}$$

d'après (15).

En regroupant tous les résultats précédents, il apparaît donc qu'il existe une constante $K'_9 \geq 0$, ne dépendant que de V et de b, telle que

$$\left|\partial^2_\theta P^\theta_t(f)(x) - \int \mu_\theta(dy)f(y)\tilde{A}^\theta(H_\theta)(y)\right| \leq K'_9(\sqrt{t}+t)\exp\left(-\frac{\alpha}{3}t\right)$$

On utilise alors le lemme 4, et la discussion le précédant, pour voir que pour tout $y \in V$ fixé, $\mu_\theta(y)$ est deux fois continûment dérivable en $\theta \in N$, sa dérivée seconde étant donnée par

$$\partial^2_\theta\mu_\theta(y) = \mu_\theta(y)\tilde{A}^\theta(H_\theta)(y)$$

Ainsi, l'inégalité précédente se réécrit

$$|\partial^2_\theta P^\theta_t(f)(x) - \partial^2_\theta\mu_\theta(f)| \leq K(\sqrt{t}+t)\exp\left(-\frac{\alpha}{3}t\right)$$

ce qui permet de voir, comme dans la discussion précédant la proposition 6, que pour un $x \in V$ fixé, $A^\theta(f)(x)$ est aussi deux fois continûment dérivable en $\theta \in N$, que sa dérivée seconde est donnée par

$$\partial^2_\theta A^\theta(f)(x) = \int_0^\infty (\partial^2_\theta P^\theta_t(f)(x) - \mu_\theta(f\tilde{A}^\theta(H_\theta)))\,dt$$

et qu'il existe donc une constante $K'_{10} \geq 0$, ne dépendant que de V et de b, telle que

$$\|\partial^2_\theta A^\theta(f)\|_\infty \leq K'_{10}\|f\|_\infty \tag{18}$$

La fin de la proposition s'en déduit aisément:

Considérons $f \in C^{0,2}(V \times N)$. Du fait que A^θ est un opérateur borné dans $C^0(V)$, et que pour un $\theta \in N$ fixé, on a, par la formule de Rolle et l'uniforme continuité de $\partial_\theta f$ sur $V \times N$,

$$\lim_{h \to 0} \|h^{-1}[f(\cdot, \theta + h) - f(\cdot, \theta)] - \partial_\theta f(\cdot, \theta)\|_\infty = 0$$

on obtient facilement que:

$$\partial_\theta(A^\theta(f(\cdot, \theta))) = (\partial_\theta A^\theta)(f(\cdot, \theta)) + A^\theta(\partial_\theta f(\cdot, \theta))$$

Puis, par des arguments similaires (en remarquant que $\partial_\theta A^\theta$ est aussi un opérateur borné dans $C^0(V)$, d'après la proposition 6), on voit que

$$\partial_\theta^2(A^\theta(f(\cdot, \theta))) = (\partial_\theta^2 A^\theta)(f(\cdot, \theta)) + 2(\partial_\theta A^\theta)(\partial_\theta f(\cdot, \theta)) + A^\theta(\partial_\theta^2 f(\cdot, \theta))$$

L'estimée annoncée provient alors de la bornitude, uniforme en θ, des opérateurs A^θ, $\partial_\theta A^\theta$ et $\partial_\theta^2 A^\theta$ (pour ce dernier, ce résultat découle de l'inégalité (18) ci-dessus). ■

Dans les propositions précédentes, le paramètre se trouvait uniquement dans la dérive de la diffusion, mais ultérieurement, on aura besoin de savoir dériver des probabilités invariantes par rapport à un paramètre qui apparaît également dans le terme de diffusion du générateur. Plus précisément, revenons à la situation étudiée dans la section précédente, dont on reprend les notations. On aimerait bien dériver $\mu_{\gamma,\beta}$ par rapport à $\gamma \in]0, 1[$.

Pour $0 < \gamma \le 1$ et $\beta \ge 0$, notons $A^{\gamma,\beta}$ le potentiel associé au semi-groupe engendré par la diffusion (X, Θ) définie heuristiquement par (2). Considérons aussi une diffusion $(\tilde{X}, \tilde{\Theta})$ sur $V \times N$, dont l'évolution est décrite heuristiquement par

$$\begin{cases} d\tilde{X}_t = dB_t + (\nabla_1 \ln(\mu_{\gamma,\beta}) - b_1)(\tilde{X}_t, \tilde{\Theta}_t)\, dt \\ d\tilde{\Theta}_t = \gamma^{1/2}\, dW_t + \gamma(\nabla_2 \ln(\mu_{\gamma,\beta}) - \beta b_2)(\tilde{X}_t, \tilde{\Theta}_t)\, dt \end{cases}$$

où (B, W) est un mouvement brownien sur $V \times N$. Au semi-groupe engendré par cette diffusion, on associe le potentiel $\tilde{A}^{\gamma,\beta}$.

On a alors le résultat suivant:

Proposition 8 *Pour tout $(x, \theta) \in V \times N$ et $\beta \ge 0$ fixés, l'application*

$$]0, 1[\ni \gamma \mapsto \mu_{\gamma,\beta}(x, \theta)$$

est dérivable et de dérivée

$$\frac{\partial}{\partial\gamma} \mu_{\gamma,\beta}(x, \theta) = \mu_{\gamma,\beta}(x, \theta)\tilde{A}^{\gamma,\beta}\Big(\frac{1}{2}\Delta_2 u_{\gamma,\beta} + \frac{1}{2}|\nabla_2 u_{\gamma,\beta}|_2^2 - \beta\langle b_2, \nabla_2 u_{\gamma,\beta}\rangle_2 - \beta\, \mathrm{div}_2(b_2)\Big)(x, \theta)$$

Démonstration D'après la discussion précédent le lemme 4, il suffit de montrer que pour tout $\phi \in C^\infty(V \times N)$, l'application $]0, 1[\ni \gamma \mapsto \mu_{\gamma,\beta}(\phi)$ est dérivable en γ et de dérivée

$$\frac{\partial}{\partial\gamma} \mu_{\gamma,\beta}(\phi) = \int \tilde{A}^{\gamma,\beta}\Big(\frac{1}{2}\Delta_2 u_{\gamma,\beta} + \frac{1}{2}|\nabla_2 u_{\gamma,\beta}|_2^2 - \beta\langle b_2, \nabla_2 u_{\gamma,\beta}\rangle_2 - \beta\, \mathrm{div}_2(b_2)\Big)\phi\, d\mu_{\gamma,\beta}$$

Soient $0 < \gamma < 1$ et $\beta \ge 0$ fixés. On note $g_{\gamma,\beta}$ l'application

$$\begin{aligned} g_{\gamma,\beta} &= \frac{1}{2}\Delta_2 \mu_{\gamma,\beta} - \beta\langle b_2, \nabla_2 \mu_{\gamma,\beta}\rangle_2 - \beta\, \mathrm{div}_2(b_2)\mu_{\gamma,\beta} \\ &= \Big(\frac{1}{2}\Delta_2 u_{\gamma,\beta} + \frac{1}{2}|\nabla_2 u_{\gamma,\beta}|_2^2 - \beta\langle b_2, \nabla_2 u_{\gamma,\beta}\rangle_2 - \beta\, \mathrm{div}_2(b_2)\Big)\mu_{\gamma,\beta} \end{aligned}$$

On a, pour tout $h \in \mathbb{R}$ suffisamment petit et tout $(x, \theta) \in V \times N$,

$$\begin{aligned} &L^*_{\gamma,\beta}(\mu_{\gamma+h,\beta} - \mu_{\gamma,\beta})(x, \theta) \\ &= L^*_{\gamma,\beta}(\mu_{\gamma+h,\beta})(x, \theta) \\ &= (L^*_{\gamma,\beta} - L^*_{\gamma+h,\beta})(\mu_{\gamma+h,\beta})(x, \theta) \\ &= -h\Big[\frac{1}{2}\Delta_2 \mu_{\gamma+h,\beta} - \beta\langle b_2, \nabla_2 \mu_{\gamma+h,\beta}\rangle_2 - \beta\, \mathrm{div}_2(b_2)\mu_{\gamma+h,\beta}\Big](x, \theta) \\ &= -h g_{\gamma+h,\beta}(x, \theta) \end{aligned}$$

Soit $\phi \in C^\infty(V \times N)$. On multiplie l'égalité précédente par $A^{\gamma,\beta}(\phi)(x, \theta)$ et on l'intègre par rapport à $\lambda_1 \otimes \lambda_2(dx, d\theta)$, pour obtenir,

$$\int A^{\gamma,\beta}(\phi) L^*_{\gamma,\beta}(\mu_{\gamma+h,\beta} - \mu_{\gamma,\beta})\, d(\lambda_1 \otimes \lambda_2) = -h \int A^{\gamma,\beta}(\phi) g_{\gamma+h,\beta}\, d(\lambda_1 \otimes \lambda_2) \quad (19)$$

Cependant, $A^{\gamma,\beta}(\phi) \in C^\infty(V \times N)$, car elle est solution d'une edp. elliptique dont les coefficients sont de classe C^∞. Ainsi, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}\int A^{\gamma,\beta}(\phi)L^*_{\gamma,\beta}(\mu_{\gamma+h,\beta}-\mu_{\gamma,\beta})\,d(\lambda_1\otimes\lambda_2) &= \int L_{\gamma,\beta}(A^{\gamma,\beta}(\phi))(\mu_{\gamma+h,\beta}-\mu_{\gamma,\beta})\,d(\lambda_1\otimes\lambda_2)\\ &= -\int \phi(\mu_{\gamma+h,\beta}-\mu_{\gamma,\beta})\,d(\lambda_1\otimes\lambda_2)\\ &= -\mu_{\gamma+h,\beta}(\phi)+\mu_{\gamma,\beta}(\phi)\end{aligned}$$

et on obtient donc, que pour tout $\phi\in C^\infty(V\times N)$,

$$\mu_{\gamma+h,\beta}(\phi)-\mu_{\gamma,\beta}(\phi) = h\int A^{\gamma,\beta}(\phi)g_{\gamma+h,\beta}\,d(\lambda_1\otimes\lambda_2) \tag{20}$$

Notons que d'après la proposition 2, il existe une constante $K\geq 0$, telle pour tout $0<\gamma<1$, tout $\beta\geq 0$ et tout h satisfaisant $2^{-1}\gamma\leq h+\gamma\leq 1$, on ait

$$\left\|\frac{1}{2}\Delta_2 u_{\gamma+h,\beta}+\frac{1}{2}|\nabla_2 u_{\gamma+h,\beta}|_2^2-\beta\langle b_2,\nabla_2 u_{\gamma+h,\beta}\rangle_2-\beta\operatorname{div}_2(b_2)\right\|_\infty\leq K[\gamma^{-1}+\beta^2] \tag{21}$$

D'autre part, en s'inspirant de la démonstration du corollaire 3, il est facile de voir qu'il existe une autre constante $K\geq 0$, telle que pour tout $0<\gamma\leq 1$ et tout $\beta\geq 0$, on ait

$$\forall(x,\theta)\in V\times N,\quad \exp(-K[\gamma^{-1/2}+\beta])\leq \mu_{\gamma,\beta}(x,\theta)\leq\exp(K[\gamma^{-1/2}+\beta])$$

et on déduit de ce résultat, des deux premières estimées de la proposition 2 et de la remarque de la fin de la section 5, qu'en tant qu'opérateurs sur l'espace de Banach $C^0(V\times N)$, $A^{\gamma,\beta}$ et $\tilde{A}^{\gamma,\beta}$ sont bornés par

$$\begin{aligned}&\|\!|A^{\gamma,\beta}|\!\|\leq\exp(K[\gamma^{-1/2}+\beta])\\ &\|\!|\tilde{A}^{\gamma,\beta}|\!\|\leq\exp(K[\gamma^{-1/2}+\beta])\end{aligned} \tag{22}$$

pour une certaine constante $K\geq 0$.

Le terme de droite de (20) est donc borné, pour une constante $K\geq 0$, par

$$|h|(\gamma^{-1}+\beta^2)\exp(K[1+\gamma^{-1/2}+\beta])\|\phi\|_\infty$$

ce qui prouve déjà qu'en notant $\|\cdot\|$ la variation totale d'une mesure signée sur $V\times N$,

on a

$$\lim_{h\to 0}\|\mu_{\gamma+h,\beta}-\mu_{\gamma,\beta}\|=0$$

Pour $h\neq 0$ et $\phi\in C^\infty(V\times N)$, l'équation (20) s'écrit aussi, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}\frac{\mu_{\gamma+h,\beta}(\phi)-\mu_{\gamma,\beta}(\phi)}{h} &= \int A^{\gamma,\beta}(\phi)g_{\gamma+h,\beta}\,d(\lambda_1\otimes\lambda_2)\\ &= \int\left(\frac{1}{2}\Delta_2 A^{\gamma,\beta}(\phi)+\beta\langle b_2,\nabla_2 A^{\gamma,\beta}(\phi)\rangle_2\right)d\mu_{\gamma+h,\beta}\end{aligned}$$

Mais en reprenant le résultat de convergence des $\mu_{\gamma+h,\beta}$ obtenu précédemment, on voit que le terme de droite tend, quand h tend vers 0, vers

$$\int\left(\frac{1}{2}\Delta_2 A^{\gamma,\beta}(\phi)+\beta\langle b_2,\nabla_2 A^{\gamma,\beta}(\phi)\rangle_2\right)d\mu_{\gamma,\beta}=\int A^{\gamma,\beta}(\phi)g_{\gamma,\beta}\,d(\lambda_1\otimes\lambda_2)$$

ce qui prouve que l'application $]0,1[\ni\gamma\mapsto u_{\gamma,\beta}(\phi)$ est dérivable, sa dérivée valant l'expression ci-dessus.

Pour calculer cette dernière, remarquons que pour tout ϕ, $\varphi\in C^0(V\times N)$,

$$\int\phi A^{\gamma,\beta}(\varphi)\,d\mu_{\gamma,\beta}=\int\varphi\tilde{A}^{\gamma,\beta}(\phi)\,d\mu_{\gamma,\beta}$$

En effet,

$$\begin{aligned}\int\phi A^{\gamma,\beta}(\varphi)\,d\mu_{\gamma,\beta} &= \int\mu_{\gamma,\beta}(dx,d\theta)\phi(x,\theta)\int_0^\infty\mathbb{E}_{(x,\theta)}[\varphi(X_t,\Theta_t)-\mu_{\gamma,\beta}(\varphi)]\,dt\\ &= \int_0^\infty\mathbb{E}_{\mu_{\gamma,\beta}}[\phi(X_0,\Theta_0)\varphi(X_t,\Theta_t)-\mu_{\gamma,\beta}(\varphi)\mu_{\gamma,\beta}(\varphi)]\,dt\\ &= \int_0^\infty\mathbb{E}_{\mu_{\gamma,\beta}}[\phi(\tilde{X}_t,\tilde{\Theta}_t)\varphi(\tilde{X}_0,\tilde{\Theta}_0)-\mu_{\gamma,\beta}(\phi)\mu_{\gamma,\beta}(\varphi)]\,dt\end{aligned}$$

(par retournement du temps, du fait que $\mu_{\gamma,\beta}$ est la probabilité invariante pour la diffusion (X,Θ))

$$\begin{aligned}&= \int\mu_{\gamma,\beta}(dx,d\theta)\varphi(x,\theta)\int_0^\infty\mathbb{E}_{(x,\theta)}[\phi(\tilde{X}_t,\tilde{\Theta}_t)-\mu_{\gamma,\beta}(\phi)]\,dt\\ &= \int\varphi\tilde{A}^{\gamma,\beta}(\phi)\,d\mu_{\gamma,\beta}\end{aligned}$$

On en déduit le résultat annoncé:

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}\mu_{\gamma,\beta}(\phi) = \int \phi\tilde{A}^{\gamma,\beta}(g_{\gamma,\beta}\mu_{\gamma,\beta}^{-1})\,d\mu_{\gamma,\beta}$$

puis,

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}\ln(\mu_{\gamma,\beta}) = \tilde{A}^{\gamma,\beta}(g_{\gamma,\beta}\mu_{\gamma,\beta}^{-1}) \qquad \blacksquare$$

Remarquons que la restriction de γ à $]0, 1[$ est en fait inutile et que l'on peut démontrer facilement la proposition 5 en utilisant la même technique. On retrouve notamment que $\mu_{\gamma,\beta}$ est dérivable par rapport à $\beta > 0$ et que

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\ln(\mu_{\gamma,\beta}) = -\gamma\tilde{A}^{\gamma,\beta}(\mu_{\gamma,\beta}^{-1}\operatorname{div}_2(\mu_{\gamma,\beta}b_2))$$

4 ETUDE DE LA PROBABILITÉ INVARIANTE INSTANTANÉE ASSOCIÉE À L'ALGORITHME (1)

On va s'intéresser, dans cette section, à la probabilité invariante instantanée associée à la diffusion (X, Y, Θ) sur $M \times M \times N$ décrite par (1) dans l'introduction. Plus précisément, on étudiera, en appliquant les résultats des deux sections précédentes, son comportement en temps grand, pour certaines évolutions β, γ et $h \in C^1([0, \infty[, \mathbb{R}_+^*)$, et sa dérivabilité par rapport au temps.

On suppose désormais, que les paramètres β^{-1}, γ et h sont dans $]0, 1[$, quitte à n'étudier l'algorithme (1) qu'à partir d'un temps t_0, où pour tout $t \geq t_0$, on a $\beta_t > 1$, $\gamma_t < 1$ et $h_t < 1$.

On convient aussi, dorénavant, de noter avec un indice 1 (respectivement avec un indice 2) les notions relatives à la structure riemannienne de M sur le premier facteur (respectivement sur le second facteur) de $M \times M \times N$.

Ainsi, à l'instant $t \geq 0$, la restriction $\mathbb{L}_t$ à $C^2(M \times M \times N)$ du générateur de la diffusion (X, Y, Θ) s'exprime par

$$\begin{aligned}
&\forall g \in C^2(M \times M \times N), \quad \forall (x, y, \theta) \in M \times M \times N,\\
&\mathbb{L}_t(g)(x, y, \theta) = \frac{1}{2}\Delta_1 g(x, y, \theta) + \langle b(x, \theta), \nabla_1 g(x, y, \theta)\rangle_1\\
&\qquad + \frac{1}{2}\Delta_2 g(x, y, \theta) + \langle b(y, \theta + h_t), \nabla_2 g(x, y, \theta)\rangle_2\\
&\qquad + \gamma_t\left[\frac{1}{2}\partial_\theta^2 g(x, y, \theta) - \beta_t l_{h_t}(x, y, \theta)\partial_\theta g(x, y, \theta)\right]
\end{aligned}$$

Ce que l'on a appelé précédement la probabilité invariante instantanée (au temps t à la diffusion (X, Y, Θ)) est alors l'unique probabilité ν_t invariante pour cet opérateur, c'est-à-dire, celle qui satisfait,

$$\forall g \in C^2(M \times M \times N), \quad \nu_t(\mathbb{L}_t(g)) = 0 \tag{23}$$

Il est bien connu que cette probabilité est absolument continue par rapport à $\lambda_1(dx) \otimes \lambda_2(dy) \otimes (2\pi)^{-1}\,d\theta$ et que sa densité est de classe C^∞.

En fait, on va s'intéresser, dans un premier temps, à $\nu_{N,t}$, la projection de ν_t sur N, et le but de la proposition suivante est de donner une condition sur les évolutions β, γ et h, qui assure qu'en temps grand, $\nu_{N,t}$ tend à se concentrer au voisinage des minima globaux du potentiel F défini dans l'introduction.

Proposition 9 *Supposons que*

$$\lim_{t\to+\infty}\beta_t = +\infty$$

$$\lim_{t\to+\infty}h_t = 0$$

$$\lim_{t\to+\infty}\gamma_t\frac{\beta_t^2}{h_t^4} = 0$$

Alors, les $\nu_{N,t}$ satisfont un principe de grandes déviations avec

$$I = 2(F - F_0)$$

pour fonctionnelle d'action et β_t pour taux, c'est-à-dire, que pour tout borélien A de N, on a

$$-\inf_{\theta\in\mathring{A}} I(\theta) \leq \liminf_{t\to+\infty}\beta_t^{-1}\ln(\nu_{N,t}(\mathring{A})) \leq \limsup_{t\to+\infty}\beta_t^{-1}\ln(\nu_{N,t}(\bar{A})) \leq -\inf_{\theta\in\bar{A}} I(\theta)$$

où $\mathring{A}$ et $\bar{A}$ sont l'intérieur et la fermeture de A.

Démonstration Du fait que tout $g \in C^2(N)$, on a

$$\int_N \nu_{N,t}(d\theta)\nu_{M\times M,t}(\mathbb{L}_t(g)\,|\,\theta) = 0$$

il est clair que $\nu_{N,t}$ est la probabilité invariante pour l'opérateur $\mathbb{L}_{N,t}$ défini sur $C^2(N)$ par

$$\mathbb{L}_{N,t}\cdot = \frac{1}{2}\partial_\theta^2\cdot + A_t(\theta)\partial_\theta\cdot$$

où on a posé, pour tout $\theta \in N$,

$$A_t(\theta) = -\beta_t \int_{M \times M} \nu_{M \times M, t}(dx\, dy \mid \theta) l_{h_t}(x, y, \theta) \tag{24}$$

(on a noté $\nu_{M \times M, t}(\cdot \mid \theta)$ la version régulière de la probabilité conditionnelle, sous ν_t, sachant que la troisième coordonnée sur $M \times M \times N$ vaut θ).

Cependant, puisque N est le cercle, on peut exprimer explicitement $\nu_{N,t}$ en fonction de A_t.

Notons, pour $\theta_1, \theta_2 \in N$,

$$V_t(\theta_1, \theta_2) = 2 \int_{\gamma(\theta_1, \theta_2)} A_t(\theta)\, d\theta$$

(où on a noté $\gamma(\theta_1, \theta_2)$ l'arc de cercle (identifié à un sous ensemble de $[0, 2\pi[$) obtenu en allant de θ_1 à θ_2 en tournant dans le sens trigonométrique, et où on a convenu de prendre $\gamma(\theta_1, \theta_1) = \varnothing$), et

$$v_t(\theta_1) = \int_N \exp(V_t(\theta_1, \theta_2))\, d\theta_2$$

Alors, pour tout $\theta \in N$,

$$\nu_{N,t}(\theta) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_N v_t(\theta_1)\, d\theta_1 \right)^{-1} v_t(\theta) \tag{25}$$

Il est facile de vérifier, sur cette formule (*cf.* [6], appendice 1, proposition 9), que

$$\| \partial_\theta \ln(\nu_{N,t}) \|_\infty \leq 4\pi \| A_t \|_\infty$$

puis, d'après la définition de A_t et de l_h, que pout tout $\theta \in N$,

$$|\partial_\theta \nu_{N,t}(\theta)| \leq 4\pi\beta_t \left[\| \partial_\theta f \|_\infty + \frac{2}{h_t} \| f \|_\infty \right] \nu_{N,t}(\theta)$$

D'autre part, remarquons que $A_t(\theta)$ est C^∞ en θ, car

$$A_t(\theta) = -\beta_t \frac{\int_{M \times M} \lambda_1(dx) \lambda_2(dy) \nu_t(x, y, \theta) l_{h_t}(x, y, \theta)}{\int_{M \times M} \lambda_1(dx) \lambda_2(dy) \nu_t(x, y, \theta)} \tag{26}$$

De plus, la proposition 2 permet de borner $\partial_\theta A_t(\theta)$. En effet, appliquons les résultats de la section 2 aux variétés $V = M \times M$ et N, avec les champs de vecteurs b^1 et b^2

définis par

$$b_1^1((x, y), \theta) = (b(x, \theta), b(y, \theta + h_t))$$

$$b_2^1((x, y), \theta) = \partial_\theta f(x, \theta)$$

$$b_1^2((x, y), \theta) = 0$$

$$b_2^2((x, y), \theta) = f(y, \theta) - f(x, \theta)$$

et avec les paramètres $\beta_1 = \beta_t$, $\beta_2 = \dfrac{\beta_t}{h_t}$ et $\gamma = \gamma_t$.

Avec ces notations, ν_t est la probabilité invariante associée à la diffusion sur $V \times N$ décrite heuristiquement par (5) dans la section 2. On applique alors la remarque suivant la proposition 2, pour obtenir qu'il existe une constante $K \geq 0$, indépendante du temps t, telle que

$$\forall (x, y) \in V, \quad \forall \theta \in N,$$

$$|\partial_\theta \nu_t(x, y, \theta)| \leq K \left[\gamma_t^{-1/2} + \max\left\{ \beta_t ; \frac{\beta_t}{h_t} \right\} \right] \nu_t(x, y, \theta)$$

$$= K \left[\gamma_t^{-1/2} + \frac{\beta_t}{h_t} \right] \nu_t(x, y, \theta)$$

(la constante K devrait aussi dépendre du h_t qui se trouve dans la définition de b_1^1, mais il est clair que l'on peut choisir K uniformément en $h_t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.)

Dans toute la suite, on conviendra de désigner par K diverses constantes dépendant des données du problème (structure riemannienne de M, b et f), mais indépendantes du temps t.

Ce résultat et (26) permettent de voir que pour tout $\theta \in N$,

$$|\partial_\theta A_t(\theta)| \leq K \left[1 + \gamma_t^{-1/2} + \frac{\beta_t}{h_t} \right] \frac{\beta_t}{h_t}$$

Or, $\nu_{N,t}$ satisfait sur N, l'équation

$$\frac{1}{2} \partial_\theta^2 \nu_{N,t}(\theta) - A_t(\theta) \partial_\theta \nu_{N,t}(\theta) - \partial_\theta A_t(\theta) \nu_{N,t}(\theta) = 0$$

et on en déduit donc qu'il existe une constante $K \geq 0$, telle que pour tout $\theta \in N$,

$$\begin{cases} |\partial_\theta \nu_{N,t}(\theta)| \leq K \dfrac{\beta_t}{h_t} \nu_{N,t}(\theta) \\ |\partial_\theta^2 \nu_{N,t}(\theta)| \leq K\left(1 + \gamma_t^{-1/2} + \dfrac{\beta_t}{h_t}\right)\dfrac{\beta_t}{h_t} \nu_{N,t}(\theta) \end{cases} \tag{27}$$

C'est à partir de l'équation (23), des formules définissant explicitement $\nu_{N,t}$, des estimées (27) et des résultats des deux sections précédentes, que nous allons montrer la proposition.

Notons, pour $\theta \in N$ et $h \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $L_{\theta,h}$ l'opérateur défini sur $C^2(M \times M)$ par

$$\forall g \in C^2(M \times M), \quad \forall (x, y) \in M \times M,$$
$$L_{\theta,h}(g)(x, y) = \frac{1}{2} \Delta_1 g(x, y) + \langle b(x, \theta), \nabla_1 g(x, y)\rangle_1$$
$$+ \frac{1}{2} \Delta_2 g(x, y) + \langle b(y, \theta + h), \nabla_2 g(x, y)\rangle_2$$

En reprenant les notations de l'introduction, il est clair que la probabilité $\mu_{\theta,h}$ invariante pour cet opérateur est donnée par

$$\mu_{\theta,h}(dx, dy) = \mu_\theta(dx) \otimes \mu_{\theta+h}(dy)$$

D'autre part, en appliquant, pour un $h \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ fixé, la proposition 7 sur la variété

$$V = M \times M$$

avec la famille, indexée par $\theta \in N$, de champ de vecteurs définie par

$$\forall (x, y) \in V,$$
$$b'((x, y), \theta) = (b(x, \theta), b(y, \theta + h))$$

il apparaît qu'il existe une constante $K_h \geq 0$, telle que pour toute application

$$H((\cdot, \cdot), \cdot) \in C^{\infty, 2}((M \times M) \times N)$$

l'unique application

$$g_h((\cdot, \cdot), \cdot) \in C^{\infty, 2}((M \times M) \times N)$$

qui satisfait l'équation

$$\forall (x, y) \in V, \quad \forall \theta \in N,$$
$$H(x, y, \theta) - \mu_{\theta,h}(H(\cdot, \cdot, \theta)) = L_{\theta,h} g_h(\cdot, \cdot, \theta))(x, y) \tag{28}$$

et la condition de normalisation (pour tout $\theta \in N$),

$$\mu_{\theta,h}(g_h(\cdot, \cdot, \theta)) = 0 \tag{29}$$

soit telle que pour tout $\theta \in N$, on ait

$$\begin{cases} \|g_h(\cdot, \cdot, \theta)\|_\infty \leq K_h \|H(\cdot, \cdot, \theta)\|_\infty \\ \|\partial_\theta g_h(\cdot, \cdot, \theta)\|_\infty \leq K_h[\|H(\cdot, \cdot, \theta)\|_\infty + \|\partial_\theta H(\cdot, \cdot, \theta)\|_\infty] \\ \|\partial_\theta^2 g_h(\cdot, \cdot, \theta)\|_\infty \leq K_h[\|H(\cdot, \cdot, \theta)\|_\infty + \|\partial_\theta H(\cdot, \cdot, \theta)\|_\infty + \|\partial_\theta^2 H(\cdot, \cdot, \theta)\|_\infty] \end{cases} \tag{30}$$

(En effet, on a convenu de noter $C^{\infty,2}((M \times M) \times N)$ l'ensemble des fonctions g continues sur $V \times N$, qui sont C^∞ en la première variable et deux fois dérivable en la seconde, les dérivées $\partial_\theta g$ et $\partial_\theta^2 g$ étant continues sur $V \times N$. Or, avec les notations de la troisième section, on a, pour tout $(x, y) \in V$ et tout $\theta \in N$, $g_h(x, y, \theta) = A^{\theta,h}(H)(x, y)$, et on a vérifié que cette application appartenait bien à $C^{0,2}(V \times N)$. De plus, pour $\theta \in N$ fixé, $g_h(x, y, \theta)$ satisfait en (x, y) une équation elliptique dont les coefficients sont de classe C^∞, ce qui implique que $g_h(x, y, \theta)$ est aussi de classe C^∞ en (x, y).)

Mais il est facile de vérifier, dans la démonstration de la proposition 7, vu la forme de la famille de champ de vecteurs $b'(\cdot, \theta)$, que l'on peut majorer les constantes K_h uniformément en $h \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ par une certaine constante K (dans K_h n'intervient, en fait, que la structure riemannienne de M et le sup des dérivées, jusqu'à un certain ordre, de b', dans les cartes d'un atlas fini recouvrant M).

Retenons cela, et considérons, pour $x, y \in M$ et $t \geq 0$ fixés, l'opérateur $L_{x,y,t}$ défini sur $C^2(N)$ par

$$L_{x,y,t} \cdot = \frac{1}{2} \partial_\theta^2 \cdot - \beta_t l_{h_t}(x, y, \theta)\partial_\theta \cdot$$

Les opérateurs L_{θ,h_t} et $L_{x,y,t}$ sont liés, via ν_t, par le fait que pour tout $G \in C^2(M \times M \times N)$, on a

$$\int \nu_t(dx, dy, d\theta)[L_{\theta,h_t}(G(\cdot, \cdot, \theta))(x, y) + \gamma_t L_{x,y,t}(G(x, y, \cdot))(\theta)] = 0$$

On peut toujours écrire G sous la forme

$$G(x, y, \theta) = \frac{1}{\nu_{N,t}(\theta)} g(x, y, \theta)$$

la fonction g appartenant encore à $C^2(M \times M \times N)$. L'équation précédente se met alors sous la forme:

$$\forall g \in C^2(M \times M \times N),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_N d\theta\; \nu_{M\times M,t}(L_{\theta,h_t}(g(\cdot,\cdot,\theta))|\theta) = -\gamma_t \int \nu_t(dx, dy, d\theta) L_{x,y,t}\left(\frac{1}{\nu_{N,t}(\cdot)}\, g(x,y,\cdot)\right)(\theta)$$

Cependant, pour tout $x, y \in M$ et $\theta \in N$,

$$\begin{aligned} L_{x,y,t}\left(\frac{1}{\nu_{N,t}(\cdot)}\, g(x,y,\cdot)\right)(\theta) &= \frac{1}{\nu_{N,t}}(\theta) L_{x,y,t}(g(x,y,\cdot))(\theta) + \partial_\theta \frac{1}{\nu_{N,t}}(\theta)\partial_\theta g(x,y,\theta) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}\,\partial_\theta^2 \frac{1}{\nu_{N,t}}(\theta) - \beta_t l_{h_t}(x,y,\theta)\partial_\theta \frac{1}{\nu_{N,t}}(\theta)\right) g(x,y,\theta) \end{aligned}$$

Ainsi, d'après les estimées (27), il existe une constante $K \geq 0$, telle que

$$\begin{aligned} &\left|\int \nu_t(dx, dy, d\theta) L_{x,y,t}\left(\frac{1}{\nu_{N,t}(\cdot)}\, g(x,y,\cdot)\right)(\theta)\right| \\ &\quad \leq \left|\int \nu_t(dx,dy,d\theta)\,\frac{K}{\nu_{N,t}(\theta)}\left[\|\partial_\theta^2 g(\cdot,\cdot,\theta)\|_\infty + \frac{\beta_t}{h_t}\|\partial_\theta g(\cdot,\cdot,\theta)\|_\infty \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + \left(1 + \gamma_t^{-1/2} + \frac{\beta_t}{h_t}\right)\frac{\beta_t}{h_t}\|g(\cdot,\cdot,\theta)\|_\infty\right]\right| \\ &\quad = \left|\int \nu_{N,t}(d\theta)\,\frac{K}{\nu_{N,t}(\theta)}\left[\|\partial_\theta^2 g(\cdot,\cdot,\theta)\|_\infty + \frac{\beta_t}{h_t}\|\partial_\theta g(\cdot,\cdot,\theta)\|_\infty \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + \left(1 + \gamma_t^{-1/2} + \frac{\beta_t}{h_t}\right)\frac{\beta_t}{h_t}\|g(\cdot,\cdot,\theta)\|_\infty\right]\right| \\ &\quad = K\left[\|\partial_\theta^2 g(\cdot,\cdot,\cdot)\|_\infty + \frac{\beta_t}{h_t}\|\partial_\theta g(\cdot,\cdot,\cdot)\|_\infty + \left(1 + \gamma_t^{-1/2} + \frac{\beta_t}{h_t}\right)\frac{\beta_t}{h_t}\|g(\cdot,\cdot,\cdot)\|_\infty\right] \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{2\pi}\int_N d\theta\; \nu_{M\times M,t}(L_{\theta,h_t}(g(\cdot,\cdot,\theta))|\theta)\right| \\ &\quad \leq K\gamma_t\left[\|\partial_\theta^2 g(\cdot,\cdot,\cdot)\|_\infty + \frac{\beta_t}{h_t}\|\partial_\theta g(\cdot,\cdot,\cdot)\|_\infty + \left(1 + \gamma_t^{-1/2} + \frac{\beta_t}{h_t}\right)\frac{\beta_t}{h_t}\|g(\cdot,\cdot,\cdot)\|_\infty\right] \end{aligned}$$

Mais, vu les hypothèses faites sur les évolutions β, γ et h dans la proposition 9, il

existe $T \geq 0$, tel que pour tout $t \geq T$, on ait

$$\gamma_t^{-1} \geq \frac{\beta_t^2}{h_t^4}$$

Ainsi, pour $t \geq T$, on a, pour une certaine constante $K \geq 0$,

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{2\pi}\int_N d\theta\; \nu_{M\times M,t}(L_{\theta,h_t}(g(\cdot,\cdot,\theta))|\theta)\right| \\ &\quad \leq K\gamma_t\left[\|\partial_\theta^2 g(\cdot,\cdot,\cdot)\|_\infty + \frac{\beta_t}{h_t}\|\partial_\theta g(\cdot,\cdot,\cdot)\|_\infty + \gamma_t^{-1/2}\frac{\beta_t}{h_t}\|g(\cdot,\cdot,\cdot)\|_\infty\right] \end{aligned}$$

Soit $H \in C^\infty(M \times M \times N)$, et pour $h \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, associons-lui, comme précédement, $g_h \in C^{\infty,2}((M \times M) \times N)$ l'unique fonction qui satisfait (28) et (29). Cette application appartient, a fortiori, à $C^{2,2,2}(M \times M \times N)$, ce qui, en fait, est suffisant pour pouvoir appliquer les résultats précédents avec $g = g_{h_t}$.

En utilisant la relation (28) et les estimées (30), on obtient donc

$$\forall H \in C^\infty(M \times M \times N),$$

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{2\pi}\int_N d\theta[\nu_{M\times M,t}(H(\cdot,\cdot,\theta)|\theta) - \mu_{\theta,h_t}(H(\cdot,\cdot,\theta))]\right| \\ &\quad \leq K\gamma_t\left[\|\partial_\theta^2 H(\cdot,\cdot,\cdot)\|_\infty + \left(1 + \frac{\beta_t}{h_t}\right)\|\partial_\theta H(\cdot,\cdot,\cdot)\|_\infty \right. \\ &\qquad \left. + \left(1 + \frac{\beta_t}{h_t} + \gamma_t^{-1/2}\frac{\beta_t}{h_t}\right)\|H(\cdot,\cdot,\cdot)\|_\infty\right] \\ &\quad \leq K\gamma_t\left[\|\partial_\theta^2 H(\cdot,\cdot,\cdot)\|_\infty + \frac{\beta_t}{h_t}\|\partial_\theta H(\cdot,\cdot,\cdot)\|_\infty + \gamma_t^{-1/2}\frac{\beta_t}{h_t}\|H(\cdot,\cdot,\cdot)\|_\infty\right] \end{aligned}$$

pour une certaine constante $K \geq 0$ (qui est le triple de celle de la ligne précédente!), si on prend $t \geq T$.

Ceci prouve déjà, sous les hypothèses faites sur les évolutions β, γ et h dans la proposition 9, que $\nu_{M\times M,t}(\cdot|\theta)$ tend, d'une certaine manière, vers $\mu_{\theta,h_t}(\cdot)$, en temps grand.

Vu la formule (24), on voudrait bien appliquer les calculs précédents avec l'application $H = H_{z,z'}$ définie sur $M \times M \times N$, pour tous $z, z' \in N$ fixés, par

$$\forall x, y \in M, \quad \forall \theta \in N,$$
$$H_{z,z'}(x, y, \theta) = 1_{\gamma(z,z')}(\theta) l_{h_t}(x, y, \theta)$$

mais, le problème est que cette fonction n'appartient pas à $C^\infty(M \times M \times N)$.

Cependant, il est facile de vérifier que, pour un $0 < \varepsilon \leq 1$ fixé, on peut approcher $1_{\gamma(z,z')}(\theta)$ par une fonction $f_{z,z',\varepsilon}(\theta)$ de classe C^∞ en θ, de telle sorte que

$$\| f_{z,z',\varepsilon} \|_\infty \leq 1$$

$$\| \partial_\theta f_{z,z',\varepsilon} \|_\infty \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\| \partial_\theta^2 f_{z,z',\varepsilon} \|_\infty \leq \frac{1}{\varepsilon^2}$$

et

$$\int_N | f_{z,z',\varepsilon}(\theta) - 1_{\gamma(z,z')}(\theta) | \, d\theta \leq \varepsilon$$

(le tout, simultanément pour tous les couples $(z, z') \in N \times N$.)

On considère alors l'application $H_{z,z',\varepsilon} \in C^\infty(M \times M \times N)$ définie par

$$\forall x, \, y \in M, \quad \forall \theta \in N,$$
$$H_{z,z',\varepsilon}(x, y, \theta) = f_{z,z',\varepsilon}(\theta) l_{h_t}(x, y, \theta)$$

On a:

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_N d\theta [\nu_{M \times M, t}(H_{z,z',\varepsilon}(\cdot, \cdot, \theta) | \theta) - \mu_{\theta, h_t}(H_{z,z',\varepsilon}(\cdot, \cdot, \theta))] \right|$$
$$\leq K \gamma_t \frac{1}{h_t} \left[\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{\beta_t}{h_t} \frac{1}{\varepsilon} + \gamma_t^{-1/2} \frac{\beta_t}{h_t} \right]$$

D'autre part, pour tous $z, z' \in N$,

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_N d\theta \, [\nu_{M \times M, t}(H_{z,z'}(\cdot, \cdot, \theta) | \theta) - \nu_{M \times M, t}(H_{z,z',\varepsilon}(\cdot, \cdot, \theta) | \theta)] \right|$$
$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_N d\theta \, | f_{z,z',\varepsilon}(\theta) - 1_{\gamma(z,z')}(\theta) | \nu_{M \times M, t}(| l_{h_t}(\cdot, \cdot, \theta) | | \theta)$$
$$\leq K \frac{\varepsilon}{h_t}$$

et de même,

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_N d\theta [\mu_{\theta, h_t}(H_{z,z'}(\cdot, \cdot, \theta)) - \mu_{\theta, h_t}(H_{z,z',\varepsilon}(\cdot, \cdot, \theta))] \right| \leq K \frac{\varepsilon}{h_t}$$

En résumé, on a donc, pour tout $t \geq T$, tout $0 < \varepsilon \leq 1$ et tous $z, z' \in N$,

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_N d\theta [\nu_{M \times M, t}(H_{z,z'}(\cdot, \cdot, \theta) | \theta) - \mu_{\theta, h_t}(H_{z,z'}(\cdot, \cdot, \theta))] \right|$$
$$\leq K \left(\frac{\gamma_t}{h_t} \left[\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{\beta_t}{h_t} \frac{1}{\varepsilon} + \gamma_t^{-1/2} \frac{\beta_t}{h_t} \right] + \frac{\varepsilon}{h_t} \right)$$

Prenons $\varepsilon = h_t / \beta_t$, le membre de droite ci-dessus peut se mettre sous la forme

$$K \left(\frac{\gamma_t}{h_t} \frac{\beta_t}{h_t} \left[\frac{\beta_t}{h_t} + \gamma_t^{-1/2} \right] + \frac{1}{\beta_t} \right)$$

c'est-à-dire, qu'il existe une constante $K \geq 0$, telle que pour tout $t \geq T$, on ait:

$$\forall z, \, z' \in N,$$
$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_N d\theta [\nu_{M \times M, t}(H_{z,z'}(\cdot, \cdot, \theta) | \theta) - \mu_{\theta, h_t}(H_{z,z'}(\cdot, \cdot, \theta))] \right| \leq K \left[\frac{\gamma_t^{1/2}}{h_t} \frac{\beta_t}{h_t} + \frac{1}{\beta_t} \right]$$

Cependant, on connait bien μ_{θ, h_t}, et on a notamment,

$$\mu_{\theta, h_t}(l_{h_t}(\cdot, \cdot, \theta)) = \int \partial_\theta f(x, \theta) \mu_\theta(dx) + \int f(x, \theta) \frac{1}{h_t} (\mu_{\theta + h_t}(x) - \mu_\theta(x)) \lambda_1(dx)$$

On applique alors à nouveau la proposition 7, sur la variété

$$V = M \times M$$

avec la famille, indexée par $\theta \in N$, de champ de vecteurs définie par

$$\forall (x, y) \in V,$$
$$b'((x, y), \theta) = (b(x, \theta), b(y, \theta + h))$$

pour voir qu'il existe une constante $K \geq 0$, telle que pour tout $h \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et tous x, $y \in M$,

$$| \partial_\theta^2 \mu_{\theta, h}(x, y) | \leq K$$

(comme précédement, K devrait dépendre du h qui apparaît dans la définition de la famille de champ de vecteurs b', mais il est facile de vérifier, sur la formule donnée dans la proposition 7, que l'on peut choisir K uniformément en $h \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.)

Ainsi, en écrivant que pour tout $x \in M$, tout $\theta \in N$ et tout $h \in \mathbb{R}^*$, il existe $0 < \delta < 1$ tel que

$$\frac{1}{h}(\mu_{\theta+h}(x) - \mu_\theta(x)) = \partial_\theta \mu_\theta(x) + \frac{h}{2}(\partial_\theta^2 \mu\,.\,(x))(\theta + \delta h)$$

on voit que, pour tout $t \geq 0$,

$$\left| \int f(x, \theta)\frac{1}{h_t}(\mu_{\theta+h_t}(x) - \mu_\theta(x))\lambda_1(dx) - \int f(x, \theta)\partial_\theta \mu_\theta(x)\lambda_1(dx) \right| \leq K h_t$$

Or, pour $\theta \in N$,

$$\partial_\theta F(\theta) = \int \partial_\theta f(x, \theta)\mu_\theta(dx) + \int f(x, \theta)\partial_\theta \mu_\theta(x)\lambda_1(dx)$$

et on a donc, pour tout $t \geq 0$ et tout $\theta \in N$,

$$|\mu_{\theta, h_t}(l_{h_t}(\cdot, \cdot, \theta)) - \partial_\theta F(\theta)| \leq K h_t$$

En fin de compte, il resort, que pour tous $z, z' \in N$ et tout $t \geq T$,

$$\begin{aligned}
&|\beta_t^{-1} V_t(z, z') + 2(F(z') - F(z))| \\
&\quad = 2\left| \int_{\gamma(z,z')} d\theta(\beta_t^{-1} A_t(\theta) + \partial_\theta F(\theta)) \right| \\
&\quad \leq 4\pi \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma(z,z')} d\theta[\nu_{M\times M,t}(l_{h_t}(\cdot, \cdot, \theta)|\theta) - \mu_{\theta,h_t}(l_{h_t}(\cdot, \cdot, \theta))] \right| + K h_t \\
&\quad = 4\pi \left| \frac{1}{2\pi} \int_N d\theta[\nu_{M\times M,t}(H_{z,z'}(\cdot, \cdot, \theta)|\theta) - \mu_{\theta,h_t}(H_{z,z'}(\cdot, \cdot, \theta))] \right| + K h_t \\
&\quad \leq K\left[\frac{\gamma_t^{1/2}}{h_t}\frac{\beta_t}{h_t} + \frac{1}{\beta_t} + h_t\right]
\end{aligned}$$

Appelons ε_t l'expression du membre de droite ci-dessus, et remarquons qu'elle tend vers 0, sous les hypothèses faites sur les évolutions β, γ et h dans la proposition 9, quand t tend vers l'infini.

Définissons, pour $\beta \geq 0$, la probabilité $\bar{\nu}_\beta$ sur N, par

$$\bar{\nu}_\beta(d\theta) = Z_\beta^{-1} \exp(-2\beta F(\theta))\frac{d\theta}{2\pi}$$

où $Z_\beta = (1/2\pi)\int_N \exp(-2\beta F(\theta))\,d\theta$ est la constante de normalisation.

Le résultat de grandes déviations énoncé dans la proposition 9 est trivial pour cette probabilité. Pour le montrer pour $\nu_{N,t}$, il suffit donc de vérifier que

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\beta_t^{-1}\sup_{\theta\in N}|\ln(\nu_{N,t}(\theta)) - \ln(\bar{\nu}_{\beta_t}(\theta))|\right) = 0$$

Pour simplifier l'écriture, convenons de noter, pour $\beta \geq 0$,

$$\tilde{Z}_\beta = \frac{1}{2\pi}\int_N \exp(2\beta F(\theta))\,d\theta$$

On a, pour $\theta \in N$ et $t \geq T$,

$$\begin{aligned}
&\beta_t^{-1}\ln\left(\frac{\nu_{N,t}}{\bar{\nu}_{\beta_t}}\right)(\theta) \\
&\quad = \beta_t^{-1}\ln\left(\int_N \exp(\beta_t[\beta_t^{-1}V_t(\theta, z) + 2F(\theta)])\right)dz + \beta_t^{-1}\ln\left(Z_{\beta_t}\left(\frac{1}{2\pi}\int_N v_t(\theta_1)\,d\theta_1\right)^{-1}\right) \\
&\quad \leq \beta_t^{-1}\ln\left(\int_N \exp(\beta_t[2F(z) + \varepsilon_t])\right)dz + \beta_t^{-1}\ln(Z_{\beta_t}) - \beta_t^{-1}\ln\left(\frac{1}{2\pi}\int_N v_t(\theta_1)\,d\theta_1\right) \\
&\quad = \beta_t^{-1}\ln(2\pi\tilde{Z}_{\beta_t}) + \beta_t^{-1}\ln(Z_{\beta_t}) - \beta_t^{-1}\ln\left(\frac{1}{2\pi}\int_N\int_N \exp(V_t(\theta_1, \theta_2))\,d\theta_1\,d\theta_2\right) + \varepsilon_t \\
&\quad \leq \beta_t^{-1}\ln(Z_{\beta_t}\tilde{Z}_{\beta_t}) \\
&\qquad - \beta_t^{-1}\ln\left(\frac{1}{(2\pi)^2}\int_N\int_N \exp(2\beta_t[F(\theta_1) - F(\theta_2)] - \beta_t\varepsilon_t)\,d\theta_1\,d\theta_2\right) + \varepsilon_t \\
&\quad = 2\varepsilon_t
\end{aligned}$$

et de la même manière, on montre que, pour tout $\theta \in N$,

$$\beta_t^{-1}\ln\left(\frac{\nu_{N,t}}{\bar{\nu}_{\beta_t}}\right)(\theta) \geq -2\varepsilon_t$$

d'où

$$\left| \beta_t^{-1} \ln\left(\frac{\nu_{N,t}}{\bar{\nu}_{\beta_t}}\right)(\theta) \right| \leq 2\varepsilon_t$$

puis, le résultat annoncé. ■

La proposition précédente est une étape fondamentale de la démonstration du théorème 1, car non seulement elle donne des conditions sur les évolutions β, γ et h pour que la probabilité $\nu_{N,t}$ tende à se concentrer au voisinage des minima globaux de F, mais elle permet également d'obtenir, sous ces conditions, une minoration et une majoration de la probabilité ν_t très importantes pour la suite.

PROPOSITION 10 *Supposons, comme précédemment, que*

$$\lim_{t \to +\infty} \max\{\beta_t^{-1};\, h_t;\, \gamma_t \beta_t^2 h_t^{-4}\} = 0$$

Il existe alors une constante $K \geq 0$, dépendant de M, de b et des évolutions β, γ et h, telle que pour tout $t \geq 0$, on ait

$$\forall (x, y, \theta) \in M \times M \times N,$$
$$\exp(-K\beta_t) \leq \nu_t(x, y, \theta) \leq \exp(K\beta_t)$$

Démonstration En reprenant la fin de la démonstration de la proposition 9, on voit que sous les hypothèses ci-dessus, il existe un temps $T \geq 0$, dépendant des évolutions β, γ et h, et une constante $K \geq 0$, ne dépendant que de M et de b, tels que pour tout $t \geq T$ et tout $\theta \in N$, on ait

$$\exp(-K\beta_t) \leq \nu_{N,t}(\theta) \leq \exp(K\beta_t) \tag{31}$$

Or, il est clair, en utilisant par exemple la première estimée de (27), qu'il existe une constante $K \geq 0$, dépendant de M, de b et de $\max_{0 \leq t \leq T} \beta_t h_t^{-1}$, telle que pour tout $0 \leq t \leq T$ et tout $\theta \in N$, on ait

$$\exp(-K) \leq \nu_{N,t}(\theta) \leq \exp(K)$$

ce qui prouve que l'on peut trouver une constante $K \geq 0$, dépendant de M, b, β, γ et h, telle que (31) soit vérifié, pour tout $t \geq 0$ et tout $\theta \in N$ (rappelons que pour tout $t \geq 0$, $\beta_t > 1$).

D'autre part, appliquons les résultats de la section 2 sur les variétés $V = M \times M$

et N, avec les champs de vecteurs b^1 et b^2 définis par

$$b_1^1((x, y), \theta) = (b(x, \theta), b(y, \theta + h_t))$$

$$b_2^1((x, y), \theta) = \partial_\theta f(x, \theta)$$

$$b_1^2((x, y), \theta) = 0$$

$$b_2^2((x, y), \theta) = f(y, \theta) - f(x, \theta)$$

et les paramètres $\beta_1 = \beta_t$, $\beta_2 = \beta_t/h_t$ et $\gamma = \gamma_t$.

D'après le corollaire 3, il existe une constante $K \geq 0$, dépendant de M et de b, telle que

$$\forall \theta \in N, \quad \forall x, y \in M, \quad \forall t \geq 0,$$
$$\exp\left(-K\left(1 + \gamma_t^{1/2} \frac{\beta_t}{h_t}\right)\right) \leq \nu_{M \times M, t}((x, y)|\theta) \leq \exp\left(K\left(1 + \gamma_t^{1/2} \frac{\beta_t}{h_t}\right)\right)$$

or, vu les hypothèses faites sur les évolutions β, γ et h, le terme $1 + \gamma_t^{1/2}\beta_t h_t^{-1}$ reste borné pour tout $t \geq 0$, et il existe donc une nouvelle constante $K \geq 0$, dépendant de M, de b et des évolutions β, γ et h, telle que pour tout $t \geq 0$, on ait

$$\forall x, y \in M, \quad \forall \theta \in N, \quad \forall t \geq 0,$$
$$\exp(-K) \leq \nu_{M \times M, t}((x, y)|\theta) \leq \exp(K)$$

Le résultat annoncé découle alors de l'égalité suivante, satisfaite pour tout $(x, y) \in M \times M$ et tout $\theta \in N$,

$$\nu_t(x, y, \theta) = \nu_{M \times M, t}((x, y)|\theta)\nu_{N,t}(\theta)$$ ■

Remarquons que le résultat de cette proposition est beaucoup plus précis que celui que l'on aurait pu obtenir par la méthode de Bernstein. En effet, d'après la proposition 2, on a

$$\| |\nabla_1 \ln(\nu_t)|_1 + |\nabla_2 \ln(\nu_t)|_2 + |\partial_\theta \ln(\nu_t)| \|_\infty \leq K[\gamma_t^{-1/2} + \beta_t \max\{1, h_t^{-1}\}]$$

pour une certaine constante $K \geq 0$, ne dépendant que de M et de b. Mais, sous les hypothèses de la proposition 9, ce résultat permet seulement de voir qu'il existe une constante $K \geq 0$, dépendant de M, de b et des évolutions β, γ et h, telle que pour tout $t \geq 0$, on ait

$$\forall (x, y, \theta) \in M \times M \times N,$$
$$\exp(-K(1 + \gamma_t^{-1/2})) \leq \nu_t(x, y, \theta) \leq \exp(K(1 + \gamma_t^{-1/2}))$$

Comme annoncé au début de cette section, nous allons maintenant montrer que ν_t est dérivable par rapport à t, et donner une estimée de sa dérivée:

PROPOSITION 11 *Pour toutes évolutions β^{-1}, γ et h appartenant à $C^1([0, +\infty[;]0, 1[)$, ν_t est dérivable en $t \geq 0$. Si de plus, on suppose que ces évolutions satisfont les conditions de la proposition 9, alors, il existe une constante $K \geq 0$, dépendant de M, de b et des fonctions β, γ et h, telle que pour tout $t \geq 0$, on ait*

$$\left\| \frac{d}{dt} \ln(\nu_t) \right\|_\infty \leq \gamma_t^{-K} \exp(K\beta_t)\left(\left| \frac{d\beta_t}{dt} \right| + \left| \frac{d\gamma_t}{dt} \right| + \left| \frac{dh_t}{dt} \right| \right)$$

Démonstration Pour $\beta > 0$, $\gamma > 0$ et $h > 0$, notons $\nu_{\beta,\gamma,h}$ la probabilité invariante associée à l'opérateur $L_{\beta,\gamma,h}$ défini sur $L^2(M \times M \times N)$ par

$$\forall g \in C^2(M \times M \times N), \quad \forall (x, y, \theta) \in M \times M \times N,$$

$$\begin{aligned} L_{\beta,\gamma,h}(g)(x, y, \theta) &= \frac{1}{2} \Delta_1 g(x, y, \theta) + \langle b(x, \theta), \nabla_1 g(x, y, \theta) \rangle_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta_2 g(x, y, \theta) + \langle b(y, \theta + h), \nabla_2 g(x, y, \theta) \rangle_2 \\ &\quad + \gamma \left[\frac{1}{2} \partial_\theta^2 g(x, y, \theta) - \beta l_h(x, y, \theta) \partial_\theta g(x, y, \theta) \right] \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $t \geq 0$,

$$\nu_t = \nu_{\beta_t, \gamma_t, h_t}$$

Considérons également l'opérateur $\tilde{L}_{\beta,\gamma,h}$ défini sur $L^2(M \times M \times N)$ par

$$\forall g \in C^2(M \times M \times N), \quad \forall (x, y, \theta) \in M \times M \times N,$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{\beta,\gamma,h}(g)(x, y, \theta) &= \frac{1}{2} \Delta_1 g(x, y, \theta) + \langle \nabla_1 \ln(\nu_{\beta,\gamma,h})(x, y, \theta) - b(x, \theta), \nabla_1 g(x, y, \theta) \rangle_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta_2 g(x, y, \theta) + \langle \nabla_2 \ln(\nu_{\beta,\gamma,h})(x, y, \theta) - b(y, \theta + h), \nabla_2 g(x, y, \theta) \rangle_2 \\ &\quad + \gamma \left[\frac{1}{2} \partial_\theta^2 g(x, y, \theta) - [\partial_\theta \ln(\nu_{\beta,\gamma,h})(x, y, \theta) - \beta l_h(x, y, \theta)] \partial_\theta g(x, y, \theta) \right] \end{aligned}$$

Appelons $\tilde{A}^{\beta,\gamma,h}$ le potentiel associé à l'opérateur $\tilde{L}_{\beta,\gamma,h}$ (*cf.* la section 3). Si les évolutions β, γ et h satisfont les conditions de la proposition 10, il existe, d'après cette dernière, d'après les deux premières estimées de la proposition 2 et d'après la remarque de la fin de la section suivante, une constante $K \geq 0$, dépendant de M, de

b et des évolutions β, γ et h, telle que pour tout $t \geq 0$, la norme de $\tilde{A}^{\beta_t,\gamma_t,h_t}$, considéré comme un opérateur sur $C^0(M \times M \times N)$, soit bornée par

$$|||\tilde{A}^{\beta_t,\gamma_t,h_t}||| \leq \gamma_t^{-K} \exp(K\beta_t) \tag{32}$$

(En effet, en considérant l'application c: $C^1(M) \to \mathbb{R}$ définie dans la section suivante, on voit que $|||\tilde{A}^{\beta_t,\gamma_t,h_t}|||$ est majoré, a priori, par

$$\left(1 + \gamma_t^{-1/2} + \frac{\beta_t}{h_t}\right)^K \exp[\beta_t c(\beta_t^{-1} \ln(\nu_{\beta_t,\gamma_t,h_t}))]$$

mais, sous les hypothèses faites, cette expression peut se mettre sous la forme du membre de droite de (32).)

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer les résultats de la section précédente.

D'après la proposition 8, $\nu_{\beta,\gamma,h}$ est dérivable en γ et

$$\frac{\partial}{\partial\gamma} \nu_{\beta,\gamma,h} = \nu_{\beta,\gamma,h} \tilde{A}^{\beta,\gamma,h}\left(\frac{1}{2} \partial_\theta^2 \ln(\nu_{\beta,\gamma,h}) + \frac{1}{2} |\partial_\theta \ln(\nu_{\beta,\gamma,h})|^2 + \beta l_h \partial_\theta \ln(\nu_{\beta,\gamma,h}) + \beta \partial_\theta l_h \right)$$

D'autre part, en appliquant la proposition 5, avec $\mathbb{R}_+^*$ au lieu de N, et β, puis h, comme paramètres (à la place du paramètre θ de cette proposition), ce qui ne présente pas de difficultés, on voit que $\nu_{\beta,\gamma,h}$ est également dérivable en β et en h strictement positifs, et que

$$\frac{\partial}{\partial\beta} \nu_{\beta,\gamma,h} = \gamma \nu_{\beta,\gamma,h} \tilde{A}^{\beta,\gamma,h}(\nu_{\beta,\gamma,h}^{-1} \partial_\theta(\nu_{\beta,\gamma,h} l_h))$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial h} \nu_{\beta,\gamma,h} = -\nu_{\beta,\gamma,h} \tilde{A}^{\beta,\gamma,h}\bigg(\nu_{\beta,\gamma,h}^{-1} \bigg[&\operatorname{div}_2\left(\nu_{\beta,\gamma,h} \frac{\partial}{\partial h} b(\cdot_2, \cdot_3 + h) \right) \\ &+ \gamma\beta h^{-2} \partial_\theta(\nu_{\beta,\gamma,h}[f(\cdot_2, \cdot_3) - f(\cdot_1, \cdot_3)]) \bigg] \bigg) \end{aligned}$$

où $\cdot_1$ (respectivement $\cdot_2$ et $\cdot_3$) indique que l'on considère une fonction dépendant de la première (respectivement de la seconde et de la dernière) coordonnée sur $M \times M \times N$.

On en déduit, en utilisant les majorations de la proposition 2, qu'il existe une constante $K \geq 0$, telle pour tout $t \geq 0$,

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \gamma} \ln(v_{\beta_t, \gamma_t, h_t}) \right\|_\infty \leq K\left(\gamma_t^{-1} + \left(\frac{\beta_t}{h_t}\right)^2\right) |||\tilde{A}^{\beta_t, \gamma_t, h_t}|||$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \beta} \ln(v_{\beta_t, \gamma_t, h_t}) \right\|_\infty \leq K\gamma_t h_t^{-1}\left(1 + \gamma_t^{-1/2} + \frac{\beta_t}{h_t}\right) |||\tilde{A}^{\beta_t, \gamma_t, h_t}|||$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial h} \ln(v_{\beta_t, \gamma_t, h_t}) \right\|_\infty \leq K\left[\left(1 + \gamma_t^{1/2} \frac{\beta_t}{h_t}\right) + \gamma_t \beta_t h_t^{-2}\left(1 + \gamma_t^{-1/2} + \frac{\beta_t}{h_t}\right)\right] |||\tilde{A}^{\beta_t, \gamma_t, h_t}|||$$

ce qui prouve la proposition, car

$$\frac{d}{dt} v_t = \left(\frac{\partial}{\partial \beta} v_{\beta_t, \gamma_t, h_t} \frac{d\beta_t}{dt} + \frac{\partial}{\partial \gamma} v_{\beta_t, \gamma_t, h_t} \frac{d\gamma_t}{dt} + \frac{\partial}{\partial h} v_{\beta_t, \gamma_t, h_t} \frac{dh_t}{dt}\right) \qquad \blacksquare$$

Nous disposons désormais de toutes les estimées sur la probabilité invariante instantanée v_t nécessaires à la démonstration du théorème 1, mais il faut d'abord faire quelques rappels sur les inégalités de Sobolev logarithmiques.

5 INÉGALITÉS DE SOBOLEV LOGARITHMIQUES

On va rappeler ici un théorème très important sur les inégalitiés de Sobolev logarithmiques, qui a été obtenu par Holley, Kusuoka et Stroock (regrouper le théorème (1.14) de [4] et le théorème (3.23) de [3]). Puis, on présentera, comme première conséquence de ces inégalités, un résultat ergodique, déjà utilisé dans les sections précédentes pour majorer la norme de potentiels.

Soient V une variété riemannienne compacte et connexe, et $U \in C^1(V)$. Associons à U la constante $c(U)$ définie comme suit:

Pour $x, y \in V$, on note $\mathscr{C}_{x,y}$ l'ensemble des applications continues ϕ: $[0, 1] \to V$ telles que $\phi(0) = x$ et $\phi(1) = y$. Pour $\phi \in \mathscr{C}_{x,y}$ on appelle élévation de ϕ relativement à U, le nombre

$$e_U(\phi) = \sup_{0 \leq t \leq 1} U(\phi(t)) - U(x) - U(y) + \inf_{z \in V} U(z)$$

La constante $c(U)$ est alors donnée par

$$c(U) = \sup_{x, y \in V} \left(\inf_{\phi \in \mathscr{C}_{x,y}} e_U(\phi)\right)$$

On peut montrer que le sup précédent est atteint notamment en un couple (x, y) tel que x soit un minima global de U. On en déduit une estimation brutale de $c(U)$:

$$0 \leq c(U) \leq \sup_{z \in V} U(z) - \inf_{z \in V} U(z) \leq 2\|U\|_\infty$$

L'intérêt de cette constante provient du résultat suivant. On définit, pour $\beta > 0$, la densité de probabilité $\bar{v}_\beta$ par

$$\bar{v}_\beta(x) = \left(\int \exp(-\beta U(y))\lambda(dy)\right)^{-1} \exp(-\beta U(x))$$

Le résultat de Holley, Kusuoka et Stroock s'énonce alors

THÉORÈME 12 *Il existe une constante $A > 0$, ne dépendant que de V et de $\|U\|_\infty$ (et croissante en ce nombre), telle que si m est la dimension de V, les inégalités de Sobolev logarithmiques suivantes soient satisfaites,*

$$\forall \beta \geq 0, \quad \forall \phi \in C^1(V),$$

$$\int \phi^2 \ln(\phi^2)\, d\bar{v}_\beta \leq \alpha_\beta \int \langle \nabla\phi, \nabla\phi \rangle\, d\bar{v}_\beta + \int \phi^2\, d\bar{v}_\beta \ln\left(\int \phi^2\, d\bar{v}_\beta\right)$$

où

$$\alpha_\beta = A(1 + \beta \| |\nabla U| \|_\infty)^{5m-1} \exp(c(U)\beta)$$

Remarque Comme on ne cherche pas à obtenir les meilleures évolutions β, γ et h pour l'algorithme (1), on aurait pu se contenter du lemme 3.13 de [4], qui affirme qu'il existe une constante $K \geq 0$, ne dépendant que de la structure riemannienne de V, telle que les inégalités précédentes soient satisfaites avec

$$\alpha_\beta = K \exp(\beta[\sup_{z \in V} U(z) - \inf_{z \in V} U(z)])$$

(et il n'est donc pas nécessaire d'avoir une estimée sur $|\nabla U|$).

Considérons une diffusion X sur V décrite heuristiquement par

$$dX_t = dB_t + b_\beta(X_t)\, dt$$

où B est un mouvement brownien sur V, et b_β un champ de vecteurs sur V.

Supposons que X admette $\bar{v}_\beta$ pour probabilité invariante. La démonstration de la proposition 7 de [6] permet alors de voir qu'il existe une constante $K \geq 0$, ne dépendant que de V, telle que pour toute fonction f borélienne bornée sur V, toute probabilité μ sur V et tout temps $t \geq 1$, on ait

$$|\mathbb{E}_\mu[f(X_t)] - \bar{v}_\beta(f)| \leq K[1 + \beta\|U\|_\infty + \| |b_\beta| \|_\infty] \exp(-\alpha_\beta^{-1}(t - 1)) \|f\|_\infty$$

Remarque Supposons que $V = V_1 \times V_2$, où V_1 et V_2 sont deux variétés riemanniennes compactes et connexes, et que la diffusion $X = (X_1, X_2)$ soit décrite heuristiquement par

$$\begin{cases} dX_{1,t} = dB_{1,t} + b_{1,\beta,\gamma}(X_t)\,dt \\ dX_{2,t} = \gamma^{1/2}\,dB_{2,t} + \gamma b_{2,\beta,\gamma}(X_t)\,dt \end{cases}$$

où $B = (B_1, B_2)$ est un mouvement brownien sur $V_1 \times V_2$, $b_{\beta,\gamma} = (b_{1,\beta,\gamma}, b_{2,\beta,\gamma})$ un champ de vecteurs sur $V_1 \times V_2$ et $0 < \gamma \leq 1$.

Faisons encore l'hypothèse que $\bar{v}_\beta$ soit la probabilité invariante pour cette diffusion. Alors, en reprenant la démonstration de la section suivante avec des évolutions constantes, et celle de la proposition 7 de [6] (où il faut considérer, au temps γ^{-1}, le noyau de la chaleur sur $V_1 \times V_2$ associé à l'opérateur $2^{-1}(\Delta_1 + \gamma\Delta_2)$, ce qui revient à considérer le produit du noyau de la chaleur sur V_1 associé à l'opérateur $2^{-1}\Delta_1$ à l'instant γ^{-1}, par le noyau de la chaleur sur V_2 associé à l'opérateur $2^{-1}\Delta_2$ à l'instant 1, mais pour ces derniers, on peut obtenir une majoration uniforme en $\gamma \in]0, 1]$), on peut se persuader qu'il existe une constante $K \geq 1$, indépendante de $0 < \gamma \leq 1$ et $\beta > 0$, telle que pour toute fonction f borélienne bornée sur V, toute probabilité μ sur V et tout temps $t \geq \gamma^{-1}$, on ait

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}_\mu[f(X_t)] - \bar{v}_\beta(f)| \leq K[1 + \beta\|U\|_\infty + \gamma^{-1/2}\||b_{1,\beta,\gamma}|\|_\infty + \||b_{2,\beta,\gamma}|\|_\infty] \\ \times \exp(-\gamma\alpha_\beta^{-1}(t - \gamma^{-1}))\|f\|_\infty \end{aligned}$$

Ce résultat permet de borner le potentiel associé à la diffusion $X = (X_1, X_2)$:

$$\begin{aligned} &\forall f \in C^0(V_1 + V_2), \\ \left|\int_0^\infty \mathbb{E}_\mu[f(X_t) - \bar{v}_\beta(f)]\,dt\right| &\leq \left|\int_0^{\gamma^{-1}} \mathbb{E}_\mu[f(X_t) - \bar{v}_\beta(f)]\,dt\right| \\ &\quad + \left|\int_{\gamma^{-1}}^\infty \mathbb{E}_\mu[f(X_t) - \bar{v}_\beta(f)]\,dt\right| \\ &\leq (2\gamma^{-1} + K[1 + \beta\|U\|_\infty + \gamma^{-1/2}\||b_{1,\beta,\gamma}|\|_\infty \\ &\quad + \||b_{2,\beta,\gamma}|\|_\infty]\gamma^{-1}\alpha_\beta)\|f\|_\infty \end{aligned}$$

6 DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Vu la proposition 9 de la section précédente, pour prouver le théorème 1, il suffit de voir qu'en temps grand, n_t s'approche (en variation totale, par example) de $v_{N,t}$. On va montrer ici un résultat un peu plus précis; sous les évolutions β, γ et h données dans le théorème 1, m_t s'approche de v_t.

Introduisons, pour $t \geq 0$, la notion d'entropie (aussi connue sous le nom d'information de Kullback-Leibler), par rapport à v_t, d'une probabilité p sur $M \times M \times N$; il s'agit de la quantité

$$I_t(p) = \begin{cases} \displaystyle\int\!\!\int_{M \times M \times N} \ln\left(\frac{p}{v_t}\right) dp, & \text{si} \quad p \ll \lambda_1 \otimes \lambda_2 \otimes (2\pi)^{-1}\,d\theta \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que d'après l'inégalité de Jensen, on a $I_t(p) \geq 0$. En fait, $I_t(p)$ mesure d'une certaine manière la distance entre p et v_t, et on a notamment,

$$\|p - v_t\| \leq 4\sqrt{2I_t(p)}$$

où $\|\cdot\|$ représente la variation totale de mesures signées (*cf.* [4]).

Ainsi, le théorème 1 sera démontré, si on prouve que pour les évolutions données,

$$\lim_{t \to +\infty} I_t(m_t) = 0$$

Dans ce but, nous allons étudier l'évolution temporelle de $I_t(m_t)$, mais, commençons par faire quelques rappels sur la régularité des m_t.

Sous les hypothèses faites, il est bien connu que pour $t > 0$, m_t est absolument continue par rapport à $\lambda_1 \otimes \lambda_2 \otimes (2\pi)^{-1}\,d\theta$, et que sa densité est strictement positive et de classe C^∞. De plus, m_t satisfait, au sens fort, sur $]0, +\infty[\, \times (M \times M \times N)$, l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{\partial}{\partial t} m_t = \mathbb{L}_t^*(m_t)$$

où pour tout $(x, y, \theta) \in M \times M \times N$ et tout $g \in C^2(M \times M \times N)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_t^*(g)(x, y, \theta) = \frac{1}{2}\Delta_1 g(x, y, \theta) - \langle b(x, \theta), \nabla_1 g(x, y, \theta)\rangle_1 - (\operatorname{div}_1 b(\cdot, \theta))(x) g(x, y, \theta) \\ + \frac{1}{2}\Delta_2 g(x, y, \theta) - \langle b(y, \theta + h_t), \nabla_2 g(x, y, \theta)\rangle_2 \\ - (\operatorname{div}_2 b(\cdot, \theta + h_t))(y) g(x, y, \theta) \\ + \gamma_t\Big[\frac{1}{2}\partial_\theta^2 g(x, y, \theta) + \beta_t l_{h_t}(x, y, \theta)\partial_\theta g(x, y, \theta) \\ + \beta_t(\partial_\theta l_{h_t}(x, y, \theta)) g(x, y, \theta)\Big] \end{aligned}$$

Ces résultats montrent déjà que pour $t > 0$, $I_t(m_t)$ est finie, et plus précisément, que l'application $t \mapsto I_t(m_t)$ est continûment dérivable sur $]0, +\infty[$, et de dérivée

$$\frac{dI_t(m_t)}{dt} = \int \frac{\partial m_t}{\partial t}\, d\lambda_1\, d\lambda_2\, \frac{d\theta}{2\pi} - \int \frac{\partial \ln(v_t)}{\partial t}\, dm_t + \int \ln\left(\frac{m_t}{v_t}\right) \frac{\partial m_t}{\partial t}\, d\lambda_1\, d\lambda_2\, \frac{d\theta}{2\pi}$$

Le premier terme du membre de droite est nul, car il s'écrit aussi $(d/dt) \int dm_t$. Quant au second, on peut le borner par

$$\left\| \frac{\partial \ln(v_t)}{\partial t} \right\|_\infty$$

Or, notons que si pour tout $t \geq 0$, on a

$$\gamma_t = \beta_t^{-p}$$

$$h_t = \beta_t^{-q}$$

avec $q > 0$ et $p > 2 + 4q$, et si

$$\lim_{t \to +\infty} \beta_t = +\infty$$

alors,

$$\lim_{t \to +\infty} \max\{\beta_t^{-1};\, h_t;\, \gamma_t \beta_t^2 h_t^{-4}\} = 0$$

ce qui permet d'appliquer la proposition 11, pour obtenir une constante $K \geq 0$, telle que pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\left\| \frac{d}{dt} \ln(v_t) \right\|_\infty &\leq \gamma_t^{-K} \exp(K\beta_t)\left(\left|\frac{d\beta_t}{dt}\right| + \left|\frac{d\gamma_t}{dt}\right| + \left|\frac{dh_t}{dt}\right| \right) \\ &= \beta_t^{pK}(1 + p\beta_t^{-p-1} + q\beta_t^{-q-1}) \exp(K\beta_t) \left|\frac{d\beta_t}{dt}\right|\end{aligned}$$

Or, il est clair qu'il existe une constante $c_1 \geq 0$, telle que pour tout $t \geq 0$, cette expression soit majorée par

$$\exp(c_1 \beta_t) \left|\frac{d\beta_t}{dt}\right|$$

(rappelons que l'on suppose que $\beta_t > 1$, pour tout $t \geq 0$).

Il reste à s'intéresser au terme

$$\begin{aligned}\int \ln\left(\frac{m_t}{v_t}\right) \frac{\partial m_t}{\partial t}\, d\lambda_1\, d\lambda_2\, \frac{d\theta}{2\pi} &= \int \ln\left(\frac{m_t}{v_t}\right) \mathbb{L}_t^* m_t\, d\lambda_1\, d\lambda_2\, \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \int \mathbb{L}_t\left(\ln\left(\frac{m_t}{v_t}\right)\right) dm_t\end{aligned}$$

Cependant, du fait que $\mathbb{L}_t$ est un opérateur de diffusion, on a

$$\mathbb{L}_t\left(\ln\left(\frac{m_t}{v_t}\right)\right) = \frac{v_t}{m_t} \mathbb{L}_t\left(\frac{m_t}{v_t}\right) - \left(\frac{v_t}{m_t}\right)^2 \Gamma_t\left(\frac{v_t}{m_t}, \frac{v_t}{m_t}\right)$$

où Γ_t est l'opérateur carré du champ associé à $\mathbb{L}_t$, qui est défini pour toute fonction $\phi \in C^\infty(M \times M \times N)$ par

$$\begin{aligned}\Gamma_t(\phi, \phi) &= \frac{1}{2}[\mathbb{L}_t(\phi^2) - 2\phi \mathbb{L}_t \phi] \\ &= \frac{1}{2}[|\nabla_1 \phi|_1^2 + |\nabla_2 \phi|_2^2 + \gamma_t |\partial_\theta \phi|^2]\end{aligned}$$

Ainsi, puisque v_t est la probabilité invariante pour $\mathbb{L}_t$, on a

$$\begin{aligned}\int \mathbb{L}_t\left(\ln\left(\frac{m_t}{v_t}\right)\right) dm_t &= \int \mathbb{L}_t\left(\frac{m_t}{v_t}\right) dv_t - \int \left(\frac{v_t}{m_t}\right)^2 \Gamma_t\left(\frac{v_t}{m_t}, \frac{v_t}{m_t}\right) dm_t \\ &= -4 \int \Gamma_t\left(\sqrt{\frac{v_t}{m_t}}, \sqrt{\frac{v_t}{m_t}}\right) dv_t \\ &\leq -2\gamma_t \int \left(\left|\nabla_1 \sqrt{\frac{m_t}{v_t}}\right|_1^2 + \left|\nabla_2 \sqrt{\frac{m_t}{v_t}}\right|_2^2 + \left|\partial_\theta \sqrt{\frac{m_t}{v_t}}\right|^2 \right) dv_t\end{aligned}$$

Pour estimer ce terme, on utilise les inégalités de Sobolev logarithmiques prouvées par Holley, Kusuoka et Stroock. En appliquant la proposition 10 et le théorème 12, avec $\beta = \beta_t$, $U = \beta_t^{-1} \ln(v_t)$ et $\phi = \sqrt{m_t/v_t}$, il est clair qu'il existe une constante $c_2 \geq 0$, telle que pour tout $t > 0$,

$$I_t(m_t) \leq \exp(c_2 \beta_t) \int \left(\left|\nabla_1 \sqrt{\frac{m_t}{v_t}}\right|_1^2 + \left|\nabla_2 \sqrt{\frac{m_t}{v_t}}\right|_2^2 + \left|\partial_\theta \sqrt{\frac{m_t}{v_t}}\right|^2 \right) dv_t$$

En résumé, on a donc prouvé que $I_t(m_t)$ satisfait, sur $]0, +\infty[$, l'inégalité différentielle

$$\frac{d}{dt} I_t(m_t) \leq \exp(c_1\beta_t)\left|\frac{d\beta_t}{dt}\right| - 2\beta_t^{-p}\exp(-c_2\beta_t)I_t(m_t)$$

Un calcul classique montre alors que pour obtenir $\lim_{t\to+\infty} I_t(m_t) = 0$, il suffit d'avoir

$$\begin{cases} \displaystyle\int^{\infty} \beta_t^{-p}\exp(-c_2\beta_t)\,dt = +\infty \\ \displaystyle\lim_{t\to+\infty} \beta_t^p \exp[(c_1+c_2)\beta_t]\left|\frac{d\beta_t}{dt}\right| = 0 \end{cases}$$

Or, cette condition est bien satisfaite, pour peu qu'on fixe un $k > c_1 + c_2$ et qu'on prenne, pour tout t assez grand,

$$\beta_t = k^{-1}\ln(t)$$

ce qui termine la démonstration du théorème 1, avec $c = c_1 + c_2$.

7 LE CAS DÉGÉNÉRÉ

On va indiquer les modifications qu'il faut apporter à la méthode précédente pour traiter certains types de dégénérescence.

Soient M_1 et M_2 deux variétés riemanniennes compactes et connexes (l'une des deux pouvant, éventuellement, être réduite à un singleton). On considère une famille, indexée par $\theta \in N$, de champ de vecteurs $b(\cdot, \theta) = (b_1(\cdot, \theta), b_2(\cdot, \theta))$ sur $M_1 \times M_2$. On suppose que l'application

$$M \times N \to TM$$

$$(x, \theta) \mapsto b(x, \theta)$$

est de classe C^∞.

Pour $\theta \in N$ fixé, on considère un processus de Markov dégénéré $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ sur $M_1 \times M_2$, décrit heuristiquement par

$$\begin{cases} d\tilde{X}_{1,t} = dB_{1,t} + b_1(\tilde{X}_t, \theta)\,dt \\ d\tilde{X}_{2,t} = b_2(\tilde{X}_t, \theta)\,dt \end{cases}$$

où B_1 est un mouvement brownien sur M_1, supposé indépendant de $\tilde{X}_0$.

Il existe toujours une probabilité invariante pour le générateur de ce processus, mais elle n'est plus nécessairement unique (ni absolument continue par rapport à la probabilité riemannienne sur $M_1 \times M_2$), comme on peut le voir, en considérant, par exemple, le cas totalement dégénéré, où $M = M_2$.

Si l'on veut s'intéresser au problème similaire à celui introduit dans la première section, il se pose donc la question du choix de la probabilité invariante. Dans certains cas, il existe un choix canonique, et on va se placer dans cette situation:

Pour $\theta \in N$ et $\delta > 0$ fixés, considérons la diffusion $\tilde{X}^\delta = (\tilde{X}_1^\delta, \tilde{X}_2^\delta)$ sur $M_1 \times M_2$, décrite heuristiquement par

$$\begin{cases} d\tilde{X}_{1,t}^\delta = dB_{1,t} + b_1(\tilde{X}_1^\delta, \theta)\,dt \\ d\tilde{X}_{2,t}^\delta = \sqrt{\delta}\,dB_{2,t} + b_2(\tilde{X}_1^\delta, \theta)\,dt \end{cases}$$

où (B_1, B_2) est un mouvement brownien sur $M_1 \times M_2$, supposé indépendant de $\tilde{X}_0^\delta$.

Il existe alors une unique probabilité invariante $\mu_{\theta,\delta}$ pour cette diffusion. Supposons que $\mu_{\theta,\delta}$ converge étroitement quand δ tend vers 0^+, vers une probabilité μ_θ. Cette dernière est alors invariante pour le processus $\tilde{X}$, et c'est celle-ci que l'on choisit.

Remarque Cette hypothèse de convergence étroite est vérifiée (et on peut décrire la probabilité μ_θ obtenue) dans le cas étudié par Hwang où $M = M_2$ et où $b(\cdot, \theta)$ dérive d'un potentiel $U(\cdot, \theta) \in C^\infty(M)$, si on impose certaines conditions sur l'ensemble des minima globaux de $U(\cdot, \theta)$ et sur le comportement de $U(\cdot, \theta)$ à son voisinage (*cf.* [5], Hwang se place sur $\mathbb{R}^n$, mais, ses résultats s'adaptent immédiatement au cas d'une variété riemannienne compacte).

Soit une fonction $f \in C^\infty(M \times N)$ fixée. On lui associe, pour $\theta \in N$,

$$F(\theta) = \int_M f(x, \theta)\mu_\theta(dx)$$

et comme dans le cas non dégénéré, on cherche à trouver les minima globaux de ce potentiel.

On est amené, tout naturellement, à s'intéresser aux algorithmes de recuit "doublement partiels" décrits heuristiquement, sur $M_1 \times M_2 \times M_1 \times M_2 \times N$, par

$$\begin{cases} dX_{1,t} = dB_{1,t} + b_1(X_t, \Theta_t)\,dt \\ dX_{2,t} = \sqrt{\delta_t}\,dB_{2,t} + b_2(X_t, \Theta_t)\,dt \\ dY_{1,t} = dB_{3,t} + b_1(Y_t, \Theta_t + h_t)\,dt \\ dY_{2,t} = \sqrt{\delta_t}\,dB_{4,t} + b_2(Y_t, \Theta_t + h_t)\,dt \\ d\Theta_t = \sqrt{\gamma_t}\,dW_t - \gamma_t\beta_t l_{h_t}(X_{1,t}, X_{2,t}, Y_{1,t}, Y_{2,t}, \Theta_t)\,dt \end{cases} \tag{33}$$

où (B_1, B_2, B_3, B_4, W) est un mouvement brownien sur $M_1 \times M_2 \times M_1 \times M_2 \times N$, où β, γ, h et δ sont des évolutions appartenant à $C^1([0, +\infty[, \mathbb{R}_+^*)$ et où l_n est défini, comme dans l'introduction, par

$$\forall x_1, y_1 \in M_1, \quad \forall x_2, y_2 \in M_2, \quad \forall \theta \in N, \quad \forall h > 0,$$

$$l_h(x_1, x_2, y_1, y_2, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} f((x_1, x_2), \theta) + \frac{1}{h}[f((y_1, y_2), \theta) - f((x_1, x_2), \theta)]$$

Pour fixer les idées, supposons que l'on parte d'une probabilité initiale m sur $M_1 \times M_2 \times M_1 \times M_2 \times N$; la loi de la diffusion $(X_1, X_2, Y_1, Y_2, \Theta)$ est alors uniquement déterminée. Notons, pour $t \geq 0$, n_t la loi de Θ_t.

Le résultat suivant justifie l'algorithme (33), en montrant qu'il existe des évolutions qui font converger, en temps grand, Θ_t vers les minima globaux de F.

Théorème 13 *Supposons que la convergence de $\int f(x, \theta)\mu_{\theta,\delta}(dx)$ vers $\int f(x, \theta)\mu_\theta(dx)$ soit uniforme en $\theta \in N$.*

Il existe alors deux constantes $c_1, c_2 \geq 0$, telles que le fait de prendre, pour tout t assez grand,

$$\beta_t = k^{-1}\ln(t)$$

$$\gamma_t = \beta_t^{-p}$$

$$h_t = \beta_t^{-q}$$

$$\delta_t = \ln^{-1}(\beta_t^r)$$

avec $k > c_1$, $r > 0$, $q > c_2 r$ et $p > 2 + 4q + c_2 r$, entraîne que pour toute constante $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{t \to +\infty} n_t(\{F - \min(F) \geq \varepsilon\}) = 0$$

Pour la démonstration de ce théorème, on commence par reprendre l'étude des probabilités invariantes présentée précédemment, en rajoutant un paramètre $0 < \delta \leq 1$ et en explicitant son influence sur les diverses constantes qui apparaissent. Signalons les modifications les plus importantes.

Dans la seconde section, il faut considérer, à la place de (2), la diffusion sur $V_1 \times V_2 \times N$ décrite heuristiquement par

$$\begin{cases} dX_{1,t} = dB_{1,t} + b_1(X_t, \Theta_t)\,dt \\ dX_{2,t} = \delta^{1/2}\,dB_{2,t} + b_2(X_t, \Theta_t)\,dt \\ d\Theta_t = \gamma^{1/2}\,dW_t + \gamma\beta b_3(X_t, \Theta_t)\,dt \end{cases}$$

(avec des notations évidentes), et s'intéresser à sa probabilité invariante $\mu_{\gamma,\beta,\delta}$, de densité $\exp(u_{\gamma,\beta,\delta})$.

L'équivalent de la proposition 2 s'énonce alors:

Proposition 14 *Il existe une constante $K \geq 0$, ne dépendant que des structures riemanniennes de V_1, V_2 et N et du champ $b = (b_1, b_2, b_3)$, telle que pour tout $0 < \gamma \leq 1$, tout $0 < \delta \leq 1$ et tout $\beta \geq 0$, on ait*

$$\| |\nabla_1 u_{\gamma,\beta,\delta}|_1 \|_\infty \leq K[\delta^{-1/2} + \gamma^{1/2}\beta]$$

$$\| |\nabla_2 u_{\gamma,\beta,\delta}|_2 \|_\infty \leq K[\delta^{-1} + \delta^{-1/2}\gamma^{1/2}\beta]$$

$$\| |\nabla_3 u_{\gamma,\beta,\delta}|_3 \|_\infty \leq K[(\gamma\delta)^{-1/2} + \beta]$$

$$\| \Delta_1 u_{\gamma,\beta,\delta} \|_\infty \leq K[\delta^{-1} + \gamma\beta^2]$$

$$\| \Delta_2 u_{\gamma,\beta,\delta} \|_\infty \leq K[\delta^{-2} + \delta^{-1}\gamma\beta^2]$$

$$\| \Delta_3 u_{\gamma,\beta,\delta} \|_\infty \leq K[(\gamma\delta)^{-1} + \beta^2]$$

On en déduit, comme dans le corollaire 3, une inégalité de Harnack partielle: Il existe une constante $K \geq 0$, telle que pour tout $\theta \in N$, tout $0 < \gamma \leq 1$, tout $0 < \delta \leq 1$ et tout $\beta \geq 0$, on ait

$$\|\ln(\mu_{\gamma,\beta,\delta}(\cdot|\theta))\|_\infty \leq K[\delta^{-1} + \delta^{-1/2}\gamma^{1/2}\beta]$$

Dans la première partie de la troisième section, il faut s'intéresser, pour $\theta \in N$ et $0 < \delta \leq 1$, à l'opérateur $L_{\theta,\delta}$ agissant sur $C^2(V_1 \times V_2)$ et défini par

$$L_{\theta,\delta\cdot} = \frac{1}{2}\Delta_1 \cdot + \langle b_1(x, \theta), \nabla_1 \cdot \rangle_1 + \frac{\delta}{2}\Delta_2 \cdot + \langle b_2(x, \theta), \nabla_2 \cdot \rangle_2$$

(on peut aussi se ramener directement à l'opérateur L_θ décrit dans la section 3, en considerant sur $V_1 \times V_2$ le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_1 + \delta^{-1}\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ et la structure riemannienne engendrée.)

Pour étudier la diffusion homogène dans le temps associée, on applique la formule de Girsanov, non plus par rapport au mouvement brownien sur $V_1 \times V_2$, mais par rapport au processus associé à l'opérateur $2^{-1}(\Delta_1 + \delta\Delta_2)$ (ce qui revient à considérer un mouvement brownien sur V_1 et un mouvement brownien sur V_2 dont on a multiplié par δ l'échelle du temps).

Les formules donnant $\partial_\theta \mu_{\theta,\delta}$ et $\partial_\theta^2 \mu_{\theta,\delta}$ sont encore valables, mais les estimées que l'on en déduit ne sont plus les mêmes. En effet, les normes des potentiels $A^{\theta,\delta}$ et $\tilde{A}^{\theta,\delta}$, associés, respectivement, à l'opérateur $L_{\theta,\delta}$ et à l'opérateur obtenu à partir de ce dernier par retournement du temps, peuvent se majorer par un terme de la forme $\exp(K\delta^{-1})$, où $K \geq 0$ est une constante ne dépendant que de $V_1 \times V_2$ et de $b = (b_1, b_2)$ (et donc indépendante de $\theta \in N$ et de $0 < \delta \leq 1$).

Les méthodes de la section 3 permettent également d'obtenir que

$$|||\partial_\theta A^{\theta,\delta}||| \le \exp(K\delta^{-1})$$

$$|||\partial_\theta^2 A^{\theta,\delta}||| \le \exp(K\delta^{-1})$$

pour une certaine constante $K \ge 0$, indépendante de $\theta \in N$ et $0 < \delta \le 1$. Le seul point qui ne soit pas immédiat dans les calculs de cette section, c'est de montrer qu'il existe une constante $K \ge 0$, telle que pour tout $\theta \in N$ et tout

$$0 < \delta \le 1, \; |\nabla A^{\theta,\delta}(G_{\theta,\delta})| \le \exp(K\delta^{-1})$$

(équivalent de la majoration (17)). Ceci s'effectue en reprenant intégralement le chapitre 6 de [1], après avoir introduit le paramètre $0 < \delta \le 1$.

Pour la dernière partie de la troisième section, notons que le résultat de la proposition 8 reste exact (quitte à remplacer les indices 2 par des indices 3) et que de plus, pour tout $(x, \theta) \in (V_1 \times V_2) \times N$ fixé, l'application $]0, 1[\ni \delta \mapsto \mu_{\gamma,\beta,\delta}(x, \theta)$ est dérivable et de dérivée

$$\frac{\partial}{\partial\delta}\mu_{\gamma,\beta,\delta}(x,\theta) = \frac{1}{2}\mu_{\gamma,\beta,\delta}(x,\theta)\tilde{A}^{\theta,\delta}(\Delta_2 u_{\gamma,\beta,\delta} + |\nabla_2 u_{\gamma,\beta,\delta}|_2^2)(x,\theta)$$

Les estimées précédentes font apparaître une constante $c_2 \ge 0$, telle que l'énoncé de la proposition 9 de la section 4 se transforme en:

Proposition 15 *Supposons que la convergence de $\mu_{\theta,\delta}(f(\cdot,\theta))$ vers $\mu_\theta(f(\cdot,\theta))$ soit uniforme en $\theta \in N$, et que*

$$\lim_{t\to+\infty} \max\{\beta_t^{-1};\, h_t;\, \delta_t;\, [\gamma_t\beta_t^2 h_t^{-4} + h_t]\exp(c_2\delta_t^{-1})\} = 0 \tag{34}$$

Alors, la projection $\nu_{N,t}$ sur N de ν_t, la probabilité invariante à l'instant t à l'algorithme (34), *satisfait un principe de grandes déviations avec*

$$I = 2(F - F_0)$$

pour fonctionnelle d'action et β_t pour taux, c'est-à-dire, que pour tout borélien A de N, on a

$$-\inf_{\theta\in\mathring{A}} I(\theta) \le \liminf_{t\to+\infty} \beta_t^{-1}\ln(\nu_{N,t}(\mathring{A})) \le \limsup_{t\to+\infty} \beta_t^{-1}\ln(\nu_{N,t}(\bar{A})) \le -\inf_{\theta\in\bar{A}} I(\theta)$$

où $\mathring{A}$ et $\bar{A}$ sont l'intérieur et la fermeture de A.

En effet, pour $\theta \in N$, $\beta \ge 0$ et $0 < \delta \le 1$, notons

$$F_\delta(\theta) = \int_M f(x,\theta)\mu_{\theta,\delta}(dx)$$

et

$$\nu_{\beta,\delta}(\theta) = \left(\int_N \exp(-2\beta F_\delta(\theta'))\, d\theta'\right)^{-1} \exp(-2\beta F_\delta(\theta))$$

En reprenant la démonstration de la proposition 9, on obtient, sous l'hypothèse (34), que

$$\lim_{t\to+\infty} \beta_t^{-1} \sup_{\theta\in N}\left|\ln\left(\frac{\nu_{N,t}}{\nu_{\beta_t,\delta_t}}\right)(\theta)\right| = 0$$

Mais la convergence uniforme en $\theta \in N$ de $\mu_{\theta,\delta}(f(\cdot,\theta))$ vers $\mu_\theta(f(\cdot,\theta))$ et le fait que $\lim_{t\to+\infty}\delta_t = 0$ assurent que

$$\lim_{t\to+\infty} \beta_t^{-1} \sup_{\theta\in N}\left|\ln\left(\frac{\nu_{\beta_t,\delta_t}}{\bar{\nu}_{\beta_t}}\right)(\theta)\right| = 0$$

où comme dans la section 4, on a posé, pour tout $\theta \in N$,

$$\bar{\nu}_\beta(\theta) = \left(\int_N \exp(-2F(\theta'))\, d\theta'\right)^{-1} \exp(-2F(\theta))$$

ce qui permet de retrouver le principe de grandes déviations énoncé ci-dessus.

La proposition 10 est encore vérifiée, si, outre les hypothèses de la proposition précédente, on suppose que l'application $[0, +\infty[\ni t \mapsto (\delta_t\beta_t)^{-1}$ reste bornée.

Quant à la proposition 11, il est clair qu'elle se réécrit sous la forme

Proposition 16 *Pour toutes évolutions β, γ, δ et h appartenant à $C^1([0, +\infty[;\,]0, 1[)$, ν_t est dérivable en $t \ge 0$. Si de plus, on suppose que ces évolutions satisfont les conditions de la proposition 15 et que l'application $[0, +\infty[\ni t \mapsto (\delta_t\beta_t)^{-1}$ reste bornée, alors, il existe une constante $K \ge 0$, dépendant de M_1, de M_2, de b et des fonctions β, γ, δ et h, telle que pour tout $t \ge 0$, on ait*

$$\left\|\frac{d}{dt}\ln(\nu_t)\right\|_\infty \le \gamma_t^{-K}\exp(K\beta_t)\left(\left|\frac{d\beta_t}{dt}\right| + \left|\frac{d\gamma_t}{dt}\right| + \left|\frac{d\delta_t}{dt}\right| + \left|\frac{dh_t}{dt}\right|\right)$$

Avec ces résultats, la démonstration de la section 6 s'adapte sans difficulté pour prouver le théorème 13.

Références

[1] S. Agmon, *Elliptic Boundary Value Problems*, Van Nostrand, 1965.
[2] M. Emery, *Stochastic Calculus in Manifolds*, Springer-Verlag, 1989.
[3] R. Holley, S. Kusuoka et D. Stroock, Asymptotics of the spectral gap with applications to the theory of simulated annealing, *J.F.A.*, **83** (1989), 333–347.
[4] R. Holley et D. Stroock, Annealing via Sobolev inequalities, *C.M.P.*, **115** (1988), 553–569.
[5] C. R. Hwang, Laplace's Method Revisited: Weak convergence of probability measures, *The Annals of Probability*, **8**(6) (1980), 1177–1182.
[6] L. Miclo, Recuit simulé sans potentiel sur une variété riemannienne compacte, à paraître dans *Stochastics and Stochastics Reports*.
[7] L. Miclo, Recuit simulé partiel, preprint, soumis à *Stochastic Processes and Their Applications*.

Stochastics and Stochastics Reports, Vol. 46, pp. 269–281
Reprints available directly from the publisher
Photocopying permitted by license only

THE INTEGRAL INEQUALITY AND APPLICATIONS TO STABILITY THEOREMS OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RESPECT TO SEMIMARTINGALES*

TAKESHI TANIGUCHI

Department of Mathematics, Kurume University, Miimachi, Kurume, Fukuoka 830, Japan

(Received 6 June 1991; in final form 3 January 1993)

The purpose of this paper is to give an estimate in mean square of the solutions to perturbed linear stochastic differential equations with respect to continuous semimartingales. For this end, first of all, we consider an integral inequality with respect to Lebesgue–Stieltjes integral, which provides generalizations of Gronwall–Bellman inequality. As an application we present a uniform asymptotic stability theorem in the large in mean square of the zero solution of the above mentioned equation.

KEY WORDS Stability in mean square, integral inequality, stochastic differential equation, semi-martingale.

1 INTRODUCTION

The stability theorems of stochastic differential equations were discussed by R. Z. Hasminskii and others in the 1960's and many results can be found in the book [1]. And after the Russian school's researches there is a large literature regarding the qualitative theory of solutions of stochastic differential equations. Furthermore, because a number of problems of physics, chemistry, control engineering, economics and the other practical sciences are modeled by suitable stochastic differential equations, it seems that the importance and the neccessity of the qualitative study of their solutions are increasing more and more at the present time.

The purpose of this paper is to consider the estimation in mean square of solutions of perturbed linear stochastic differential equations with respect to continuous semimartingales and to give a uniform asymptotic stability theorem in the large in mean square of the zero solution as an application. To this end, first of all, we discuss the Lebesgue–Stieltjes integral inequality with respect to a monotone nondecreasing process.

We note that X. Mao [5] recently presents many interesting stability theorems for the above mentioned equations.

---

* This paper was written while the author was visiting the Mathematics Research Centre at University of Warwick on leave from Kurume University from August 1990 to October 1991.