Recuit simulé relativement à une famille de potentiels d'interactions, de rang fini et invariante par translations.

Laurent Miclo

60, rue des cigognes
67540 OSTWALD

Résumé :

L'espace des phases est l'espace de dimension infinie $M^{\mathbb{Z}^d}$, où M est une variété riemannienne, compacte, connexe et orientée. On le supposera muni d'une famille de potentiels d'interactions, de rang fini, invariante par translations, et on s'intéressera aux diffusions sur $M^{\mathbb{Z}^d}$, invariantes par translations dont la dérive est le gradient formel des potentiels d'interactions. Le carré de l'amplitude du terme de diffusion sera appelé la température et pourra dépendre du temps. Holley et Stroock ont montré qu'à température fixée, l'énergie libre associée à ce système décroissait avec le temps. Nous allons montrer qu'elle tend vers 0. L'interêt de ce résultat, outre qu'il traduit une propriété d'ergodicité de la diffusion considérée, est de pouvoir s'adapter à des situations où la température est variable, notamment pour certains taux de décroissance de celle-ci vers 0 en l'infini. On en déduira des résultats ayant trait à la convergence de l'algorithme de recuit simulé sur $M^{\mathbb{Z}^d}$. La méthode est très générale, et se transpose facilement au cas où M est un ensemble fini (on considère alors un processus de sauts sur $M^{\mathbb{Z}^d}$), les détails paraîtront dans un article qui suit.

1. Présentation du cadre et des résultats obtenus

On va reprendre, en grande partie, le cadre présenté par Holley et Stroock dans [3].

Soit M une variété riemannienne, C^∞, compacte, connexe et orientée. On considère l'espace des phases $\mathcal{X} = M^{\mathbb{Z}^d}$, avec $d \in \mathbb{N}^*$, muni de sa topologie produit et de la tribu borélienne associée $\mathcal{B}$. Introduisons quelques notations et conventions que nous utiliserons tout au long de cet article :

Pour $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, l'application $x \in \mathcal{X} \mapsto x_\Lambda \in M^\Lambda$ désignera la projection canonique de $\mathcal{X}$ sur M^Λ. $\mathcal{B}_\Lambda$ sera l'image réciproque, par cette projection, de la tribu borélienne de M^Λ (muni de la topologie produit). On identifiera les fonctions $\mathcal{B}_\Lambda$-mesurables de $\mathcal{X}$ avec les fonctions boréliennes de M^Λ. Si μ est une probabilité sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, μ_Λ désignera sa restriction à $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_\Lambda)$ et on considérera également μ_Λ comme une probabilité sur M^Λ (et, plus généralement, on identifiera, toujours au moyen de la projection canonique, les probabilités sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_\Lambda)$ avec les probabilités sur M^Λ). Pour $x \in M^\Lambda$ et $y \in M^{\Lambda'}$, où Λ et Λ' sont deux sous ensembles de $\mathbb{Z}^d$, on conviendra de noter xy l'élément de $M^{\Lambda \cup \Lambda'}$ défini par :

$$\forall\, k \in \Lambda \cup \Lambda',\ (xy)_k = \begin{cases} x_k & , \text{ si } k \in \Lambda, \\ y_k & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

(Attention, pour $k \in \Lambda \cap \Lambda'$, les coordonnées de x effacent celles de y.)

La notation $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$ signifiera que Λ est un sous ensemble fini, non vide, de $\mathbb{Z}^d$, et on notera $|\Lambda|$ son cardinal. Pour $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$, $<\ .\ ,\ .\ >_\Lambda$, $|\ .\ |_\Lambda$, λ_Λ, div_Λ, ∇_Λ, seront, respectivement, le produit scalaire, la norme, la probabilité, la divergence et le gradient associés à la structure riemannienne (produit si $|\Lambda| > 1$) de M^Λ. Si $\Lambda = \{k\}$, où k est un élément de $\mathbb{Z}^d$, on laissera tomber les accolades dans les notations ; ainsi x_k représentera la coordonnée au site k de l'élément $x \in \mathcal{X}$, et on a, pour tout $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$, les relations suivantes : $|\ .\ |_\Lambda^2 = \sum_{k \in \Lambda} |\ .\ |_k^2$, $\lambda_\Lambda = \bigotimes_{k \in \Lambda} \lambda_k$, $\nabla_\Lambda = (\nabla_k)_{k \in \Lambda}$, etc. Quand le contexte les sous-entendra, on laissera tomber les indices. Ainsi pour $f \in C^1(M^\Lambda)$, on écrira $|\nabla_\Lambda f|$, voire $|\nabla f|$, à la place de $|\nabla_\Lambda f|_\Lambda$.

D'autre part, pour $k \in \mathbb{Z}^d$, on notera $S_k\ : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ l'opérateur de translation de k, i.e.

$$\forall\, x \in \mathcal{X},\ \forall\, i \in \mathbb{Z}^d,$$
$$(S_k(x))_i = x_{k+i}$$

On suppose $\mathcal{X}$ muni d'une famille $\mathcal{J}$ de potentiels d'interactions $(J_F)_{F \subset\subset \mathbb{Z}^d}$, où pour tout $F \subset\subset \mathbb{Z}^d$, J_F est une fonction $\mathcal{B}_F$-mesurable et, considérée comme fonction sur M^F, J_F est C^∞.

On supposera que $\mathcal{J}$ est de rang fini, i.e. qu'il existe $R \in \mathbb{N}^*$ (le rang de l'interaction) tel que $\mathrm{diam}(F) \geq R$ implique $J_F \equiv 0$, et est invariante par translation :

$$\forall\, F \subset\subset \mathbb{Z}^d,\ \forall\, k \in \mathbb{Z}^d,$$
$$J_{F+k} = J_F \circ S_k$$

Décrivons les processus stochastiques que nous considèrerons : on suppose donné un espace de probabilité filtré $(\Omega,\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\ P)$, sur lequel est définie une diffusion $(X_t)_{t\geq 0}$, à valeurs dans $\mathcal{X}$, vérifiant :

$$(1) \qquad \begin{cases} \bullet\ \forall\ i \in \mathbb{Z}^d, \\ \qquad dX_{t,i} = \sqrt{\sigma(t)}dB_{t,i} - \dfrac{1}{2}\nabla_i \left(\displaystyle\sum_{F \ni i} J_F\right)(X_t)dt \\ \bullet\ X_0 \text{ est de loi } m \text{ et est indépendant de } (B_t)_{t\geq 0} \end{cases}$$

où * $\sigma \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+^*)$ représentera l'évolution de la température.

* $(B_t)_{t\geq 0}$ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-mouvement brownien sur $\mathcal{X}$, c'est à dire que pour $i \in \mathbb{Z}^d$, les $(B_{t,i})_{t\geq 0}$ sont des $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-mouvements browniens sur M, mutuellement indépendants.

* m est une probabilité sur $\mathcal{X}$ invariante par translations.

Pour l'existence et l'unicité en loi de cette diffusion, ainsi que pour la formulation du problème de martingales associé, on renvoie au paragraphe suivant.

On notera, pour $t \geq 0$, m_t la loi de X_t.

Nous allons définir l'énergie libre spécifique d'une probabilité sur $\mathcal{X}$, relativement à la température $\sigma(t)$ et à la famille $\mathcal{J}$. Cette notion se révélera être un outil très puissant pour l'étude du comportement asymptotique des m_t (sous diverses conditions sur σ). Mais il nous faut, en préliminaire, introduire les notations suivantes :

Pour $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$ et pour $t \geq 0$, on pose :

$$\begin{aligned} U_\Lambda &= \sum_{F \subset \Lambda} J_F \\ g_{\Lambda,t}(\ .\ ) &= \frac{\exp(-\frac{1}{\sigma(t)}U_\Lambda(\ .\ ))}{\int_{M^\Lambda} \exp(-\frac{1}{\sigma(t)}U_\Lambda(y))\ \lambda_\Lambda(dy)} \end{aligned}$$

Soit p une probabilité sur $\mathcal{X}$.

On définit l'énergie libre, sur Λ, de p par rapport à $g_{\Lambda,t}$, par :

$$I_{\Lambda,t}(p) = \begin{cases} \displaystyle\int_{M^\Lambda} p_\Lambda \ln(\frac{p_\Lambda}{g_{\Lambda,t}})\ d\lambda_\Lambda & \text{, si } p_\Lambda \ll \lambda_\Lambda \text{, et en notant alors encore } p_\Lambda \text{ la densité } \dfrac{dp_\Lambda}{d\lambda_\Lambda}, \\ +\infty & \text{, sinon.} \end{cases}$$

L'énergie libre spécifique de p, relativement à la température $\sigma(t)$ et à la famille $\mathcal{J}$, est alors donnée par :

$$I_t(p) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} I_{\Lambda_n,t}(p)$$

où $\Lambda_n = \{u \in \mathbb{Z}^d\ /\ \forall\ 1 \leq i \leq d,\ -nR < u_i \leq nR\}$.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le premier résultat que nous démontrerons et qui peut s'interpréter, grâce au principe variationnel (qui affirme qu'une mesure invariante par translations annulant l'énergie libre $I_0(\ .\ )$ est une mesure de Gibbs relativement à la famille de potentiels $\left(\frac{J_F}{\sigma(0)}\right)_{F\subset\subset \mathbb{Z}^d}$), et du fait que l'énergie libre $I_0(\ .\ )$ est une fonctionnelle s.c.i. (pour la topologie étroite) sur l'ensemble des mesures invariantes par translations, comme un résultat d'ergodicité pour la diffusion $(X_t)_{t\geq 0}$. Il nous permet également de retrouver un résultat bien connu de Holley et Stroock ; toute mesure m invariante par translations et stationnaire pour le processus (X_t), est une mesure de Gibbs relativement à la famille de potentiels $\left(\frac{J_F}{\sigma(0)}\right)_{F\subset\subset \mathbb{Z}^d}$.

Théorème 1

Supposons que σ soit constant. Alors $I_t(m_t)$ $(=I_0(m_t))$ décroit vers 0 quand t tend vers l'infini.

Notons que la décroissance de $I_t(m_t)$ est, à température fixée, un résultat classique, cf.[1]. D'autre part, précisons que la démonstration nous fournit en fait des renseignements plus quantitatifs, notamment on peut estimer la vitesse de convergence vers zéro.

Pour pouvoir décrire le second résultat, il faut introduire un élément c de $[0, +\infty]$. Cette constante sera l'analogue, en dimension infinie, des nombres définis ci-dessous lorsque l'espace considéré est une variété de dimension finie.

Soit N une variété riemannienne, compacte et connexe. Soit U une fonction C^∞ définie sur N. Nous allons définir une constante $c(N, U)$, qui est liée à l'étude des algorithmes optimums de recuit simulé sur N, relativement à la fonction U (cf. [5]).

Pour $x, y \in N$, on définit $\mathcal{C}_{x,y}$ comme étant l'ensemble des chemins allant de x à y (i.e. l'ensemble des fonctions continues $\varphi\ :\ [0,1] \to N$ telles que $\varphi(0) = x$ et $\varphi(1) = y$).

Pour $\varphi \in \mathcal{C}_{x,y}$, on définit l'élévation de φ par :

$$e(\varphi) = \sup_{0\leq t\leq 1} U(\varphi(t)) - U(x) - U(y) + U_0$$

où $U_0 = \min_{z\in N} U(z)$.

La constante $c(N, U)$ est alors donnée par :

$$c(N,U) = \sup_{x,y\in N}\left(\inf_{\varphi\in\mathcal{C}_{x,y}} e(\varphi)\right)$$

Nous pouvons, maintenant, décrire la constante c :

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\eta \in \mathcal{X}$, $x \in M^{\Lambda_n}$, on pose :

$$H_{n,\eta}(x) = \sum_{F\cap\Lambda_n\neq\emptyset} J_F(x\eta)$$

et on définit :

$$c_n = \sup_{\eta \in \mathcal{X}} c(M^{\Lambda_n}, H_{n,\eta})$$

puis :

$$c = \liminf_{n \to \infty} c_n$$

(On montrera, à la fin de la section 5, que $d = 1$ implique $c < \infty$.)

Le second résultat s'énonce alors :

Théorème 2

Si pour t assez grand on a $\sigma(t) = \dfrac{K(t)}{\ln(t)}$, K étant une fonction croissant vers l'infini en l'infini, telle que σ décroisse vers zéro en l'infini, alors

$$\lim_{t \to \infty} \sigma(t) I_t(m_t) = 0$$

De plus, si on sait que la constante c définie ci-dessus est finie, il suffit de prendre, pour t assez grand, $\sigma(t) = \dfrac{K}{\ln(t)}$, avec $K > c$, pour obtenir

$$\lim_{t \to \infty} \sigma(t) I_t(m_t) = 0$$

On déduira de ce théorème, à la section 6, des résultats ayant trait à la convergence de l'algorithme de recuit simulé sur $\mathcal{X}$. Notons, de plus, que comme la démonstration du théorème nous donne des estimées plus précises, il est possible d'obtenir des informations sur la vitesse de convergence de cet algorithme.

L'idée de la démonstration des théorèmes 1 et 2 est très simple, et c'est celle que nous avons déjà utilisée pour étudier les algorithmes de recuit simulé en temps continu, sur un ensemble fini, sur une variété riemannienne compacte ou sur $\mathbb{R}^n$. Il s'agit d'obtenir des inégalités différentielles pour $I_t(m_t)$ (ou pour $\sigma(t) I_t(m_t)$).

2. Rappel et adaptation de résultats de Holley et Stroock

On va reprendre des résultats, qui, dans le cas où M est le cercle, sont présentés dans [2], et qui sont généralisés, pour une variété riemannienne, compacte et orientée, dans [1] et [3]. Dans ces travaux, la température était supposée constante, néanmoins, il est facile de voir que certains de leur résultats (notamment ceux qui traitent de l'existence et de l'unicité de la diffusion considérée, ainsi que ceux qui découlent d'applications du calcul de Malliavin), se transposent directement à une situation où la température est variable et est minorée par des constantes strictement positives sur les intervalles compacts du temps. La seule différence importante apparaît sous la forme d'un terme supplémentaire dans l'expression de la dérivée, par rapport au temps, de l'énergie libre (cf. la proposition 3).

Commençons par préciser qu'il y a existence et unicité en loi de la diffusion décrite par (1), cette loi apparaissant comme l'unique solution au problème de martingales présenté ci-dessous. Remarquons que cette caractérisation nous sera suffisante, puisqu'on ne s'intéressera qu'à l'évolution de la loi de X_t, et non à d'éventuelles propriétés trajectorielles du processus X.

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions réelles sur $\mathcal{X}$, qui ne dépendent que d'un nombre fini de coordonnées, et qui sont alors C^∞ en ces coordonnées.

Pour $t \geq 0$, on définit l'opérateur L_t sur $\mathcal{D}$ par : si $f \in \mathcal{D}$,

$$L_t f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \frac{\sigma(t)}{2} \exp\Big(\frac{1}{\sigma(t)} \sum_{F \ni i} J_F\Big) \mathrm{div}_i \left(\exp\Big(-\frac{1}{\sigma(t)} \sum_{F \ni i} J_F\Big) \nabla_i f \right)$$

Soit $\Theta = C([0, +\infty[; \mathcal{X})$.

Pour $t \geq 0$, on note $\widetilde{X}_t \;:\; \Theta \to \mathcal{X}$ l'application canonique qui, à une trajectoire, associe sa position à l'instant t, et on pose $\mathcal{M}_t = \sigma(\widetilde{X}_s \;;\; s \leq t)$, et $\mathcal{M} = \sigma(\widetilde{X}_t \;;\; t \geq 0)$ ($\mathcal{M}$ coïncide avec la tribu borélienne de Θ, si on munit ce dernier de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $[0,+\infty[$).

On sait alors que, pour toute probabilité initiale m sur $\mathcal{X}$, il existe une unique probabilité P_m sur $(\Theta, \mathcal{M})$, telle que :

$$\begin{cases} \bullet\ \widetilde{X}_0 \circ P_m = m \\ \\ \bullet\ \forall\, f \in \mathcal{D} \\ \left(f(\widetilde{X}_\cdot) - \int_0^\cdot L_s f(\widetilde{X}_s)\, ds, (\mathcal{M}_t)_{t \geq 0}, P_m \right) \text{ est une martingale.} \end{cases}$$

De plus, il est connu que la famille $(P_{\delta_x};\ x \in \mathcal{X})$ forme une famille markovienne forte et continue au sens de Feller.

On peut alors, par exemple, prendre pour $(X_t)_{t \geq 0}$, le processus canonique $(\widetilde{X}_t)_{t \geq 0}$ sous P_m.

D'autre part une application du calcul de Malliavin, développée dans [2], permet d'obtenir les faits suivants :

$$\forall\, t > 0,\ \forall\, \Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d,$$
$$(m_t)_\Lambda \ll \lambda_\Lambda$$

On notera encore $m_{t,\Lambda}$ la densité $\dfrac{d(m_t)_\Lambda}{d\lambda_\Lambda}$.

Alors $m_{t,\Lambda} \in C^\infty(M^\Lambda)$ et l'application $\begin{cases}]0,\infty[\to C^\infty(M^\Lambda) \\ \quad t \mapsto m_{t,\Lambda} \end{cases}$ est continue (et même C^2, comme on peut le voir à l'aide des équations de Fokker-Planck généralisées, associées aux $(m_{t,\Lambda})_{t>0,\Lambda\subset\subset\mathbb{Z}^d}$ (présentées un peu plus loin), et du fait que σ est C^1).

On obtient également, que pour tout $T \geq 1$, il existe un nombre $C(T) > 0$, tel que :

$$\forall\, \Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d,\ \forall\, k \in \Lambda,\ \forall\, t \in \left[\frac{1}{T}, T\right], \tag{2}$$
$$\int \frac{|\nabla_k m_{t,\Lambda}|^2}{m_{t,\Lambda}} d\lambda_\Lambda \ \leq C(T)$$

le fait important, dans cette inégalité, est qu'elle est vérifiée $\forall\, \Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$.

Jusqu'à présent on n'a pas eu besoin de l'invariance par translations de m, et en fait les théorèmes 1 et 2 sont vérifiés sans cette hypothèse. Mais ces théorèmes ne sont intéressants que par leurs conséquences, qui, elles, nécessitent l'invariance par translations. Nous supposerons donc dans la suite que cette condition sur m est vérifiée. Ceci implique, puisque les potentiels d'interactions sont également invariants par translations, que pour tout $t \geq 0$, m_t est invariant par translations. Ainsi la limsup qui définit $I_t(m_t)$ est en fait une limite (éventuellement $+\infty$). Mais (2) permet de voir, à l'aide d'inégalités de Sobolev-logarithmiques pour les λ_Λ , que $\forall\, t > 0,\ I_t(m_t) < +\infty$, cf.[1].

Nous allons maintenant adapter les calculs des pages 54 et 55 de [2] à notre situation. Que le lecteur ne s'effraie pas, ceux-ci sont plus difficiles à écrire qu'à faire. Ils visent à prouver la proposition 3 présentée un peu plus loin.

On va, dans un premier temps, évaluer $\dfrac{\partial}{\partial t} m_{t,\Lambda}$.

Soient $t > 0$ et $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$ fixés.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}$, $\mathcal{B}_\Lambda$-mesurable. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int \varphi(\eta)\ m_t(d\eta) &= \int L_t\varphi(\eta)\ m_t(d\eta) \\ &= \int_{M^{\bar\Lambda}} L_t\varphi(\eta_{\bar\Lambda}) m_{t,\bar\Lambda}(\eta_{\bar\Lambda})\ \lambda_{\bar\Lambda}(d\eta_{\bar\Lambda}) \end{aligned}$$

où $\bar\Lambda = \{u \in \mathbb{Z}^d \ /\ \exists\, v \in \Lambda,\ \text{vérifiant } |u - v| < R\}$

(rappelons que $|u| = \sum_{i=1}^d |u_i|$, et que R est le rang de l'interaction.)

On notera aussi :

$$\breve{\Lambda} = \{u \in \mathbb{Z}^d /\ \forall\, v \in \Lambda^{\text{compl.}},\ |u-v| \geq R\}$$
$$\breve{\partial}\Lambda = \Lambda \setminus \breve{\Lambda}$$
$$\bar{\partial}\Lambda = \bar{\Lambda} \setminus \Lambda$$

(On aura remarqué que $L_t\varphi$ est $\mathcal{B}_{\bar{\Lambda}}$-mesurable.)

Et on posera également $H_k = \sum_{F \ni k} J_F$.

Ainsi d'après le calcul précédent :

$$\frac{d}{dt}\int_{M^\Lambda} \varphi(\eta_\Lambda) m_{t,\Lambda}(\eta_\Lambda)\ \lambda_\Lambda(d\eta_\Lambda)$$
$$= \frac{\sigma(t)}{2} \sum_{k\in\Lambda} \int_{M^{\bar{\Lambda}}} \exp(\frac{H_k(\eta_{\bar{\Lambda}})}{\sigma(t)})\ \mathrm{div}_k \left(\exp(-\frac{H_k}{\sigma(t)})\nabla_k\varphi\right)(\eta_{\bar{\Lambda}})\ m_{t,\bar{\Lambda}}(\eta_{\bar{\Lambda}})\ \lambda_{\bar{\Lambda}}(d\eta_{\bar{\Lambda}})$$
$$= \frac{\sigma(t)}{2} \sum_{k\in\breve{\Lambda}} \int_{M^{\Lambda}} \exp(\frac{H_k(\eta_{\Lambda})}{\sigma(t)})\ \mathrm{div}_k \left(\exp(-\frac{H_k}{\sigma(t)})\nabla_k\varphi\right)(\eta_{\Lambda})\ m_{t,\Lambda}(\eta_{\Lambda})\ \lambda_{\Lambda}(d\eta_{\Lambda})$$
$$+\frac{\sigma(t)}{2} \sum_{k\in\breve{\partial}\Lambda} \int_{M^{\bar{\Lambda}}} \exp(\frac{H_k(\eta_{\bar{\Lambda}})}{\sigma(t)})\ \mathrm{div}_k \left(\exp(-\frac{H_k}{\sigma(t)})\nabla_k\varphi\right)(\eta_{\bar{\Lambda}})\ m_{t,\bar{\Lambda}}(\eta_{\bar{\Lambda}})\ \lambda_{\bar{\Lambda}}(d\eta_{\bar{\Lambda}})$$
$$= \frac{\sigma(t)}{2} \sum_{k\in\breve{\Lambda}} \int_{M^{\Lambda}} g_{\Lambda,t}^{-1}(\eta_\Lambda)\ \mathrm{div}_k\,(g_{\Lambda,t}\nabla_k\varphi)\,(\eta_\Lambda)\ m_{t,\Lambda}(\eta_\Lambda)\ \lambda_\Lambda(d\eta_\Lambda)$$
$$+\frac{\sigma(t)}{2} \sum_{k\in\breve{\partial}\Lambda} \int_{M^{\bar{\Lambda}}} g_{\bar{\Lambda},t}^{-1}(\eta_{\bar{\Lambda}})\ \mathrm{div}_k\left(g_{\bar{\Lambda},t}\nabla_k\varphi\right)(\eta_{\bar{\Lambda}})\ m_{t,\bar{\Lambda}}(\eta_{\bar{\Lambda}})\ \lambda_{\bar{\Lambda}}(d\eta_{\bar{\Lambda}})$$
$$= -\frac{\sigma(t)}{2} \sum_{k\in\breve{\Lambda}} \int_{M^{\Lambda}} \left\langle \nabla_k\left(\frac{m_{t,\Lambda}}{g_{\Lambda,t}}\right)(\eta_\Lambda)\ ,\ g_{\Lambda,t}(\eta_\Lambda)\nabla_k\varphi(\eta_\Lambda)\right\rangle_k\ \lambda_\Lambda(d\eta_\Lambda)$$
$$-\frac{\sigma(t)}{2} \sum_{k\in\breve{\partial}\Lambda} \int_{M^{\bar{\Lambda}}} \left\langle \nabla_k\left(\frac{m_{t,\bar{\Lambda}}}{g_{\bar{\Lambda},t}}\right)(\eta_{\bar{\Lambda}})\ ,\ g_{\bar{\Lambda},t}(\eta_{\bar{\Lambda}})\nabla_k\varphi(\eta_{\bar{\Lambda}})\right\rangle_k\ \lambda_{\bar{\Lambda}}(d\eta_{\bar{\Lambda}})$$
$$= \frac{\sigma(t)}{2} \sum_{k\in\breve{\Lambda}} \int_{M^{\Lambda}} \varphi(\eta_\Lambda)\ \mathrm{div}_k\left(g_{\Lambda,t}\nabla_k\left(\frac{m_{t,\Lambda}}{g_{\Lambda,t}}\right)\right)(\eta_\Lambda)\ \lambda_\Lambda(d\eta_\Lambda)$$
$$+\frac{\sigma(t)}{2} \sum_{k\in\breve{\partial}\Lambda} \int_{M^{\bar{\Lambda}}} \varphi(\eta_{\bar{\Lambda}})\ \mathrm{div}_k\left(g_{\bar{\Lambda},t}\nabla_k\left(\frac{m_{t,\bar{\Lambda}}}{g_{\bar{\Lambda},t}}\right)\right)(\eta_{\bar{\Lambda}})\ \lambda_{\bar{\Lambda}}(d\eta_{\bar{\Lambda}})$$

Ceci étant vérifié $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$, $\mathcal{B}_\Lambda$-mesurable, on peut conclure que :

$$\frac{\partial}{\partial t} m_{t,\Lambda}(\eta_\Lambda) = \frac{\sigma(t)}{2}\sum_{k\in\breve{\Lambda}} \mathrm{div}_k\left(g_{\Lambda,t}\nabla_k\left(\frac{m_{t,\Lambda}}{g_{\Lambda,t}}\right)\right)(\eta_\Lambda)$$
$$+\frac{\sigma(t)}{2}\sum_{k\in\breve{\partial}\Lambda}\int_{M^{\bar{\partial}\Lambda}} \mathrm{div}_k\left(g_{\bar{\Lambda},t}\nabla_k\left(\frac{m_{t,\bar{\Lambda}}}{g_{\bar{\Lambda},t}}\right)\right)(\eta_\Lambda\eta_{\bar{\partial}\Lambda})\ \lambda_{\bar{\partial}\Lambda}(d\eta_{\bar{\partial}\Lambda})$$

ce qui est l'équation de Fokker-Planck généralisée, pour les $(m_{t,\Lambda})_{t>0,\ \Lambda\subset\subset\mathbb{Z}^d}$.

Nous allons appliquer ce résultat au calcul, pour $t>0$ et $\Lambda\subset\subset\mathbb{Z}^d$, de $\dfrac{d}{dt}I_{\Lambda,t}(m_t)$.

Notons que la formule de Girsanov pour le processus $((X_t)_\Lambda)_{t\geq 0}$, à valeur dans M^Λ, nous permet de voir que pour tout $t>0$, $m_{t,\Lambda}>0$, ce qui justifie les calculs suivants :

$$\frac{d}{dt}I_{\Lambda,t}(m_t) = -\int_{M^\Lambda}\frac{\partial}{\partial t}\ln(g_{\Lambda,t})\ m_{t,\Lambda}\ d\lambda_\Lambda \quad + \quad \int_{M^\Lambda}\frac{\partial}{\partial t}m_{t,\Lambda}\ d\lambda_\Lambda$$
$$+ \quad \int_{M^\Lambda}\ln(\frac{m_{t,\Lambda}}{g_{\Lambda,t}})\ \frac{\partial}{\partial t}m_{t,\Lambda}\ d\lambda_\Lambda$$

Mais le premier terme vaut

$$\int_{M^\Lambda}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{U_\Lambda}{\sigma(t)}+\ln(\int_{M^\Lambda}\exp(-\frac{U_\Lambda}{\sigma(t)})\ d\lambda_\Lambda)\right]m_{t,\Lambda}\ d\lambda_\Lambda$$
$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sigma(t)}\right)\int_{M^\Lambda}U_\Lambda\ m_{t,\Lambda}\ d\lambda_\Lambda-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sigma(t)}\right)\int_{M^\Lambda}U_\Lambda\ g_{\Lambda,t}\ d\lambda_\Lambda$$
$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sigma(t)}\right)\int_{M^\Lambda}U_\Lambda\ (m_{t,\Lambda}-g_{\Lambda,t})\ d\lambda_\Lambda$$

Quant au second terme, il est nul, car il vaut $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int m_{t,\Lambda}\ d\lambda_\Lambda$.

Reste le troisième (le seul qui soit non nul si la température est constante), il vaut :

$$\frac{\sigma(t)}{2}\sum_{k\in\check\Lambda}\int_{M^\Lambda}\ln(\frac{m_{t,\Lambda}}{g_{\Lambda,t}})\ \mathrm{div}_k\left(g_{\Lambda,t}\nabla_k\left(\frac{m_{t,\Lambda}}{g_{\Lambda,t}}\right)\right)\ d\lambda_\Lambda$$
$$+\frac{\sigma(t)}{2}\sum_{k\in\check\partial\Lambda}\int_{M^{\bar\Lambda}}\ln(\frac{m_{t,\Lambda}}{g_{\Lambda,t}})\ \mathrm{div}_k\left(g_{\bar\Lambda,t}\nabla_k\left(\frac{m_{t,\bar\Lambda}}{g_{\bar\Lambda,t}}\right)\right)\ d\lambda_{\bar\Lambda}$$
$$=-\frac{\sigma(t)}{2}\sum_{k\in\check\Lambda}\int_{M^\Lambda}\left\langle\nabla_k\ln(\frac{m_{t,\Lambda}}{g_{\Lambda,t}})\ ,\ \nabla_k\left(\frac{m_{t,\Lambda}}{g_{\Lambda,t}}\right)\right\rangle g_{\Lambda,t}\ d\lambda_\Lambda$$
$$-\frac{\sigma(t)}{2}\sum_{k\in\check\partial\Lambda}\int_{M^{\bar\Lambda}}\left\langle\nabla_k\ln(\frac{m_{t,\Lambda}}{g_{\Lambda,t}})\ ,\ \nabla_k\left(\frac{m_{t,\bar\Lambda}}{g_{\bar\Lambda,t}}\right)\right\rangle g_{\bar\Lambda,t}\ d\lambda_{\bar\Lambda}$$
$$=-\frac{\sigma(t)}{2}\sum_{k\in\check\Lambda}\int_{M^\Lambda}\frac{g_{\Lambda,t}}{m_{t,\Lambda}}\left\langle\nabla_k\left(\frac{m_{t,\Lambda}}{g_{\Lambda,t}}\right)\ ,\ \nabla_k\left(\frac{m_{t,\Lambda}}{g_{\Lambda,t}}\right)\right\rangle g_{\Lambda,t}\ d\lambda_\Lambda$$
$$-\frac{\sigma(t)}{2}\sum_{k\in\check\partial\Lambda}\int_{M^{\bar\Lambda}}\frac{g_{\Lambda,t}}{m_{t,\Lambda}}\left\langle\nabla_k\left(\frac{m_{t,\Lambda}}{g_{\Lambda,t}}\right)\ ,\ \nabla_k\left(\frac{m_{t,\bar\Lambda}}{g_{\bar\Lambda,t}}\right)\right\rangle g_{\bar\Lambda,t}\ d\lambda_{\bar\Lambda}$$
$$=-2\sigma(t)\sum_{k\in\check\Lambda}\int_{M^\Lambda}\left|\nabla_k\sqrt{\frac{m_{t,\Lambda}}{g_{\Lambda,t}}}\right|^2 g_{\Lambda,t}\ d\lambda_\Lambda$$

$$-\frac{\sigma(t)}{2}\sum_{k\in\breve{\partial}\Lambda}\int_{M^{\bar\Lambda}}\left\langle \frac{g_{\Lambda,t}}{m_{t,\Lambda}}\nabla_k\left(\frac{m_{t,\Lambda}}{g_{\Lambda,t}}\right)\ ,\ \frac{g_{\bar\Lambda,t}}{m_{t,\bar\Lambda}}\nabla_k\left(\frac{m_{t,\bar\Lambda}}{g_{\bar\Lambda,t}}\right)\right\rangle m_{t,\bar\Lambda}\ d\lambda_{\bar\Lambda}$$

Mais l'inégalité de Schwartz nous permet de majorer cette dernière expression par :

$$\frac{\sigma(t)}{2}\sum_{k\in\breve{\partial}\Lambda}\left(\int_{M^{\bar\Lambda}}\left(\frac{g_{\Lambda,t}}{m_{t,\Lambda}}\right)^2\left|\nabla_k\frac{m_{t,\Lambda}}{g_{\Lambda,t}}\right|^2 m_{t,\bar\Lambda}\ d\lambda_{\bar\Lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{M^{\bar\Lambda}}\left(\frac{g_{\bar\Lambda,t}}{m_{t,\bar\Lambda}}\right)^2\left|\nabla_k\frac{m_{t,\bar\Lambda}}{g_{\bar\Lambda,t}}\right|^2 m_{t,\bar\Lambda}\ d\lambda_{\bar\Lambda}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\sigma(t)}{2}\sum_{k\in\breve{\partial}\Lambda}\mathcal{F}(m_t,t,\Lambda,k)^{\frac{1}{2}}\ \mathcal{F}(m_t,t,\bar\Lambda,k)^{\frac{1}{2}}$$

où $\mathcal{F}(m_t,t,\Lambda,k)=\int_{M^\Lambda}\left|\nabla_k\ln(\frac{m_{t,\Lambda}}{g_{\Lambda,t}})\right|^2 m_{t,\Lambda}\ d\lambda_\Lambda$

$$\leq 2\left[\int_{M^\Lambda}\frac{|\nabla_k\ m_{t,\Lambda}|^2}{m_{t,\Lambda}}\ d\lambda_\Lambda\ +\ \int_{M^\Lambda}\frac{|\nabla_k\ H_k|^2}{\sigma(t)^2}m_{t,\Lambda}\ d\lambda_\Lambda\right]$$

Ainsi, grâce à (2), on voit que pour tout $T>1$, il existe un $\widetilde{C}(T)>0$ tel que :

$$\forall\ \Lambda\subset\subset \mathbb{Z}^d,\ \forall\ k\in\Lambda,\ \forall\ t\in\left[\frac{1}{T},T\right],$$
$$\mathcal{F}(m_t,t,\Lambda,k)\leq\widetilde{C}(T)$$

On a donc, en posant $\widehat{C}(T)=\dfrac{1}{2}\sup\limits_{t\in[\frac{1}{T},T]}\sigma(t)\ \widetilde{C}(T)$, montré la

Proposition 3

> $\forall\ T>1,\ \exists\ \widehat{C}(T)>0$, tel que :
> $\forall\ \Lambda\subset\subset\mathbb{Z}^d,\ \forall\ t\in\left[\frac{1}{T},T\right]$,
>
> $$\left|\frac{dI_{\Lambda,t}(m_t)}{dt}-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sigma(t)}\right)\int_{M^\Lambda}U_\Lambda\ (m_{t,\Lambda}-g_{\Lambda,t})\ d\lambda_\Lambda\right.$$
> $$\left.+2\sigma(t)\sum_{k\in\breve{\Lambda}}\int_{M^\Lambda}\left|\nabla_k\sqrt{\frac{m_{t,\Lambda}}{g_{\Lambda,t}}}\right|^2 g_{\Lambda,t}\ d\lambda_\Lambda\right|\leq|\breve{\partial}\Lambda|\widehat{C}(T)$$

C'est en se basant sur la proposition précédente, ainsi que sur les inégalités Sobolev-logarithmiques présentées à la section 3, qui nous permettront de traiter le terme

$$\sum_{k\in\breve{\Lambda}}\int_{M^\Lambda}\left|\nabla_k\sqrt{\frac{m_{t,\Lambda}}{g_{\Lambda,t}}}\right|^2 g_{\Lambda,t}\ d\lambda_\Lambda$$

de l'expression précédente, que nous obtiendrons des inégalités différentielles pour $I_t(m_t)$.

Enfin, réécrivons un fait, qui se trouve dans la démonstration du lemme 3.3 de [2], et qui jouera un rôle dans la démonstration du résultat de la section suivante.

Proposition 4

Soient $(\mathcal{Y}, \mathcal{T}, Q)$ un espace probabilisé et N une variété riemannienne munie d'une probabilité λ.

Soit F une fonction mesurable sur $N \times \mathcal{Y}$, minorée par une constante strictement positive et différentiable en la première variable. Supposons que $|\nabla_x F|$ soit borné, et posons, pour $x \in N$:

$$f(x) = \int F(x, y)\ Q(dy)$$

Alors :

$$\int_N \frac{|\nabla f|^2}{f}\, d\lambda \leq \int_{N \times \mathcal{Y}} \frac{|\nabla_x F|^2}{F}\, d\lambda \otimes dQ$$

3. Inégalités de Sobolev-logarithmiques

Le résultat présenté dans cette section est très important. Il s'agit d'un des fondements de l'article.

Commençons par rappeler une propriété essentielle des inégalités de Sobolev-logarithmiques :

Soient N_1, N_2 deux variétés riemanniennes munies respectivement des probabilités μ_1 et μ_2. Supposons que pour $i \in \{1,2\}$, μ_i satisfasse les inégalités de Sobolev-logarithmiques suivantes :
$\forall\, f \in C^1(N_i)$,

$$\int f^2 \ln(f^2)\, d\mu_i \leq a_i \int |\nabla f|^2\, d\mu_i + \int f^2\, d\mu_i\, \ln(\int f^2\, d\mu_i)$$

où a_i est un nombre positif. Une telle constante sera dite un coefficient admissible pour les inégalités de Sobolev-logarithmiques (en abrégé I.S.L.) satisfaites par μ_i.

La propriété remarquable des I.S.L. est leur comportement par passage au produit tensoriel : dans le cas précédent, un calcul simple montre que $\mu_1 \otimes \mu_2$ satisfait des I.S.L. , un coefficient admissible étant $\sup(a_1, a_2)$.

Ce résultat se généralise immédiatement pour n variétés riemanniennes N_i, $1 \leq i \leq n$, munies respectivement des probabilités μ_i, $1 \leq i \leq n$, vérifiant des I.S.L. avec pour coefficients admissibles les a_i, $1 \leq i \leq n$. $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ satisfait alors des I.S.L. , un coefficient admissible étant $\sup(a_1, \ldots, a_n)$.

Rappelons également le résultat suivant, qui se trouve, par exemple, dans [4].

Soit N une variété riemannienne, compacte et connexe, munie de λ la probabilité associée à la structure riemannienne. Soit μ une probabilité sur N, absolument continue par rapport à λ, et telle qu'il existe $\eta > 0$ vérifiant $\eta \leq \dfrac{d\mu}{d\lambda} \leq \eta^{-1}$.

Il existe alors $a > 0$ (dépendant uniquement de η et de N), tel que μ satisfasse des I.S.L. avec pour coefficient admissible a. Insistons sur le fait que ce coefficient reste valable pour toutes les probabilités ν sur N vérifiant $\nu \ll \lambda$ et $\eta \leq \dfrac{d\nu}{d\lambda} \leq \eta^{-1}$.

Revenons à notre contexte, et introduisons les spécifications associées à la famille $\mathcal{J}$ et à la température $\sigma(t)$.

Pour $t \geq 0$, $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$, $\eta \in \mathcal{X}$ et $x_\Lambda \in M^\Lambda$,
on pose :

$$G_{\Lambda,t,\eta}(x_\Lambda) = \frac{1}{Z_{\Lambda,t,\eta}} \exp(-\frac{1}{\sigma(t)} \sum_{F \cap \Lambda \neq \emptyset} J_F(x_\Lambda \eta))$$

où $Z_{\Lambda,t,\eta} = \displaystyle\int_{M^\Lambda} \exp(-\frac{1}{\sigma(t)} \sum_{F \cap \Lambda \neq \emptyset} J_F(x_\Lambda \eta))\, d\lambda(x_\Lambda)$

$dG_{\Lambda,t,\eta}$ désignera la probabilité $G_{\Lambda,t,\eta}(x_\Lambda) d\lambda(x_\Lambda)$ (sur M^Λ).

Pour $p \in I\!N^*$ et $t \geq 0$, on définit $a(p,t)$ comme étant la plus petite constante a vérifiant :

$$\forall\, \eta \in \mathcal{X},\ \forall\, f \in C^1(M^{\Lambda_p})$$
$$\int_{M^{\Lambda_p}} f^2 \ln(f^2)\, dG_{\Lambda_p,t,\eta} \leq a \int_{M^{\Lambda_p}} |\nabla f|^2\, dG_{\Lambda_p,t,\eta} + \int_{M^{\Lambda_p}} f^2 dG_{\Lambda_p,t,\eta}\ \ln\Big(\int_{M^{\Lambda_p}} f^2 dG_{\Lambda_p,t,\eta}\Big)$$

Remarquons que, d'après le second rappel fait ci dessus, on a bien $a(p,t) < +\infty$, d'ailleurs on s'intéressera, ultérieurement, au comportement, à p fixé, de $a(p,t)$ quand $\sigma(t) \to 0$, en utilisant les résultats présentés à ce sujet dans [5].

On se propose de démontrer la

Proposition 5

Il existe $A > 0$ et $B > 0$ tels que :

$$\forall\, p,n \in I\!N^*,\ \forall\, t \geq 0,\ \forall\, g \in C^1_+(M^{\Lambda_{n,p}}),\ \forall\, \eta \in \mathcal{X},$$
$$\begin{aligned}\int g^2 \ln(g^2)\, dG_{\Lambda_{n,p},t,\eta} \leq\ & (a(p,t) \vee B) \int |\nabla g|^2\, dG_{\Lambda_{n,p},t,\eta} \\ & + \frac{A}{\sigma(t)} n^d p^{d-1} \int g^2\, dG_{\Lambda_{n,p},t,\eta} \\ & + \int g^2\, dG_{\Lambda_{n,p},t,\eta} \ln\Big[\int g^2\, dG_{\Lambda_{n,p},t,\eta}\Big]\end{aligned}$$

où le cube $\Lambda_{n,p}$ est défini par

$$\Lambda_{n,p} = \{ u \in Z\!\!Z^d \ /\ \forall\, 1 \leq j \leq d,\ -npR < u_j \leq (np + n - 1)R \ \}$$

Dém. :

On va commencer par quadriller $\Lambda_{n,p}$;

Pour $i \in \{1, \ldots, n\}^d$, on pose :

$$\Lambda^{(i)}_{n,p} = \{ u \in Z\!\!Z^d \ /\ \forall\, 1 \leq j \leq d,\ -npR + (2p+1)(i_j - 1)R < u_j \leq -(np+1)R + (2p+1)i_j R \ \}$$

Les $\Lambda^{(i)}_{n,p}$ forment une famille de translatés disjoints de Λ_p, inclus dans $\Lambda_{n,p}$, et deux à deux hors de portée d'interaction.

La figure ci-dessous, dessinée pour $d = 2$, éclaircit la situation :

On posera également $T_{n,p} = \bigcup_{i\in\{1,\cdots,n\}^d} \Lambda_{n,p}^{(i)}$, et $R_{n,p} = \Lambda_{n,p} \setminus T_{n,p}$.
(i.e. la partie hachurée dans le dessin.)

On supposera dans la suite que $\eta \in \mathcal{X}$ et $t \geq 0$ sont fixés.

Soit $f \in C^1(M^{\Lambda_{n,p}})$, $f > 0$, et telle que $\int f^2 \, dG_{\Lambda_{n,p},t,\eta} = 1$.

On introduit les probabilités suivantes :

$dG_{n,p}$ sera la restriction de $dG_{\Lambda_{n,p},t,\eta}$ à la tribu $\mathcal{B}_{R_{n,p}}$, on la considèrera donc aussi comme une probabilité sur $M^{R_{n,p}}$.

$dG_{n,p,\bullet}$ sera une version de la probabilité conditionnelle à l'événement $x_{R_{n,p}} = \bullet$ (i.e. on conditionne par rapport à la tribu $\mathcal{B}_{R_{n,p}}$), sous la loi $dG_{\Lambda_{n,p},t,\eta}$.

$dG_{n,p,\bullet}^{(i)}$ sera la restriction de $dG_{n,p,\bullet}$ à la tribu $\mathcal{B}_{\Lambda_{n,p}^{(i)}}$, et on la considèrera également comme une probabilité sur $M^{\Lambda_{n,p}^{(i)}}$ (notons que cette probabilité s'écrit aussi $dG_{\Lambda_{n,p}^{(i)},t,y}$, où $y_{R_{n,p}} = \bullet$ et $y_{\mathbb{Z}^d\setminus R_{n,p}} = \eta_{\mathbb{Z}^d\setminus R_{n,p}}$).

Ainsi on a :

$$dG_{n,p,x_{R_{n,p}}}(x_{T_{n,p}}) = \bigotimes_{i\in\{1,\cdots,n\}^d} dG_{n,p,x_{R_{n,p}}}^{(i)}(x_{\Lambda_{n,p}^{(i)}})$$

$$dG_{n,p}(x_{R_{n,p}}) \, dG_{n,p,x_{R_{n,p}}}(x_{T_{n,p}}) = dG_{\Lambda_{n,p},t,\eta}(x_{\Lambda_{n,p}})$$

Mais, par invariance par translations des potentiels d'interactions, il est clair que pour tout $x_{R_{n,p}} \in M^{R_{n,p}}$, et pour tout $i \in \{1,\cdots,n\}^d$, $dG_{n,p,x_{R_{n,p}}}^{(i)}$ satisfait des I.S.L. avec pour coefficient admissible $a(p,t)$. D'autre part, comme l'indique le produit tensoriel dans une des formules précédentes, pour $x_{R_{n,p}}$ fixé dans $M^{R_{n,p}}$, les coordonnées dans différents $\Lambda_{n,p}^{(i)}$ sont indépendantes sous $dG_{n,p,x_{R_{n,p}}}$. Ainsi en conditionnant par rapport à la tribu $\mathcal{B}_{R_{n,p}}$, et en appliquant le premier rappel de cette section, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int f^2 \ln(f^2) \, dG_{\Lambda_{n,p},t,\eta} &= \int_{M^{R_{n,p}}} dG_{n,p}(x_{R_{n,p}}) \int_{M^{T_{n,p}}} f^2 \ln(f^2) \, dG_{n,p,x_{R_{n,p}}} \\
&\leq a(p,t) \int_{M^{R_{n,p}}} dG_{n,p}(x_{R_{n,p}}) \int_{M^{T_{n,p}}} |\nabla_{T_{n,p}} f|^2 \, dG_{n,p,x_{R_{n,p}}} \\
&\quad + \int_{M^{R_{n,p}}} dG_{n,p}(x_{R_{n,p}}) \int_{M^{T_{n,p}}} f^2 dG_{n,p,x_{R_{n,p}}} \ln\left[\int_{M^{T_{n,p}}} f^2 dG_{n,p,x_{R_{n,p}}}\right]
\end{aligned}$$

Posons $q = f^2.G_{\Lambda_{n,p},t,\eta}$ (qui est donc une fonction sur $M^{\Lambda_{n,p}}$), et notons dq la probabilité $q d\lambda_{\Lambda_{n,p}}$ associée (elle dépend, en fait, de n, p, t, et η).

Ainsi f^2 est la densité $\dfrac{dq}{dG_{\Lambda_{n,p},t,\eta}}$.

Mais notons $dq_{n,p}$ la restriction de dq à la tribu $\mathcal{B}_{R_{n,p}}$. $\int_{M^{T_{n,p}}} f^2 dG_{n,p,x_{R_{n,p}}}$ apparaît alors comme la densité $\dfrac{dq_{n,p}}{dG_{n,p}}(x_{R_{n,p}})$.

En effet, si F est une fonction $\mathcal{B}_{R_{n,p}}$-mesurable, on a :

$$\int_{M^{\Lambda_{n,p}}} F\ dq = \int_{M^{\Lambda_{n,p}}} Ff^2\ dG_{\Lambda_{n,p},t,\eta}$$
$$= \int_{M^{R_{n,p}}} F \left(\int_{M^{T_{n,p}}} f^2\ dG_{n,p,x_{R_{n,p}}} \right) dG_{n,p}(x_{R_{n,p}})$$

Mais on a aussi :

$$\int_{M^{\Lambda_{n,p}}} F\ dq = \int_{M^{R_{n,p}}} F\ dq_{n,p} = \int_{M^{R_{n,p}}} F \left(\frac{dq_{n,p}}{dG_{n,p}} \right) dG_{n,p}$$

ce qui prouve l'affirmation précédente.

Notons, tout naturellement, $q_{n,p} = \dfrac{dq_{n,p}}{d\lambda_{R_{n,p}}}$, et $G_{n,p} = \dfrac{dG_{n,p}}{d\lambda_{R_{n,p}}}$.

Ainsi :

$$\int_{M^{R_{n,p}}} dG_{n,p}(x_{R_{n,p}}) \int_{M^{T_{n,p}}} f^2 dG_{n,p,x_{R_{n,p}}} \ln \left[\int_{M^{T_{n,p}}} f^2 dG_{n,p,x_{R_{n,p}}} \right]$$
$$= \int_{M^{R_{n,p}}} \ln \left(\frac{dq_{n,p}}{dG_{n,p}} \right)\ dq_{n,p}$$
$$= \int_{M^{R_{n,p}}} q_{n,p} \ln(q_{n,p})\ d\lambda_{R_{n,p}} - \int_{M^{R_{n,p}}} \ln(G_{n,p})\ dq_{n,p}$$

On va s'interesser au premier terme de cette dernière expression. Soit B un coefficient admisssible pour les I.S.L. vérifiées par la probabilité riemannienne sur M. D'après la propriété rappelée au début de cette section, B est aussi un coefficient admisssible pour les I.S.L. vérifiées par les λ_Λ, ceci $\forall\ \Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$. Ainsi, puisqu'il est facile de voir que $\sqrt{q_{n,p}}$ appartient à $C^1(M^{R_{n,p}})$, on a :

$$\int_{M^{R_{n,p}}} q_{n,p} \ln(q_{n,p})\ d\lambda_{R_{n,p}} \leq B \int_{M^{R_{n,p}}} |\nabla_{R_{n,p}} \sqrt{q_{n,p}}|^2\ d\lambda_{R_{n,p}}$$
$$= \frac{B}{4} \int \frac{|\nabla_{R_{n,p}} q_{n,p}|^2}{q_{n,p}}\ d\lambda_{R_{n,p}}$$

or $\qquad q_{n,p}(x_{R_{n,p}}) = \displaystyle\int_{M^{T_{n,p}}} q(x_{R_{n,p}} y_{T_{n,p}})\ d\lambda_{T_{n,p}}(y_{T_{n,p}})$,

on a donc, d'après la proposition 4,

$$\int \frac{|\nabla_{R_{n,p}}\ q_{n,p}|^2}{q_{n,p}}\ d\lambda_{R_{n,p}} \leq \int \frac{|\nabla_{R_{n,p}}\ q|^2}{q}\ d\lambda_{\Lambda_{n,p}}$$

$$\leq \int \left| \frac{\nabla_{R_{n,p}}\ q}{q} \right|^2 q\ d\lambda_{\Lambda_{n,p}} + \int \left| \frac{\nabla_{R_{n,p}} G_{\Lambda_{n,p},t,\eta}}{G_{\Lambda_{n,p},t,\eta}} \right|^2 q\ d\lambda_{\Lambda_{n,p}}$$

$$= \int \left| \nabla_{R_{n,p}} \ln \left(\frac{q}{G_{\Lambda_{n,p},t,\eta}} \right) \right|^2 q\ d\lambda_{\Lambda_{n,p}} + 2 \int \left\langle \nabla_{R_{n,p}}(q)\ ,\ \nabla_{R_{n,p}} \ln(G_{\Lambda_{n,p},t,\eta}) \right\rangle\ d\lambda_{\Lambda_{n,p}}$$

$$= 4\int \left|\nabla_{R_{n,p}}\sqrt{\frac{q}{G_{\Lambda_{n,p},t,\eta}}}\right|^2 dG_{\Lambda_{n,p},t,\eta} - 2\int \Delta_{R_{n,p}} \ln(G_{\Lambda_{n,p},t,\eta})\, dq$$

$$= 4\int \left|\nabla_{R_{n,p}} f\right|^2 dG_{\Lambda_{n,p},t,\eta} - 2\int \Delta_{R_{n,p}} \ln(G_{\Lambda_{n,p},t,\eta})\, dq$$

En résumé, on a montré :

$$\int f^2 \ln(f^2)\, dG_{\Lambda_{n,p},t,\eta} \leq a(p,t) \int |\nabla_{T_{n,p}} f|^2\, dG_{\Lambda_{n,p},t,\eta}$$
$$+B\int |\nabla_{R_{n,p}} f|^2\, dG_{\Lambda_{n,p},t,\eta} + \int h_{n,p,t,\eta}\, dq$$

où $h_{n,p,t,\eta} = -\ln(G_{n,p}) - \frac{B}{2}\Delta_{R_{n,p}} \ln(G_{\Lambda_{n,p},t,\eta})$

Mais, d'une part, $\sigma(t)\|\Delta_k \ln(G_{\Lambda_{n,p},t,\eta})\|_\infty$ est uniformément borné pour $n,p \in I\!N^*$, $k \in \Lambda_{n,p}$, $\sigma(t) > 0$ et $\eta \in \mathcal{X}$ (par invariance par translations des potentiels), et d'autre part, si on note ν la restriction de $dG_{\Lambda_{n,p},t,\eta}$ à la tribu $\mathcal{B}_{T_{n,p}}$, on peut écrire

$$G_{n,p}(\ .\ ) = \int \frac{\exp\left(-\sigma(t)^{-1}\sum_{F\cap R_{n,p}\neq\emptyset} J_F(\ .\ x_{T_{n,p}})\right)}{Z}\, d\nu(x_{T_{n,p}})$$

où Z est la constante de normalisation.

Ainsi, il existe une constante $A' > 0$, telle que :

$$\forall\, n,p\ ,\ \forall\, t \geq 0,\ \forall\, \eta \in \mathcal{X}$$
$$\|h_{n,p,t,\eta}\|_\infty \leq \frac{A'}{\sigma(t)}|R_{n,p}|$$

mais $\qquad |R_{n,p}| \leq (n-1)\Big(2\Big(np + \frac{n-1}{2}\Big)\Big)^{d-1} R^{d-1}$

Il existe donc un $A > 0$ tel que :

$$\forall\, n,p\ ,\ \forall\, t \geq 0,\ \forall\, \eta \in \mathcal{X}$$
$$\|h_{n,p,t,\eta}\|_\infty \leq \frac{A}{\sigma(t)} n^d p^{d-1}$$

La proposition découle alors, pour un $g > 0$ général, en considérant $f = \dfrac{g}{\sqrt{\int g^2\, dG_{\Lambda_{n,p},t,\eta}}}$, puis pour un $g \geq 0$ quelconque, en approximant g par $g + \epsilon$, avec $\epsilon > 0$.

$\square$

4. Cas où la température est constante

On se propose, dans cette section, de démontrer le théorème 1.

La clé de la démonstration est, comme nous l'avons déjà annoncé, de prouver que $I_t(m_t)$ vérifie certaines inégalités différentielles et, plus précisément, une famille d'inégalités du type :

$$\frac{dI_t(m_t)}{dt} \leq a^{(p)} - b^{(p)} I_t(m_t) \qquad , \text{ p.s. pour } t > 0$$

(on montrera que $t \mapsto I_t(m_t)$ est absolument continue sur $]0, +\infty[$, et on notera alors $\frac{dI_t(m_t)}{dt}$ la dérivée au sens faible)
où pour tout $p \in I\!N^*$, $a^{(p)}$ et $b^{(p)}$ sont deux nombres positifs tels que :

$$\lim_{p \to \infty} \frac{a^{(p)}}{b^{(p)}} = 0$$

Le théorème 1 découlera alors d'un lemme classique.

Remarquons que, puisque la température est constante, on peut supposer que $\forall\, t \geq 0,\ \sigma(t) = 1$, quitte à remplacer $\mathcal{J}$ par $\dfrac{\mathcal{J}}{\sigma(0)}$ et à renormaliser le temps. D'autre part, $I_t(\ .\ )$, les $I_{\Lambda,t}(\ .\ )$ et les $g_{\Lambda,t}$ ne dépendant plus, dans cette section, de t, on ne le fera plus apparaître dans les indices.

Précisons, d'autre part, qu'une démarche légèrement différente eût été d'obtenir, à partir des inégalités différentielles pour les $I_{\Lambda_n}(m_t)$, des estimées sur ces quantités, puis de passer à la limite quand n tend vers l'infini. Cette méthode, que nous utiliserons dans le cas où M est un ensemble fini, nous permettrait de nous passer des deux lemmes suivants.

<u>lemme 6</u>

| $t \to I(m_t)$ est absolument continue sur $]0, +\infty[$.

Dém. :

Pour $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$ et $t > 0$, écrivons

(3) $$\frac{dI_\Lambda(m_t)}{dt} = -2 \sum_{k \in \Lambda} \int_{M^\Lambda} \left| \nabla_k \sqrt{\frac{m_{t,\Lambda}}{g_\Lambda}} \right|^2 g_\Lambda \ d\lambda_\Lambda + R_{t,\Lambda}$$

Il est facile, à partir de la démonstration de la proposition 3, de montrer que pour tout $T > 1$, il existe une constante $\widetilde{C}(T)$ telle que :

$$\forall\, \Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d,\ \forall\, t \in \left[\frac{1}{T}, T\right]$$
$$|R_{t,\Lambda}| \leq \widetilde{C}(T) |\breve{\partial}\Lambda|$$

(car on peut borner $\sum_{k\in\breve{\partial}\Lambda}\int_{M^\Lambda}\left|\nabla_k\sqrt{\frac{m_{t,\Lambda}}{g_\Lambda}}\right|^2 g_\Lambda\, d\lambda_\Lambda$ par un terme de cette forme, d'après les résultats de la section 2 et l'invariance par translations des potentiels.)

Soient $u > v > 0$ et $T > 1$ tel que $[v,u] \subset \left[\frac{1}{T}, T\right]$.

On intègre alors l'égalité précédente entre v et u, pour obtenir :

$$I_\Lambda(m_u) - I_\Lambda(m_v) = -2\int_v^u \left(\int_{M^\Lambda}\left|\nabla\sqrt{\frac{m_{t,\Lambda}}{g_\Lambda}}\right|^2 g_\Lambda\, d\lambda_\Lambda\right) dt + \int_v^u R_{t,\Lambda}\, dt$$

Mais pour $k \in \Lambda$:

$$\begin{aligned}
&\int_{M^\Lambda}\left|\nabla_k\sqrt{\frac{m_{t,\Lambda}}{g_\Lambda}}\right|^2 g_\Lambda\, d\lambda_\Lambda \\
&= \frac{1}{4}\int_{M^\Lambda}\left|\nabla_k \ln\left(\frac{m_{t,\Lambda}}{g_\Lambda}\right)\right|^2 m_{t,\Lambda}\, d\lambda_\Lambda \\
&= \frac{1}{4}\Bigg(\int_{M^\Lambda}\frac{|\nabla_k m_{t,\Lambda}|^2}{m_{t,\Lambda}}\, d\lambda_\Lambda \\
&\qquad -2\int_{M^\Lambda}\Delta_k(\ln(g_\Lambda))\, m_{t,\Lambda}\, d\lambda_\Lambda \\
&\qquad\qquad +\int_{M^\Lambda}|\nabla_k \ln(g_\Lambda)|^2\, m_{t,\Lambda}\, d\lambda_\Lambda\Bigg)
\end{aligned}$$

Soit $V = \sum_{F\ni 0} J_F \;:\; \mathcal{X} \to I\!R$. Il est clair, du fait de l'invariance par translations de m_t et des potentiels d'interactions, qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que $\forall\, \Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$, $\forall\, t \geq 0$,

$$\Bigg|\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{k\in\Lambda}\int_{M^\Lambda}(-2\Delta_k(\ln g_\Lambda) + |\nabla_k\ \ln g_\Lambda\,|^2)\, m_{t,\Lambda}\, d\lambda_\Lambda \\
- \int_{\mathcal{X}}(-2\Delta_0 V + |\nabla_0 V|^2)\, dm_t\Bigg| \leq C_1\frac{|\breve{\partial}\Lambda|}{|\Lambda|}$$

Nous allons choisir des Λ particuliers : prenons $\Lambda = \Lambda_{2^n}$, ainsi en découpant Λ_{2^n} en 2^d translatés disjoints de $\Lambda_{2^{n-1}}$, et en utilisant la proposition 4, ainsi que l'invariance par translations de m_t, on s'aperçoit que

$$\frac{1}{|\Lambda_{2^n}|}\int_{M^{\Lambda_{2^n}}}\frac{|\nabla_{\Lambda_{2^n}} m_{t,\Lambda_{2^n}}|^2}{m_{t,\Lambda_{2^n}}}\, d\lambda_{\Lambda_{2^n}} \geq \frac{1}{|\Lambda_{2^{n-1}}|}\int_{M^{\Lambda_{2^{n-1}}}}\frac{|\nabla_{\Lambda_{2^{n-1}}} m_{t,\Lambda_{2^{n-1}}}|^2}{m_{t,\Lambda_{2^{n-1}}}}\, d\lambda_{\Lambda_{2^{n-1}}}$$

Les trois faits précédents nous permettent d'utiliser les théorèmes de convergence monotone et dominée pour obtenir :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_{2^n}|} \sum_{k\in\Lambda_{2^n}} \int_v^u \int \left|\nabla_k \sqrt{\frac{m_{t,\Lambda_{2^n}}}{g_{\Lambda_{2^n}}}}\right|^2 g_{\Lambda_{2^n}}\ d\lambda_{\Lambda_{2^n}}\ dt$$

$$= \int_v^u \left[\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_{2^n}|} \sum_{k\in\Lambda_{2^n}} \int \left|\nabla_k \sqrt{\frac{m_{t,\Lambda_{2^n}}}{g_{\Lambda_{2^n}}}}\right|^2 g_{\Lambda_{2^n}}\ d\lambda_{\Lambda_{2^n}} \right] dt$$

Posons d'ailleurs

$$D_t = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_{2^n}|} \sum_{k\in\Lambda_{2^n}} \int \left|\nabla_k \sqrt{\frac{m_{t,\Lambda_{2^n}}}{g_{\Lambda_{2^n}}}}\right|^2 g_{\Lambda_{2^n}}\ d\lambda_{\Lambda_{2^n}}$$

et remarquons que grâce à (2), D_t est uniformément borné sur les intervalles compacts de $]0,\infty[$ (notons que (2) nous permettrait également de nous passer de l'argument utilisant la convergence monotone, et de n'utiliser que la convergence dominée).

On a d'autre part :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_{2^n}|} I_{\Lambda_{2^n}}(m_u) = I(m_u)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_{2^n}|} I_{\Lambda_{2^n}}(m_v) = I(m_v)$$

$$\frac{1}{|\Lambda_{2^n}|} \left| \int_v^u R_{t,\Lambda_{2^n}}\ dt \right| \leq (u-v)\widetilde{C}(T) \frac{|\breve{\partial}\Lambda_{2^n}|}{|\Lambda_{2^n}|} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui implique qu'en prenant $\Lambda = \Lambda_{2^n}$ dans (3), en divisant par $|\Lambda_{2^n}|$ cette égalité, puis en passant à la limite, quand $n \to \infty$, on obtienne :

$$I(m_u) - I(m_v) = -2 \int_v^u D_t\ dt$$

□

La démonstration précédente nous fournit en fait une expression pour $\dfrac{dI_t(m_t)}{dt}$, qui est :

$$-2D_t = -\frac{1}{2}\left[\int_{\mathcal{X}} (|\nabla_0 V|^2 - 2\Delta_0 V)\ dm_t + \lim_{n\to\infty} \uparrow \frac{1}{|\Lambda_{2^n}|} \int_{M^{\Lambda_{2^n}}} \sum_{k\in\Lambda_{2^n}} \frac{|\nabla_k\ m_{t,\Lambda_{2^n}}|^2}{m_{t,\Lambda_{2^n}}}\ d\lambda_{\Lambda_{2^n}} \right]$$

Mais cette dernière limite vaut également :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \int_{M^{\Lambda_n}} \sum_{k\in\Lambda_n} \frac{|\nabla_k\ m_{t,\Lambda_n}|^2}{m_{t,\Lambda_n}}\ d\lambda_{\Lambda_n}$$

En effet, si pour $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$, on note

$$A(\Lambda) = \int_{M^\Lambda} \sum_{k\in\Lambda} \frac{|\nabla_k\, m_{t,\Lambda}|^2}{m_{t,\Lambda}}\, d\lambda_\Lambda$$

on se persuade facilement, grâce à la proposition 4, que $A(\,.\,)$ possède la propriété de sur-additivité, d'où l'affirmation précédente d'après un résultat classique sur les fonctions sur-additives (cf. , par exemple, le lemme 15.11 présenté par Georgii dans [6]).

D'autre part, il est clair que pour toute suite d'éléments $(\eta_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{X}$ (qui représentent les conditions aux frontières des $(\Lambda_n)_{n\geq 1}$), on a :

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{X}} (|\nabla_0 V|^2 - 2\Delta_0 V)\, dm_t \\ &\qquad = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \int_{M^{\Lambda_n}} \sum_{k\in\Lambda_n} [|\nabla_k \ln(G_{\Lambda_n,\eta_n})|^2 - 2\Delta_k \ln(G_{\Lambda_n,\eta_n})]\; m_{t,\Lambda_n}\, d\lambda_{\Lambda_n}\end{aligned}$$

(rappelons que les G_{Λ_n,η_n} sont les spécifications définies à la section 3.)

On a donc montré le résultat suivant :

Lemme 7

p.s. pour $t > 0$,

$\forall\ (\eta_n)_{n\geq 1}$, suite d'éléments de $\mathcal{X}$,

$$\frac{dI(m_t)}{dt} = -2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{k\in\Lambda_n} \int_{M^{\Lambda_n}} \left|\nabla_k \sqrt{\frac{m_{t,\Lambda_n}}{G_{\Lambda_n,\eta_n}}}\,\right|^2 G_{\Lambda_n,\eta_n}\, d\lambda_{\Lambda_n}$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat annoncé au début de cette section.

Proposition 8

Soient A, B et $a(p)$ (pour $p \geq 1$), les constantes qui apparaissent dans la proposition 5 (où on suppose que la température est normalisée : $\sigma(t) = 1$).

Alors, p.s. pour $t > 0$,

$$\frac{dI(m_t)}{dt} \leq -2(a(p) \vee B)^{-1} \left[I(m_t) - A \frac{p^{d-1}}{(2p+1)^d R^d} \right]$$

Dém. :

Pour $t > 0$, on applique la proposition 5, avec

$$g = \sqrt{\frac{m_{t,\Lambda_{n,p}}}{G_{\Lambda_{n,p},\eta_n}}}$$

pour obtenir, du fait que $\int g^2 \, dG_{\Lambda_{n,p},\eta_n} = 1$,

$$\int \ln\left(\frac{m_{t,\Lambda_{n,p}}}{G_{\Lambda_{n,p},\eta_n}}\right) m_{t,\Lambda_{n,p}} \, d\lambda_{\Lambda_{n,p}} \leq (a(p) \vee B) \int \left|\nabla\sqrt{\frac{m_{t,\Lambda_{n,p}}}{G_{\Lambda_{n,p},\eta_n}}}\right|^2 dG_{\Lambda_{n,p},\eta_n} + An^d p^{d-1}$$

On divise alors cette inégalité par $|\Lambda_{n,p}|$, puis on fait tendre n vers l'infini.

Il est facile de voir que le membre de gauche tend vers $I_t(m_t)$ et que

$$\lim_{n\to\infty} A\frac{n^d p^{d-1}}{|\Lambda_{n,p}|} = A\frac{p^{d-1}}{(2p+1)^d R^d}$$

On obtient donc, d'après le lemme 7,

$$I_t(m_t) \leq -\frac{1}{2}(a(p) \vee B)\frac{dI(m_t)}{dt} + A\frac{p^{d-1}}{(2p+1)^d R^d}$$

ceci p.s. pour $t > 0$.

□

On a donc montré que p.s. pour $t > 0$, et $\forall\, p \in I\!N^*$,

$$\frac{dI(m_t)}{dt} \leq a^{(p)} - b^{(p)} I(m_t)$$

avec $\quad a^{(p)} = A\dfrac{p^{d-1}}{(2p+1)^d R^d} b^{(p)}$

$\qquad b^{(p)} = 2(a(p) \vee B)^{-1}$

Ainsi, si on applique, pour un $p \in I\!N^*$ fixé, le lemme 9 qui suit, on obtient que

$$\limsup_{t\to\infty} I(m_t) \leq \frac{a^{(p)}}{b^{(p)}}$$

Mais

$$\frac{a^{(p)}}{b^{(p)}} = A\frac{p^{d-1}}{(2p+1)^d R^d} \xrightarrow{p\to\infty} 0$$

d'où le résultat annoncé au théorème 1. (On aura remarqué qu'une application de la formule de Jensen nous montre que $I(\ .\ )$ est une fonctionnelle positive sur les probabilités de $\mathcal{X}$.)

Il nous reste à montrer un lemme classique sur les inégalités différentielles. Nous présentons ce résultat sous une forme plus générale que celle dont nous avons réellement besoin ici, car nous le réutiliserons dans la section suivante.

Lemme 9

Soit $f\ :\ ]0,+\infty[\to I\!R$ une fonction absolument continue, satisfaisant, p.s. pour $t > 0$, l'inégalité suivante :

$$f'_t \leq a_t - b_t f_t$$

où a, b : $[0,+\infty[\to I\!R_+$, sont deux fonctions mesurables, localement intégrables, telles que :

$$\int^{\infty} b_t \, dt = +\infty$$

Soit $\alpha = \limsup_{t\to\infty} \frac{a_t}{b_t}$

On a alors $\limsup_{t\to\infty} f_t \leq \alpha$

Dém. :

Posons $g_t = \exp(\int_0^t b_s \, ds) f_t$. g est une fonction absolument continue sur $]0,+\infty[$, et p.s. pour $t > 0$:

$$g'_t = (f'_t + b_t f_t)\exp(\int_0^t b_s \, ds) \leq a_t \exp(\int_0^t b_s \, ds)$$

d'où $\forall\, t \geq t_0 > 0$,

$$g_t \leq g_{t_0} + \int_{t_0}^t a_s \exp(\int_0^s b_u \, du) \, ds$$

puis

$$f_t \leq f_{t_0} \exp(-\int_{t_0}^t b_s \, ds) + \exp(-\int_0^t b_s \, ds) \int_{t_0}^t a_s \exp(\int_0^s b_u \, du) \, ds$$

Soit $\epsilon > 0$. Choisissons t_0 tel que pour $s \geq t_0$, on ait $\frac{a_s}{b_s} \leq \alpha + \epsilon$

Alors

$$\begin{aligned} f_t &\leq f_{t_0} \exp(-\int_{t_0}^t b_s \, ds) + \exp(-\int_0^t b_s \, ds) \int_{t_0}^t (\alpha+\epsilon) b_s \exp(\int_0^s b_u \, du) \, ds \\ &= f_{t_0} \exp(-\int_{t_0}^t b_s \, ds) + (\alpha+\epsilon)\exp(-\int_0^t b_s \, ds) \left[\exp(\int_0^t b_s \, ds) - \exp(\int_0^{t_0} b_s \, ds)\right] \\ &\xrightarrow{t\to\infty} \alpha + \epsilon \end{aligned}$$

Ceci étant vérifié $\forall\, \epsilon > 0$, le lemme est démontré.

$\square$

5. Cas où la température décroit vers 0 en l'infini

On va démontrer, dans cette section, le théorème 2, et le fait qu'en dimension 1 (i.e. $d = 1$), la constante c apparaissant dans ce résultat est finie.

La démonstration du théorème 2 est, dans son principe, très proche de celle de la section précédente. Notamment on va chercher à montrer que $\sigma(t)I_t(m_t)$ satisfait une famille paramétrée d'inégalités différentielles du type :

$$\frac{d\sigma(t)I_t(m_t)}{dt} \leq a_t^{(p)} - b_t^{(p)}\sigma(t)I_t(m_t) \qquad \text{, p.s. pour } t \text{ assez grand}$$

où pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $a_\cdot^{(p)}$, $b_\cdot^{(p)}$ sont deux fonctions continues et positives, vérifiant, sous les conditions énoncées au théorème 2,

$$\begin{aligned} \int^{\infty} b_t^{(p)}\, dt &= +\infty \\ \lim_{t\to\infty} \frac{a_t^{(p)}}{b_t^{(p)}} &= \epsilon(p) \end{aligned}$$

où $\lim_{p\to\infty} \epsilon(p) = 0$

Le lemme 9 nous permettra de conclure.

Le lemme suivant est l'équivalent, dans le cas où la température est variable, des lemmes 6 et 7 de la section précédente.

<u>Lemme 10</u>

L'application $t \mapsto I_t(m_t)$ est absolument continue sur $]0, +\infty[$, et il existe une constante $C_1 > 0$ telle que :

p.s. pour $t > 0$, $\forall\ (\eta_n)_{n\geq 1}$ suite d'éléments de $\mathcal{X}$,

$$\left| \frac{dI_t(m_t)}{dt} + 2\sigma(t) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{k\in\Lambda_n} \int_{M^{\Lambda_n}} \left| \nabla_k \sqrt{\frac{m_{t,\Lambda_n}}{G_{\Lambda_n,t,\eta_n}}} \right|^2 G_{\Lambda_n,t,\eta_n}\, d\lambda_{\Lambda_n} \right| \leq C_1 \left| \frac{d}{dt}\frac{1}{\sigma(t)} \right|$$

Dém. :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t > 0$, posons :

$$H_{n,t} = -\frac{1}{|\Lambda_{2^n}|} \left[\frac{dI_{\Lambda_{2^n},t}(m_t)}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sigma(t)}\right) \int_{M^{\Lambda_{2^n}}} U_{\Lambda_{2^n}}(m_{t,\Lambda_{2^n}} - g_{\Lambda_{2^n},t})\, d\lambda_{\Lambda_{2^n}} \right] \tag{4}$$

La démonstration de la proposition 3, ainsi que celles des lemmes 6 et 7 nous permettent de nous rendre compte des faits suivants :

Si on décompose $H_{n,t}$ en la somme $H_{n,t}^{(1)} + H_{n,t}^{(2)}$, où

$$H_{n,t}^{(2)} = \frac{2}{|\Lambda_{2^n}|}\sigma(t) \sum_{k\in\Lambda_{2^n}} \int_{M^{\Lambda_{2^n}}} \frac{|\nabla_k\ m_{t,\Lambda_{2^n}}|^2}{m_{t,\Lambda_{2^n}}}\ d\lambda_{\Lambda_{2^n}}$$

alors :

• $H_{n,t}^{(1)}$ converge, quand $n \to \infty$, uniformément pour t dans les compacts de $]0, +\infty[$, vers une quantité $H_t^{(1)}$ qui est uniformément bornée pour t dans les ensembles bornés de $[0, +\infty[$.

• $H_{n,t}^{(2)}$ croit, quand n tend vers l'infini, vers une quantité $H_t^{(2)}$ qui est uniformément bornée pour t dans les compacts de $]0, +\infty[$.

Et pour toute suite $(\eta_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{X}$,

$$H_t^{(1)} + H_t^{(2)} = 2\sigma(t) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{k\in\Lambda_n} \int_{M^{\Lambda_n}} \left|\nabla_k \sqrt{\frac{m_{t,\Lambda_n}}{G_{\Lambda_n,t,\eta_n}}}\right|^2 G_{\Lambda_n,t,\eta_n}\ d\lambda_{\Lambda_n}$$

Notons H_t cette dernière quantité.

Soient $u > v > 0$. On intègre l'égalité (4) entre u et v, pour obtenir :

$$\frac{1}{|\Lambda_{2^n}|} I_{\Lambda_{2^n},u}(m_u) - \frac{1}{|\Lambda_{2^n}|} I_{\Lambda_{2^n},v}(m_v) = -\int_v^u H_{n,t}\ dt$$
$$+\int_v^u \frac{1}{|\Lambda_{2^n}|} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sigma(t)}\right)\left(\int_{M^{\Lambda_{2^n}}} U_{\Lambda_{2^n}}(m_{t,\Lambda_{2^n}} - g_{\Lambda_{2^n},t})\ d\lambda_{\Lambda_{2^n}}\right) dt$$

Mais d'après les rappels faits ci-dessus, on peut appliquer les théorèmes de convergence monotone et dominée pour pouvoir intervertir la limite et la somme dans le premier terme du membre de droite :

$$\lim_{n\to\infty} \int_v^u H_{n,t}\ dt = \int_v^u H_t\ dt$$

D'autre part, il existe une constante $C_1 > 0$, telle que :

$$\forall\ \Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d, \quad \|U_\Lambda\|_\infty \leq \frac{C_1}{2}|\Lambda|$$

ainsi, si on note $\|\ .\ \|$ la variation totale :

$$\left|\int_v^u \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sigma(t)}\right) \frac{1}{|\Lambda_{2^n}|} \int_{M^{\Lambda_{2^n}}} U_{\Lambda_{2^n}}(m_{t,\Lambda_{2^n}} - g_{\Lambda_{2^n},t})\ d\lambda_{\Lambda_{2^n}}\ dt\right|$$
$$\leq \frac{C_1}{2} \int_v^u \left|\frac{d}{dt}\frac{1}{\sigma(t)}\right| \|(m_{t,\Lambda_{2^n}} - g_{\Lambda_{2^n},t}).\lambda_{\Lambda_{2^n}}\|\ dt$$
$$\leq C_1 \int_v^u \left|\frac{d}{dt}\frac{1}{\sigma(t)}\right|\ dt$$

Mais on a, par définition :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_{2^n}|} I_{\Lambda_{2^n},v}(m_v) = I_v(m_v)$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_{2^n}|} I_{\Lambda_{2^n},u}(m_u) = I_u(m_u)$$

d'où, pour tout $u > v > 0$,

$$|I_u(m_u) - I_v(m_v) + \int_v^u H_t\ dt| \leq C_1 \int_v^u \left|\frac{d}{dt}\frac{1}{\sigma(t)}\right|\ dt$$

Ceci nous permet conclure que l'application $]0, +\infty[\ni u \mapsto I_u(m_u) + \int_1^u H_t\ dt$ est absolument continue, puis que $]0, +\infty[\ni u \mapsto I_u(m_u)$ est absolument continue et que p.s. pour $t > 0$,

$$\left|\frac{dI_t(m_t)}{dt} + H_t\right| \leq C_1 \left|\frac{d}{dt}\frac{1}{\sigma(t)}\right|$$

□

Nous sommes maintenant en mesure d'obtenir les inégalités différentielles annoncées.

Proposition 11

Supposons que pour $t \geq t_0 > 0$, $\sigma(t)$ décroisse.

Soient A, B et $a(p,t)$ (pour $p \geq 1,\ t \geq 0$) les constantes qui apparaissent dans la proposition 5.

Alors $\forall\ p \geq 1$, p.s. pour $t \geq t_0$,

$$\frac{d\sigma(t)I_t(m_t)}{dt} \leq C_1\sigma(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sigma(t)}\right) - 2(a(p,t) \vee B)^{-1}\left[\sigma(t)I_t(m_t) - A\frac{p^{d-1}}{(2p+1)^d R^d}\right]$$

Dém. :

Comme dans la démonstration de la proposition 8, on applique la proposition 5 avec

$$g = \sqrt{\frac{m_{t,\Lambda_{n,p}}}{G_{\Lambda_{n,p},t,\eta}}}$$

(où $p, n \in I\!N^*$, $\eta \in \mathcal{X}$ et $t > 0$)
pour obtenir :

$$\int \ln\left(\frac{m_{t,\Lambda_{n,p}}}{G_{\Lambda_{n,p},t,\eta}}\right) m_{t,\Lambda_{n,p}}\ d\lambda_{\Lambda_{n,p}} \leq (a(p,t) \vee B) \int \left|\nabla\sqrt{\frac{m_{t,\Lambda_{n,p}}}{G_{\Lambda_{n,p},t,\eta}}}\right|^2 dG_{\Lambda_{n,p},t,\eta} + \frac{A}{\sigma(t)} n^d p^{d-1}$$

Divisant ceci par $|\Lambda_{n,p}|$, puis faisant tendre n vers l'infini, il apparaît, en appliquant le lemme

10, que p.s. pour $t > 0$,

$$I_t(m_t) \leq (a(p,t) \vee B) \left(-\frac{1}{2\sigma(t)} \left[\frac{dI_t(m_t)}{dt} - C_1 \left| \frac{d}{dt} \frac{1}{\sigma(t)} \right| \right] \right) + \frac{A}{\sigma(t)} \frac{p^{d-1}}{(2p+1)^d R^d}$$

d'où

$$\frac{dI_t(m_t)}{dt} \leq -2\sigma(t)(a(p,t) \vee B)^{-1} \left[I_t(m_t) - \frac{A}{\sigma(t)} \frac{p^{d-1}}{(2p+1)^d R^d} \right] + C_1 \left| \frac{d}{dt} \frac{1}{\sigma(t)} \right|$$

Mais pour $t \geq t_0$, $\sigma(t)$ décroit, ainsi $\frac{d\sigma(t)}{dt} \leq 0$ et $\frac{d}{dt} \frac{1}{\sigma(t)} \geq 0$. D'autre part, comme nous l'avons déjà indiqué, $I_t(m_t)$ est une fonctionnelle positive sur les probabilités. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(t)I_t(m_t)}{dt} &= \frac{d\sigma(t)}{dt} I_t(m_t) + \sigma(t) \frac{dI_t(m_t)}{dt} \\ &\leq \sigma(t) \frac{dI_t(m_t)}{dt} \\ &\leq -2\sigma(t)(a(p,t) \vee B)^{-1} \left[\sigma(t) I_t(m_t) - A \frac{p^{d-1}}{(2p+1)^d R^d} \right] \\ &\quad + C_1 \sigma(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sigma(t)} \right) \end{aligned}$$

□

Ainsi, si pour $t \geq t_0 > 0$, $\sigma(t)$ décroit, on a montré que
$\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, p.s. pour $t \geq t_0$,

$$\frac{d\sigma(t)I_t(m_t)}{dt} \leq a_t^{(p)} - b_t^{(p)} \sigma(t) I_t(m_t)$$

où
$$\begin{cases} a_t^{(p)} = C_1 \sigma(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sigma(t)} \right) + b_t^{(p)} A \frac{p^{d-1}}{(2p+1)^d R^d} \\ b_t^{(p)} = 2\sigma(t)(a(p,t) \vee B)^{-1} \end{cases}$$

Pour pouvoir continuer le calcul il faut évaluer, pour un p fixé, $a(p,t)$ quand $\sigma(t)$ tend vers 0. Les estimations dont nous avons besoin découlent immédiatement du résultat suivant, dû à Holley, Kusuoka et Stroock (cf. théorème 1.14 de [5] et théorème 3.21 de [4]).

Théorème 12

Soit N une variété riemannienne, compacte et connexe et soit U une fonction C^∞ définie sur N.

Pour $\sigma > 0$, on définit la probabilité

$$\mu_\sigma(dx) = \frac{1}{Z_\sigma} \exp(-\frac{U(x)}{\sigma})\lambda(dx)$$

où λ est la probabilité associée à la structure riemannienne de N et Z_σ est la constante de normalisation.

Soit $c(N,U)$ la constante associée à N et à U comme dans la discussion précédant l'énoncé du théorème 2. Il existe alors deux constantes q et α (qui ne dépendent que de N et de $\|U\|_\infty$) telles que, si on pose $D = \sup_{x\in N} |\nabla U|(x)$,

$$a_\sigma(N,U) = q((1 \vee \sigma^{-1})D)^\alpha \exp(\frac{c(N,U)}{\sigma})$$

est un coefficient admissible pour les I.S.L. vérifiées par μ_σ.

Reprenons les notations d'avant le théorème 2. On applique le théorème précédent avec, pour un $p \in I\!N^*$, un $t \geq 0$ et un $\eta \in \mathcal{X}$ (la condition au bord) fixés, $\sigma = \sigma(t)$, $N = M^{\Lambda_p}$ et $U(\ .\ ) = \frac{1}{\sigma(t)} \sum_{F\cap\Lambda_p \neq \emptyset} J_F(\ .\ \eta)$, ce qui permet de constater qu'il existe deux constantes $\gamma_p > 0$ et $\rho_p > 0$, ne dépendant que de $\mathcal{J}$, M et de p, telles que pour tout $t > 0$ on ait :

$$a(p,t) \leq \gamma_p(1 \vee \sigma(t)^{-1})^{\rho_p} \exp(\frac{c_p}{\sigma(t)})$$

(car le théorème 12 nous permet d'obtenir des estimées uniformes en la condition au bord de Λ_p).

On notera dans la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ une suite d'entiers, croissante vers l'infini, telle que $\lim_{n\to\infty} c_{p_n} = c$.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème 2 :

- Si $c < \infty$:

Supposons que pour $t \geq t_0 > 1$ on ait

$$\sigma(t) = \frac{K}{\ln(t)} \qquad , \text{ avec } K > c$$

Remarquons que pour $n \in I\!N$ assez grand on a $K > c_{p_n}$, ce qui nous permet de voir que pour de tels n, il existe $0 < \beta_n < 1$ tel que pour t assez grand on ait

$$b_t^{(p_n)} \geq t^{-\beta_n}$$

Il en découle immédiatement que

$$\int^\infty b_t^{(p_n)}\, dt = +\infty$$

et

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{a_t^{(p_n)}}{b_t^{(p_n)}} \leq A \frac{p_n^{d-1}}{(2p_n+1)^d R^d}$$

ainsi d'après le lemme 9, on obtient

$$\limsup_{t\to\infty} \sigma(t) I_t(m_t) \leq A \frac{p_n^{d-1}}{(2p_n+1)^d R^d}$$

Ceci étant vérifié pour tout n assez grand, il s'en suit que

$$\limsup_{t\to\infty} \sigma(t) I_t(m_t) = 0$$

- Si $c = \infty$ (mais ce qui suit est également valable si $c < \infty$) :

Supposons que pour $t \geq t_0 > 1$ on ait

$$\sigma(t) = \frac{K(t)}{\ln(t)}$$

où $K(\ .\ )$ est une fonction croissante en l'infini vers l'infini, telle que $\sigma(\ .\ )$ décroisse vers 0 en l'infini.

Soit $p \in I\!N^*$. Il existe $t_1 \geq t_0$ tel que pour $t \geq t_1$, on ait $K(t) \geq c_p + 2$ et $b_t^{(p)} \geq \exp(-\frac{c_p+1}{\sigma(t)})$, ce qui permet de voir que

$\forall\, t \geq t_1$,

$$b_t^{(p)} \geq t^{-\left(\frac{c_p+1}{c_p+2}\right)}$$

d'où,

$$\int^{\infty} b_t^{(p)}\, dt = +\infty$$

D'autre part, on a pour tout $t \geq t_0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{1}{\sigma(t)} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\ln(t)}{K(t)}\right) \\ &= \frac{1}{K(t)}\frac{1}{t} - \frac{1}{K(t)^2}\ln(t)\frac{d}{dt}K(t) \\ &\leq \frac{1}{K(t)}\frac{1}{t} \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{b_t^{(p)}} C_1 \sigma(t) \frac{d}{dt}\frac{1}{\sigma(t)} = 0$$

puis,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{a_t^{(p)}}{b_t^{(p)}} \leq A \frac{p^{d-1}}{(2p+1)^d R^d}$$

Une nouvelle application du lemme 9 nous révèle que

$$\limsup_{t\to\infty} \sigma(t) I_t(m_t) \leq A \frac{p^{d-1}}{(2p+1)^d R^d}$$

Et puisque ceci est vérifié pour tout entier p, on en conclut que :

$$\limsup_{t\to\infty} \sigma(t) I_t(m_t) = 0$$

Pour terminer cette section, montrons qu'en dimension 1, $c < \infty$ est toujours vérifié.

Proposition 13

> Soit $L = \sum_{F \ni 0} \|J_F\|_\infty$.
>
> Si $d = 1$, on a $c \leq 2L(2R-1)$.

Dém :

Soit $\eta \in \mathcal{X}$ fixé.
Pour $n \in I\!N^*$, on définit

$$\begin{array}{rccc} V_n & : M^{\{1,\ldots,n\}} & \longrightarrow & I\!R \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{F \cap \{1,\ldots,n\} \neq \emptyset} J_F(x\eta) \end{array}$$

(rappelons que la notation $x\eta$ est définie dans la première section.)

Posons également, pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$,

$$\begin{array}{rccc} V_{i,n} & : M^{\{1,\ldots,i\}} & \longrightarrow & I\!R \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\left\{\begin{array}{l} F \cap \{1,\ldots,i\} \neq \emptyset \\ F \cap \{i+1,\ldots,n\} = \emptyset \end{array}\right.} J_F(x\eta) \\ \widetilde{V}_{i,n} & : M^{\{i+1,\ldots,n\}} & \longrightarrow & I\!R \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\left\{\begin{array}{l} F \cap \{i+1,\ldots,n\} \neq \emptyset \\ F \cap \{1,\ldots,i\} = \emptyset \end{array}\right.} J_F(x\eta) \end{array}$$

Soit $z \in M^{\{1,\ldots,n\}}$ minimisant V_n. Pour démontrer la proposition, il suffit de montrer que pour tout $x \in M^{\{1,\ldots,n\}}$, il existe un chemin $\varphi \ : \ [0,1] \to M^{\{1,\ldots,n\}}$ tel que $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = z$, et tel que $\forall\ 0 \leq t \leq 1$,

$$V_n(\varphi(t)) - V_n(x) \leq 2L(2R-1)$$

(En effet, il est facile de voir que le sup. sur $x, y \in N$ qui apparaît dans la définition de $c(N, U)$ (donnée dans la première section) est notamment atteint pour un couple (x, y) avec y minimum de U).

Remarquons que si $n = 1$, tout chemin vérifie :

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} V_1(\varphi(t)) - V_1(\varphi(0)) \leq 2L$$

Pour $n > 1$, définissons le chemin φ de la manière suivante :

Soit $1 \leq i \leq n$, pour $\frac{i-1}{n} \leq t \leq \frac{i}{n}$, $\varphi(t)$ est un chemin reliant $z_{\{1,\ldots,i-1\}}x_{\{i,\ldots,n\}}\eta$ à $z_{\{1,\ldots,i\}}x_{\{i+1,\ldots,n\}}\eta$, ne modifiant que la $\text{i}^{\text{ème}}$ coordonnée.

On change donc les coordonnées de x en celles de z les unes après les autres, en allant de la gauche vers la droite.

Mais d'après le cas $n = 1$, on a

$\forall \frac{i-1}{n} \leq t \leq \frac{i}{n}$,

$$V_n(\varphi(t)) - V_n(z_{\{1,\ldots,i-1\}}x_{\{i,\ldots,n\}}) \leq 2L$$

Il suffit donc de montrer que $\forall\ 2 \leq i \leq n$,

$$V_n(z_{\{1,\ldots,i-1\}}x_{\{i,\ldots,n\}}) - V_n(x) \leq 4L(R-1)$$

Nous allons démontrer ceci par l'absurde :

Supposons qu'il existe $2 \leq i \leq n$ tel que

$$V_n(z_{\{1,\ldots,i-1\}}x_{\{i,\ldots,n\}}) - V_n(x) > 4L(R-1)$$

Il est clair d'une part, que

$$V_n(z_{\{1,\ldots,i-1\}}x_{\{i,\ldots,n\}}) \leq V_{i-1,n}(z_{\{1,\ldots,i-1\}}) + \tilde{V}_{i-1,n}(x_{\{i,\ldots,n\}}) + L(R-1)$$

et d'autre part, que

$$V_n(x) \geq V_{i-1,n}(x_{\{1,\ldots,i-1\}}) + \tilde{V}_{i-1,n}(x_{\{i,\ldots,n\}}) - L(R-1)$$

ce qui implique, vu l'hypothèse faite ci-dessus, que

$$V_{i-1,n}(z_{\{1,\ldots,i-1\}}) - V_{i-1,n}(x_{\{1,\ldots,i-1\}}) > 2L(R-1)$$

d'où,

$$\begin{aligned}
V_n(x_{\{1,\ldots,i-1\}}z_{\{i,\ldots,n\}}) &\leq V_{i-1,n}(x_{\{1,\ldots,i-1\}}) + \tilde{V}_{i-1,n}(z_{\{i,\ldots,n\}}) + L(R-1) \\
&< V_{i-1,n}(z_{\{1,\ldots,i-1\}}) - 2L(R-1) + \tilde{V}_{i-1,n}(z_{\{i,\ldots,n\}}) + L(R-1) \\
&\leq V_n(z)
\end{aligned}$$

i.e.

$$V_n(x_{\{1,\ldots,i-1\}}z_{\{i,\ldots,n\}}) < V_n(z)$$

ce qui contredit la définition de z.

$\square$

6. Application au recuit simulé

On va présenter quelques conséquences du théorème 2, ayant trait à la convergence de l'algorithme de recuit simulé sur $\mathcal{X}$.

On supposera dans la suite que la condition suivante est vérifiée :

$$(H_1) \qquad \begin{cases} \bullet\ m \text{ est invariante par translations} \\ \bullet\ \lim_{t\to\infty} \sigma(t) = 0 \\ \bullet\ \lim_{t\to\infty} \sigma(t) I_t(m_t) = 0 \end{cases}$$

On pose $U = \sum_{F \ni 0} \frac{J_F}{|F|}$ (qui est l'énergie spécifique au site 0), et on définit l'énergie spécifique d'une configuration $x \in \mathcal{X}$, par :

$$H(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{k \in \Lambda_{n-1}} U(S_k(x))$$

(Rappelons que S_k est la translation de k)

Remarquons que H est borné (en effet, si on pose $L = \|U\|_\infty$, H est à valeurs dans $[-L, L]$), et n'est pas continu sur $\mathcal{X}$, à moins d'être constant, mais est mesurable par rapport à la tribu de queue $\bigcap_{\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d} \mathcal{B}_{\Lambda^{\text{compl}}}$.

Soit $H_0 = \inf_{x \in \mathcal{X}} H(x)$.

Le résultat suivant nous fournit une manière d'évaluer H_0, et nous permettra de montrer la convergence de l'algorithme de recuit simulé, sous l'hypothèse (H_1).

Théorème 14

> Supposons (H_1) vérifiée.
>
> Alors $m_t(U) = m_t(H) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} H_0$

La démonstration repose essentiellement sur le

Lemme 15

> Si on définit, pour $\epsilon > 0$,
>
> $$B_\epsilon = \limsup_{n\to\infty} \frac{\epsilon}{|\Lambda_n|} \ln \left[\int_{M^{\Lambda_n}} \exp\left(-\frac{1}{\epsilon} \sum_{F \subset \Lambda_n} J_F \right) d\lambda_{\Lambda_n} \right] ,$$
>
> alors on a : $\lim_{\epsilon\to 0} B_\epsilon = -H_0$

Dém. :

Pour $n \in I\!N^*$, posons :

$$V_n \; : \; \mathcal{X} \to I\!R$$
$$x \mapsto \sum_{k \in \Lambda_{n-1}} U(S_k(x))$$

V_n ne dépend que des coordonnées dans Λ_n, et il est clair qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que $\forall \; n \in I\!N^*$,

$$\|V_n - \sum_{F \subset \Lambda_n} J_F\|_\infty \leq C_1 |\Lambda_n \setminus \Lambda_{n-1}|$$

Ceci nous permet de voir que :

$$B_\epsilon = \limsup_{n \to \infty} \frac{\epsilon}{|\Lambda_n|} \ln \left[\int_{M^{\Lambda_n}} \exp\left(-\frac{1}{\epsilon} V_n\right) \, d\lambda_{\Lambda_n} \right]$$

Prouvons, dans un premier temps, que $B_\epsilon \leq -H_0$, $\forall \; \epsilon > 0$.

En effet on a :

$$\frac{\epsilon}{|\Lambda_n|} \ln \left[\int_{M^{\Lambda_n}} \exp\left(-\frac{1}{\epsilon} V_n\right) \, d\lambda_{\Lambda_n} \right] \leq \frac{\epsilon}{|\Lambda_n|} \ln \left[\int_{M^{\Lambda_n}} \exp\left(-\frac{1}{\epsilon} \inf V_n\right) \, d\lambda_{\Lambda_n} \right]$$
$$= -\frac{1}{|\Lambda_n|} \inf V_n$$

Or si x_{Λ_n} un élément de M^{Λ_n} réalisant l'infinum de V_n, soit $\tilde{x} \in \mathcal{X}$ obtenu en "périodisant" x_{Λ_n} (la période étant le sous-réseau $2nR\mathbb{Z}^d$). Il existe une constante $C_2 > 0$ telle que $\forall \; n, p \in I\!N^*$,

$$\frac{V_{np}(\tilde{x})}{|\Lambda_{np}|} \leq \frac{V_n(x_{\Lambda_n})}{|\Lambda_n|} + C_2 \frac{|\breve{\partial} \Lambda_n|}{|\Lambda_n|}$$

Ainsi, si on fait $p \to \infty$, on obtient

$$H_0 \leq H(\tilde{x}) \leq \frac{V_n(x_{\Lambda_n})}{|\Lambda_n|} + C_2 \frac{|\breve{\partial} \Lambda_n|}{|\Lambda_n|}$$

d'où, en faisant $n \to \infty$,

$$H_0 \leq \liminf_{n \to \infty} \frac{\inf V_n}{|\Lambda_n|}$$

puis,

$$B_\epsilon \leq -H_0$$

Il nous reste donc à montrer que :

$$\liminf_{\epsilon \to 0} B_\epsilon \geq -H_0$$

Soit $\delta > 0$.

Remarquons que par uniforme continuité de U sur M^{Λ_1}, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall\, y_1, y_2 \in M^{\Lambda_1}$,

$$\left.\begin{array}{l}\forall\, i \in \Lambda_1 \\ d((y_1)_i), (y_2)_i) \leq \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow |U(y_1) - U(y_2)| \leq \delta$$

($d(\,.\, , \,.\,)$ est la distance sur M induite par la structure riemannienne.)

Soit $\tilde{x} \in \mathcal{X}$ tel que $H(\tilde{x}) \leq H_0 + \delta$.

Pour $n \in I\!N^*$, posons :

$$\mathcal{U}_n = \{y \in M^{\Lambda_n} \;/\; \forall\, i \in \Lambda_n,\ d(y_i, \tilde{x}_i) \leq \alpha\}$$

On a alors,

$$\begin{array}{rcl}\displaystyle\int_{M^{\Lambda_n}} \exp\left(-\frac{1}{\epsilon}V_n\right)\, d\lambda_{\Lambda_n} & \geq & \displaystyle\int_{\mathcal{U}_n} \exp\left(-\frac{1}{\epsilon}V_n\right)\, d\lambda_{\Lambda_n} \\ & = & \displaystyle\exp\left((-\frac{1}{\epsilon}V_n(\tilde{x})\right) \int_{M^{\Lambda_n}} \exp\left(-\frac{1}{\epsilon}(V_n(y) - V_n(\tilde{x}))\right)\, d\lambda_{\Lambda_n} \\ & \geq & \displaystyle\exp\left((-\frac{1}{\epsilon}V_n(\tilde{x})\right) \exp\left(-\frac{\delta}{\epsilon}|\Lambda_{n-1}|\right) \int_{\mathcal{U}_n} d\lambda_{\Lambda_n}\end{array}$$

Soit $\beta = \inf_{y \in M} \lambda(\{x \;/\; d(y,x) \leq \alpha\})$, par compacité, on a $0 < \beta$ (≤ 1).

Mais alors,

$$\int_{\mathcal{U}_n} d\lambda_{\Lambda_n} \geq \beta^{\Lambda_n}$$

d'où,

$$\begin{array}{rcl}B_\epsilon & \geq & -H(x) - \delta + \epsilon \ln(\beta) \\ & \geq & -H_0 - 2\delta + \epsilon \ln(\beta)\end{array}$$

puis,

$$\liminf_{\epsilon \to 0} B_\epsilon \geq -H_0 - 2\delta$$

Ceci étant vérifié $\forall\, \delta > 0$, le lemme est démontré.

$\square$

Nous pouvons maintenant entamer la

Dém. du théorème 14 :

Rappelons que

$$\sigma(t)I_t(m_t) = \lim_{n\to\infty}\Bigg(\frac{1}{|\Lambda_n|}\int_{M^{\Lambda_n}} \left(\sum_{F\subset\Lambda_n} J_F\right) m_{t,\Lambda_n}\, d\lambda_{\Lambda_n} + \frac{\sigma(t)}{|\Lambda_n|}\ln\left[\int_{M^{\Lambda_n}} \exp(-\frac{1}{\sigma(t)}\sum_{F\subset\Lambda_n} J_F)\, d\lambda_{\Lambda_n}\right] + \frac{\sigma(t)}{|\Lambda_n|}\int_{M^{\Lambda_n}} \ln(m_{t,\Lambda_n})m_{t,\Lambda_n}\, d\lambda_{\Lambda_n}\Bigg)$$

Mais, λ_{Λ_n} est une probabilité, on peut donc appliquer l'inégalité de Jensen, pour obtenir que

$$\int_{M^{\Lambda_n}} \ln(m_{t,\Lambda_n})m_{t,\Lambda_n}\, d\lambda_{\Lambda_n} \geq 0$$

D'autre part, en utilisant l'invariance par translations de m_t, on s'aperçoit que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|\Lambda_n|}\int_{M^{\Lambda_n}} \left(\sum_{F\subset\Lambda_n} J_F\right) m_{t,\Lambda_n}\, d\lambda_{\Lambda_n} \quad = \quad \int U\, dm_t$$

Or le théorème ergodique multidimensionel (voir, par exemple, le théorème (14.A8), p. 302 de [6]) nous indique, du fait que m_t est invariant par translations, que la limsup. qui défini H est, p.s. sous m_t, une véritable limite. Ainsi, en appliquant le théorème de convergence dominée, on a aussi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|\Lambda_n|}\int_{M^{\Lambda_n}} \left(\sum_{F\subset\Lambda_n} J_F\right) m_{t,\Lambda_n}\, d\lambda_{\Lambda_n} = \int H\, dm_t$$

d'où,

$$\int U\, dm_t = \int H\, dm_t$$

puis,

$$\sigma(t)I_t(m_t) \geq m_t(H) + B_{\sigma(t)}$$

i.e.

$$\sigma(t)I_t(m_t) - (B_{\sigma(t)} + H_0) \geq m_t(H - H_0) \geq 0$$

Le terme de gauche tendant vers 0, quand $t\to\infty$, on a bien que

$$\lim_{t\to\infty} m_t(H) = H_0$$

$\square$

Une conséquence importante du théorème 14 est le résultat suivant:

Corollaire 16

Supposons (H_1) vérifiée.
Soit $\mathcal{N} = \{\ x \in \mathcal{X}\ /\ H(x) = H_0\}$
Soit η un élément de l'adhérence (pour la topologie de la convergence étroite sur $\mathcal{M}(\mathcal{X})$) des m_t, quand $t \to \infty$.

Alors $\eta(\mathcal{N}) = 1$

(ce qui montre a posteriori que $\mathcal{N} \neq \emptyset$, car $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ est compact pour la topologie étroite).

Dém. :

Le fait que les m_t soient invariants par translations impliquent que η vérifie également cette propriété. On a donc,

$$\eta(U) = \eta(H)$$

Mais par hypothèse, il existe une suite croissante de réels $(t_n)_{n\geq 0}$, telle que $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$, et $m_{t_n} \xrightarrow{(e)} \eta$. Ainsi, puisque U est continue, on a

$$\eta(U) = \lim_{n\to\infty} m_{t_n}(U)$$

et donc, d'après le théorème 15,

$$\eta(U) = H_0$$

i.e. $\eta(H) = H_0$, ce qui implique que $H = H_0$, η-p.s. , par définition de H_0.

D'où, $\qquad \eta(\mathcal{N}) = 1$

$\square$

Dans certains cas, on peut obtenir des résultats plus précis :
Supposons, outre l'hypothèse (H_1), que la relation suivante soit vérifiée :

$$(H_2) \qquad \inf_{x\in M^{\Lambda_1}} U(x) = H_0$$

(on a évidemment toujours $\inf_{x\in M^{\Lambda_1}} U(x) \leq H_0$.)

Soient

$$N = \{\ x \in M^{\Lambda_1}\ /\ U(x) = \inf U = H_0\}$$

et

$$\widetilde{\mathcal{N}} = \{\ x \in \mathcal{X}\ /\ \forall\ k \in \mathbb{Z}^d,\ (S_k(x))_{\Lambda_1} \in N\ \} \quad (\subset \mathcal{N})$$

Remarquons que si N peut être relativement facile à déterminer, $\widetilde{\mathcal{N}}$ peut l'être beaucoup moins (il se peut que les éléments de $\widetilde{\mathcal{N}}$ n'aient aucune propriété de périodicité).

On a alors, si η est comme dans le corollaire 16,

$$\eta(\widetilde{\mathcal{N}}) = 1$$

i.e. η est portée non seulement par les éléments d'énergie spécifique minimale, mais par ceux d'énergie totale minimale, où l'énergie totale est la fonction

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (U(S_k(\ .\ )) - H_0) \ : \ \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Ce résultat découle immédiatement de l'invariance par translations de η.

Pour finir, donnons un exemple classique qui vérifie la condition (H_2). Il s'agit du modèle d'Heisenberg d'interactions aux plus proches voisins :

$M = S_p$, la sphère de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, et l'interaction est définie par :

$J_F(x,y) = -x.y$, si $F = \{u,v\}$ avec $|u-v| = 1$

$J_F \equiv 0$, sinon,

où on a considéré les éléments x, y de S_p aussi comme des éléments de $\mathbb{R}^{p+1}$, $x.y$ désignant alors le produit scalaire canonique de x et y.

Dans ce cas $H_0 = -d$, et $\widetilde{\mathcal{N}} = \{\ x \in (S_p)^{\mathbb{Z}^d} \ / \ \forall\, i \in \mathbb{Z}^d,\ x_i = x_0\}$; il s'agit des éléments dont les spins sont tous alignés dans une même direction.

Références :

[1] L. Clemens : Ph. D. Thesis M.I.T. , Cambridge, Massachusetts.

[2] R. Holley and D. Stroock : "Diffusion on an Infinite Dimensional Torus." ; J.F.A. 42 (1981)

[3] R. Holley and D. Stroock : "Logarithmic Sobolev Inequalities and Stochastic Ising Models." ; J. of Stat. Phys. 46 (1987)

[4] R. Holley and D. Stroock : "Annealing via Sobolev Inequalities." ; C.M.P. 115 (1988)

[5] R. Holley, S. Kusuoka and D. Stroock : "Asymptotics of the Spectral Gap with Applications to the Theory of Simulated Annealing." ; J.F.A. 83 (1989)

[6] H.-O. Georgii : "Gibbs Measures and Phase Transitions" ; livre : ed. Walter de Gruyter (1988)