Bull. Sc. math.
119, 1995, p. 529-553.

COMPORTEMENT DE SPECTRES D'OPÉRATEURS DE SCHRÖDINGER À BASSE TEMPÉRATURE

PAR

LAURENT MICLO (*)

[Université Louis Pasteur, Strasbourg]

RÉSUMÉ. – Sur un graphe fini M, on considère le générateur L_β, à la température $\beta^{-1} \geq 0$, du processus du recuit simulé associé à un potentiel U. Soit $0 = \lambda_0(\beta) > \lambda_1(\beta) \geq \ldots \geq \lambda_{N-1}(\beta)$ ses valeurs propres. On étend un résultat de HOLLEY et STROOCK sur le comportement asymptotique de $\lambda_1(\beta)$, en prouvant que, pour tout $1 \leq i \leq N-1$, il existe des constantes $b_i \geq a_i > 0$ (ne dépendant que de M) et $c_i(M, U) \geq 0$, telles que, pour tout $\beta \geq 0$, $a_i \exp(-c_i(M, U)\beta) \leq -\lambda_i(\beta) \leq b_i \exp(-c_i(M, U)\beta)$, et on donne une description géométrique de $c_i(M, U)$. De plus, en notant $\tilde{L}_\beta = g_\beta^{-1} \circ L_\beta \circ g_\beta$ $\left(\text{où } g_\beta = \exp\left(\frac{\beta}{2} U\right)\right)$, l'opérateur de Schrödinger associé à L_β, on obtient la convergence de la somme des projections spectrales de $\tilde{L}_\beta$ relatives aux valeurs propres $\lambda_i(\beta)$ qui sont telles que $\lim_{\beta \to +\infty} \beta^{-1} \ln(\lambda_i(\beta)) = -k$ (pour tout $k \in \{c_1(M, U), \ldots, c_{N-1}(M, U)\}$ fixé), et on identifie la limite. On généralise ensuite ce type de résultats au cas continu où $L_\beta \cdot = \Delta \cdot - \beta \langle \nabla U, \nabla \cdot \rangle$ sur une variété riemannienne compacte et connexe, en se servant du comportement asymptotique de $\lambda_1(\beta)$ donné par HOLLEY, KUSUOKA et STROOCK.

ABSTRACT. – On a finite graph M, consider the generator L_β, at the temperature $\beta^{-1} \geq 0$, of the simulated annealing algorithm associated to a potential U. Let $0 = \lambda_0(\beta) > \lambda_1(\beta) \geq \ldots \geq \lambda_{N-1}(\beta)$ be its eigenvalues. We extend a result of HOLLEY

(*) Texte présenté par Marc YOR, reçu en octobre 1993.

Key words: Asymptotics of eigenvalues and eigenprojections, Schrödinger operators.

Laurent MICLO, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France.

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES – 0007-4497/95/06/$ 4.00
© Gauthier-Villars

and STROOCK on the asymptotics of $\lambda_1(\beta)$, by showing that for $1 \leq i \leq N-1$, there exists constants $b_i \geq a_i > 0$ (depending only on M) and $c_i(M, U) \geq 0$, such that for all $\beta \geq 0$, $a_i \exp(-c_i(M, U)\beta) \leq -\lambda_i(\beta) \leq b_i \exp(-c_i(M, U)\beta)$, and we give a geometrical interpretation of $c_i(M, U)$. Furthermore, let $\tilde{L}_\beta = g_\beta^{-1} \circ L_\beta \circ g_\beta$, where $g_\beta = \exp\left(\frac{\beta}{2} U\right)$, be the Schrödinger operator associated to L_β, we shall prove the convergence of the sum of the eigenprojections (of $\tilde{L}_\beta$) corresponding to the eigenvalues $\lambda_i(\beta)$ for which $\lim_{\beta \to +\infty} \beta^{-1} \ln(\lambda_i(\beta)) = -k$ (for any $k \in \{c_1(M, U), \ldots, c_{N-1}(M, U)\}$ fixed) and identify the limit. Then we will generalize this kind of results to the continuous case where $L_\beta \cdot = \Delta \cdot - \beta \langle \nabla U, \nabla \cdot \rangle$ on a compact and connected Riemannian manifold M, by using the asymptotics of $\lambda_1(\beta)$ given by HOLLEY, KUSUOKA and STROOCK.

1. Introduction

On va étudier le comportement asymptotique, quand la température tend vers 0, de la décomposition spectrale des opérateurs de Schrödinger associés aux générateurs des algorithmes du recuit simulé sur un espace discret, puis sur une variété riemannienne compacte et connexe.

Soit (M, μ, q) un graphe fini irréductible et réversible : M est un ensemble fini, μ est une probabilité chargeant tous les points de M et $q : M \times M \to \mathbf{R}_+$ est un noyau de probabilités de transitions irréductible et réversible par rapport à μ. Soit U une fonction réelle sur M.

Pour tout $\beta \geq 0$ (qui représente l'inverse de la température), considérons le noyau de probabilités de transitions q_β défini par, $\forall x, y \in M$,

$$q_\beta(x, y) = \begin{cases} \exp(-\beta(U(y) - U(x))_+)\, q(x, y), & \text{si } y \neq x \\ 1 - \sum_{z \neq x} q_\beta(x, z) & , \text{ si } y = x \end{cases}$$

et l'opérateur L_β associé, agissant sur les fonctions réelles ϕ définies sur M, par

$$\forall x \in M, \quad L_\beta \phi(x) = \sum_{y \in M} (\phi(y) - \phi(x))\, q_\beta(x, y).$$

Ces opérateurs sont les générateurs des algorithmes du recuit simulé, qui sont des procédures stochastiques de recherche des minima globaux de U introduites par KIRKPATRICK, GELATT et VECCHI [13] et GEMAN et GEMAN [5] (ce sujet a ensuite été beaucoup étudié, *voir* par exemple, [6], [8], [10], [3], [9], [1], [7], [2], [16] et [15]). Pour les liens qui existent entre le comportement de ces processus et les résultats qui suivent, on renvoit aux remarques qui précèdent les références.

Soit μ_β la mesure de
β^{-1}) définie par

$$\forall x \in M,$$

où $Z_\beta = \sum_{y \in M} \exp($

Il est clair que L_β est
rapport à μ_β. Ainsi, L_β

$$\lambda_0($$

ses valeurs propres (où
$\lambda_0(\beta) = 0$ et que l'esp
constantes, du fait de
STROOCK [10] ont mont
dépendant que du graph
tout $\beta \geq 0$, on ait

$$a_1 \exp(-c(M, U$$

et ils ont donné une desc
de chemins (*voir* la secti
propre $\lambda_i(\beta)$, pour $2 \leq$

Rappelons qu'un cycl
et reprise par CATONI [1
voir aussi MATHIEU [14
aléatoire) est une compo
de l'énergie U. Si C e
fond de C le nombre

base de C l'ensemble

$$b(C)$$

frontière de C l'ensem

$$\partial C = \{(x, y)$$

et hauteur de C le nor

$$h(C) = m$$

Soit μ_β la mesure de Gibbs (associée au potentiel U et la température β^{-1}) définie par

$$\forall x \in M, \quad \mu_\beta(x) = Z_\beta^{-1} \exp(-\beta U(x))\, \mu(x),$$

où $Z_\beta = \sum_{y \in M} \exp(-\beta U(y))\, \mu(y)$ est la constante de normalisation.

Il est clair que L_β est symétrique dans $L^2(\mu_\beta)$, car q_β est réversible par rapport à μ_β. Ainsi, L_β est diagonalisable. Notons

$$\lambda_0(\beta) \geq \lambda_1(\beta) \geq \ldots \geq \lambda_{N-1}(\beta)$$

ses valeurs propres (où N est le cardinal de M). Il est bien connu que $\lambda_0(\beta) = 0$ et que l'espace propre associé est l'ensemble des fonctions constantes, du fait de l'irréductibilité du graphe. De plus, HOLLEY et STROOCK [10] ont montré qu'il existe des constantes $b_1 \geq a_1 > 0$ (ne dépendant que du graphe (M, μ, q)) et $c(M, U) \geq 0$, telles que, pour tout $\beta \geq 0$, on ait

$$a_1 \exp(-c(M, U)\beta) \leq -\lambda_1(\beta) \leq b_1 \exp(-c(M, U)\beta),$$

et ils ont donné une description explicite de $c(M, U)$ en terme d'élévations de chemins (*voir* la section suivante). On va étendre ce résultat à la valeur propre $\lambda_i(\beta)$, pour $2 \leq i \leq N-1$.

Rappelons qu'un cycle (notion introduite par FREIDLIN et WENTZELL [4] et reprise par CATONI [1] pour l'étude des algorithmes du recuit simulé, *voir* aussi MATHIEU [14] pour son application aux diffusions en milieu aléatoire) est une composante connexe (non vide) des ensembles de niveau de l'énergie U. Si C est un sous-ensemble non vide de M, on appelle fond de C le nombre

$$f(C) = \min_{z \in C} U(z),$$

base de C l'ensemble

$$b(C) = \{ z \in C;\ U(z) = f(C) \},$$

frontière de C l'ensemble

$$\partial C = \{ (x, y) \in M^2;\ x \in C,\ y \notin C \text{ et } q(x, y) > 0 \},$$

et hauteur de C le nombre

$$h(C) = \min_{(x, y) \in \partial A} U(x) \vee U(y) - f(C).$$

Soit $k > 0$. Parmi les cycles C dont la hauteur satisfait $h(C) > k$, soit $C_1^k, \ldots, C_{R(k)}^k$ ceux qui sont minimaux pour l'inclusion ensembliste, on les appelera désormais les k-cycles. Remarquons que le nombre de k-cycles $R(k)$, en tant que fonction de k, est décroissant, constant par palier et continu à droite. Soit $\mathcal{K} = \{k_1, \ldots, k_T\}$, où $0 < k_1 < \ldots < k_T < +\infty$ les points de sauts de cette fonction. Il est facile de vérifier que, pour $k > c(M, U)$, $R(k) = 1$ et que, pour $k < c(M, U)$, $R(k) > 1$, ainsi $k_T = c(M, U)$, la constante introduite par HOLLEY et STROOCK. On conviendra également de poser $k_0 = 0$ et $k_{T+1} = +\infty$. Le premier résultat que l'on se propose de démontrer s'énonce :

THÉORÈME 1. – *Soit* $1 \leq i \leq N-1$ *et* $c_i \in \mathcal{K} \sqcup \{0\}$ *défini par*

$$c_i = \inf\{k > 0;\ R(k) \leq i\}.$$

Alors, il existe des constantes $b_i \geq a_i > 0$ *(ne dépendant que de* (M, μ, q)*) telles que, pour tout* $\beta \geq 0$, *on ait*

$$a_i \exp(-c_i \beta) \leq -\lambda_i(\beta) \leq b_i \exp(-c_i \beta).$$

On peut également décrire le comportement de certaines projections spectrales. Pour ceci, il est commode de se ramener à un cadre hilbertien fixe :

Soit Θ_β l'isométrie

$$L^2(\mu) \to L^2(\mu_\beta)$$
$$f \mapsto g_\beta f$$

où g_β est la fonction $M \ni x \mapsto Z_\beta^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\beta}{2} U(x)\right)$.

On s'intéresse à l'opérateur $\tilde{L}_\beta = \Theta_\beta^{-1} \circ L_\beta \circ \Theta_\beta$, qui admet même spectre que L_β, mais qui est symétrique dans $L^2(\mu)$. Par analogie avec le cas d'un espace des phases continu, $\tilde{L}_\beta$ peut être considéré comme un opérateur de Schrödinger discret.

Pour $0 \leq j \leq T$ fixé, remarquons que la famille $(b(C_l^k))_{1 \leq l \leq R(k)}$ des bases des k-cycles est indépendante de $k_j \leq k < k_{j+1}$. Pour de tels k et $1 \leq l \leq R(k)$, notons donc $F_{j,l}$ la fonction indicatrice de $b(C_l^k)$ et considérons l'espace vectoriel H_j engendré par ces fonctions. Il est

immédiat de vérifier
... $\subset H_0$. Pour $0 \leq$
$H_j = H_{j+1} \oplus W_j$ en
$L^2(\mu)$). On notera Q_j
en convenant de poser

D'autre part, pour β
par les vecteurs propre
$\lambda_i(\beta)$ dont les indices
$j = T$, $V_T(\beta)$ est la
qui est un vecteur pro
orthogonale sur $V_j(\beta)$

Alors :

THÉORÈME 2. – *Pour*

en tant qu'opérateurs

Rappelons que $L^2(\mu$
ici très importante.

Dans la section suiv
la formule du min-max
et STROOCK pour le c
sur l'inégalité géométri
section, comment le s
preuve.

Enfin, dans la dernièr
où M est une variété
comportement asympto
KUSUOKA et STROOCK [

2. Comportement d

Pour prouver le th
caractérisation variatio
min-max. Pour toute la
de Hilbert $L^2(\mu_\beta)$.

immédiat de vérifier que ces espaces sont emboîtés, $H_T \subset H_{T-1} \subset \ldots \subset H_0$. Pour $0 \leq j \leq T-1$, soit donc l'espace W_j tel que $H_j = H_{j+1} \oplus W_j$ en somme orthogonale (pour le produit scalaire de $L^2(\mu)$). On notera Q_j la projection orthogonale sur W_j, pour $0 \leq j \leq T$, en convenant de poser $W_T = H_T$.

D'autre part, pour $\beta \geq 0$ et $0 \leq j \leq T$, soient $V_j(\beta)$ l'espace engendré par les vecteurs propres (de l'opérateur $\tilde{L}_\beta$) associés aux valeurs propres $\lambda_i(\beta)$ dont les indices $0 \leq i \leq N-1$ sont tels que $c_i = k_{j+1}$ (pour $j = T$, $V_T(\beta)$ est la droite vectorielle engendrée par la fonction $1/g_\beta$ qui est un vecteur propre associé à $\lambda_0(\beta) = 0$) et $P_j(\beta)$ la projection orthogonale sur $V_j(\beta)$.

Alors :

THÉORÈME 2. – *Pour tout* $0 \leq j \leq T$ *fixé, on a*

$$\lim_{\beta \to +\infty} P_j(\beta) = Q_j$$

en tant qu'opérateurs de $L^2(\mu)$.

Rappelons que $L^2(\mu)$ est de dimension N, ainsi la topologie n'est pas ici très importante.

Dans la section suivante, on prouvera le premier théorème à l'aide de la formule du min-max, en reprenant la démonstration donnée par HOLLEY et STROOCK pour le comportement de la seconde valeur propre (basée sur l'inégalité géométrique de Poincaré), puis on verra dans la troisième section, comment le second théorème découle immédiatement de cette preuve.

Enfin, dans la dernière section, on adaptera ces résultats au cas continu où M est une variété riemannienne compacte et connexe, en utilisant le comportement asymptotique de la seconde valeur propre donné par HOLLEY, KUSUOKA et STROOCK [9] pour cette situation.

2. Comportement des valeurs propres

Pour prouver le théorème 1, on va utiliser une variante de la caractérisation variationnelle des valeurs propres par la formule du min-max. Pour toute la suite de cette section, on se place dans l'espace de Hilbert $L^2(\mu_\beta)$.

Soit $1 \leq i \leq N-1$ fixé. On a (*voir* le corollaire (4.3.18) p. 191 de [11]),

$$-(\lambda_1(\beta) + \ldots + \lambda_i(\beta)) = \min_{\dim(V)=i+1} \operatorname{tr}_V(-L_{\beta|V})$$

où le minimum est pris sur tous les sous-espaces vectoriels $V \subset L^2(\mu_\beta)$ de dimension $i+1$, où $L_{\beta|V}$ est la restriction à V de l'opérateur $P_V \circ L_\beta$ (P_V étant la projection orthogonale sur V) et où $\operatorname{tr}_V(\cdot)$ désigne la trace dans V.

Par ailleurs, soit $c_i = \inf\{k > 0;\ R(k) \leq i\}$ et $0 \leq j \leq T$ tel que $c_i = k_j$. On considère tout d'abord le cas où $j \neq 0$.

On va reprendre un résultat de [15] :

Soit A un sous-graphe connexe du graphe (M, q) et $x, y \in A$, on note $\mathcal{C}^A_{x,y}$ l'ensemble des chemins allant de x à y dans A (*i.e.* l'ensemble des suites $p = (p(l))_{1 \leq l \leq n}$ d'éléments de A telles que $p(1) = x$, $p(n) = y$ et satisfaisant, pour tout $1 \leq l < n$, $q(p(l), p(l+1)) > 0$). Si $p = (p(l))_{1 \leq l \leq n}$ est un tel chemin, son élévation est le nombre

$$e(p) = \max_{1 \leq l \leq n} U(p(l)).$$

On définit alors, pour tout $x, y \in A$,

$$H_A(x, y) = \min_{p \in \mathcal{C}^A_{x,y}} e(p)$$
$$V_A(x, y) = H_A(x, y) - U(x) - U(y) + f(A),$$

et on pose

$$c(A, U) = \max_{x, y \in A} V_A(x, y).$$

Soit $k > 0$, on dit que A est une k-cellule semi-large du premier type, en abrégé une k-csl1 (respectivement, une k-cellule semi-large du second type, en abrégé une k-csl2), si

$$h(A) > k \quad \text{et} \quad c(A, U) \leq k$$

(respectivement, $h(A) \geq k$ et $c(A, U) < k$).

La section 2 de [15] permet de voir qu'il existe une partition en k_j-csl1, $M = \sqcup_{l=1}^{R(k_j)} A_l$ et une partition en k_j-csl2, $M = \sqcup_{l=1}^{R(k_j-)} B_l$, où $R(k_j-) = \lim_{k \uparrow k_j} R(k) > i$ (on aura remarqué que, pour $k > 0$, $R(k)$ est aussi le nombre d'éléments d'une partition de M en k-csl1, partition qui existe toujours mais qui n'est pas unique en général, ce qui permet de voir que $R(\cdot)$ est une fonction continue à droite). On a donc $R(k_j) \leq i$ et $R(k_j-) > i$, de plus, la famille $(b(A_l))_{1 \leq l \leq R(k_j)}$ est exactement, à une réindexation près, la famille $(b(C^k_l))_{1 \leq l \leq R(k_j)}$, pour $k_j \leq k < k_{j+1}$,

et la famille $(b(B_l))_{1\leq l\leq R(k_j-)}$ est exactement, à une réindexation près, la famille $(b(C_l^k))_{1\leq l\leq R(k_j-)}$, pour $k_{j-1}\leq k<k_j$.

Commençons par montrer qu'il existe $b_i>0$ ne dépendant que du graphe, tel que, pour tout $\beta\geq 0$,

$$-\lambda_i(\beta)\leq b_i\exp(-c_i\,\beta),$$

et utilisons pour cela la partition en k_j-csl2, $M=\sqcup_{l=1}^{R(k_j-)}B_l$.

Pour tout $1\leq l\leq R(k_j-)$ fixé, notons $\tilde{e}_l$ la fonction indicatrice de B_l et $e_l=\langle(\tilde{e}_l)^2\rangle_\beta^{-\frac{1}{2}}\,\tilde{e}_l$ (où $\langle\cdot\rangle_\beta$ désigne l'espérance par rapport à μ_β, on conviendra aussi dans la suite de noter $\langle f,\,g\rangle_\beta=\langle fg\rangle_\beta$ le produit scalaire dans $L^2(\mu_\beta)$).

Il est clair que $(e_l)_{1\leq l\leq R(k_j-)}$ est une famille orthonormale, soit V le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(e_l)_{1\leq l\leq i+1}$. Par définition de la trace, on a

$$\mathrm{tr}_V(-L_{\beta\,|\,V})=-\sum\nolimits_{l=1}^{i+1}\langle e_l,\,L_\beta\,e_l\rangle_\beta$$

ainsi, d'après le rappel fait au début de cette section, on a

$$-(\lambda_1(\beta)+\ldots+\lambda_i(\beta))\leq-\sum\nolimits_{l=1}^{i+1}\langle e_l,\,L_\beta\,e_l\rangle_\beta.$$

Cependant, $\langle e_l,\,L_\beta\,e_l\rangle_\beta$ est facile à évaluer (voir la démonstration du lemme (2.3) de [10]) :

$$\begin{aligned}-\langle e_l,\,L_\beta\,e_l\rangle_\beta&=\frac{1}{2\langle(\tilde{e}_l)^2\rangle_\beta}\\&\quad\times\sum\nolimits_{x,\,y\in M}q_\beta(x,\,y)\,[\tilde{e}_l(y)-\tilde{e}_l(x)]^2\,\mu_\beta(x)\\&=\frac{1}{Z_\beta\langle(\tilde{e}_l)^2\rangle_\beta}\sum\nolimits_{(x,\,y)\in\partial B_l}\\&\quad\times\exp(-\beta\,[U(x)\vee U(y)])\,q(x,\,y)\,\mu(x)\\&\leq\frac{b_{i,\,l}^{(1)}}{Z_\beta\langle(\tilde{e}_l)^2\rangle_\beta}\exp(-\beta\,[f(B_l)+k_j])\end{aligned}$$

où on a posé $b_{i,\,l}^{(1)}=\sum_{(x,\,y)\in\partial B_l}q(x,y)\mu(x)$, car du fait que $h(B_l)\geq k_j$, on a, pour tout $(x,\,y)\in\partial B_l$, $U(x)\vee U(y)\geq f(B_l)+k_j$.

D'autre part, on a

$$Z_\beta\langle(\tilde{e}_l)^2\rangle_\beta=\sum\nolimits_{x\in B_l}\exp(-\beta\,U(x))\,\mu(x),$$

et il existe donc une constante $b_{i,l}^{(2)} > 0$ telle que, pour tout $\beta \geq 0$, on ait

$$\frac{1}{Z_\beta \langle (\tilde{e}_l)^2 \rangle_\beta} \leq b_{i,l}^{(2)} \exp(\beta f(B_l)).$$

On en déduit, en posant $b_i = \sum_{l=1}^{i+1} b_{i,l}^{(1)} b_{i,l}^{(2)}$, que l'on a, pour tout $\beta \geq 0$,

$$-\lambda_i(\beta) \leq -(\lambda_1(\beta) + \ldots + \lambda_i(\beta)) \leq b_i \exp(-k_j \beta),$$

ce qui est le résultat annoncé.

Intéressons-nous maintenant à l'autre inégalité,

$$-\lambda_i(\beta) \geq a_i \exp(-c_i \beta),$$

et considérons la partition en k_j-csl1, $M = \sqcup_{l=1}^{R(k_j)} A_l$.

Pour tout $1 \leq l \leq R(k_j)$, notons f_l^* la forme linéaire sur $L^2(\mu_\beta)$ définie par

$$\forall f \in L^2(\mu_\beta), \quad f_l^*(f) = \sum_{y \in B_l} f(y)\, \mu_\beta(y)$$

La famille (f_l^*) est clairement indépendante, ainsi si on note

$$W = \{ f \in L^2(\mu_\beta);\ f_l^*(f) = 0, \quad \forall 1 \leq l \leq R(k_j) \},$$

on a $\dim(W) = N - R(k_j) \geq N - i$.

Soit V un sous-espace vectoriel de $L^2(\mu_\beta)$ de dimension $i+1$, nécessairement, on a $V \cap W \neq \{0\}$. Soit donc $e_1 \in V \cap W \backslash \{0\}$, $\langle e_1^2 \rangle = 1$, que l'on complète en une base orthonormée de V. Puisque $-L_\beta$ est un opérateur symétrique et positif dans $L^2(\mu_\beta)$, on a

$$\mathrm{tr}_V(-L_{\beta|V}) = -\sum_{l=1}^{i+1} \langle e_l, L_\beta e_l \rangle_\beta \geq -\langle e_1, L_\beta e_1 \rangle_\beta.$$

Cependant, du fait que $e_1 \in W$, on a, pour tout $1 \leq l \leq R(k_j)$ fixé,

$$\sum_{x \in A_l} e_1^2(x)\, \mu_\beta(x) = \frac{1}{2\, \mu_\beta(A_l)} \times \sum_{x,y \in A_l} (e_1(y) - e_1(x))^2\, \mu_\beta(x)\, \mu_\beta(y).$$

Or, d'après un calcul de Holley et Stroock (*cf.* p. 562 de [10], pour ce type d'inégalité, dite inégalité géométrique de Poincaré, on renvoit aussi à

GÖTZE [7] et aux références qu'il cite), il existe une constante $a_{i,l} > 0$ ne dépendant que du graphe, telle que, pour tout $\beta \geq 0$, on ait

$$\begin{aligned}
&\sum\nolimits_{x,\, y \in A_l} (e_1(y) - e_1(x))^2 \, \frac{\mu_\beta(x)}{\mu_\beta(A_l)} \, \frac{\mu_\beta(y)}{\mu_\beta(A_l)} \\
&\quad \leq a_{i,l} \exp(c(A_l,\, U)\, \beta) \\
&\quad \times \sum\nolimits_{x,\, y \in A_l} (e_1(y) - e_1(x))^2 \, q_\beta(x,\, y) \, \frac{\mu_\beta(x)}{\mu_\beta(A_l)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, du fait que, pour tout $1 \leq l \leq R(k_j)$, $c(A_l,\, U) \leq k_j$, on a

$$\begin{aligned}
1 = \langle e_1^2 \rangle_\beta &= \sum\nolimits_{l=1}^{R(k_j)} \sum\nolimits_{x \in A_l} e_1^2(x)\, \mu_\beta(x) \\
&\leq \frac{1}{2} \exp(k_j\, \beta) \sum\nolimits_{l=1}^{R(k_j)} a_{i,l} \\
&\quad \times \sum\nolimits_{x,\, y \in A_l} (e_1(y) - e_1(x))^2 \, q_\beta(x,\, y)\, \mu_\beta(x) \\
&\leq -(i a_i)^{-1} \exp(k_j\, \beta) \langle e_1,\, L_\beta\, e_1 \rangle_\beta,
\end{aligned}$$

où on a posé $a_i = (i \max_{1 \leq l \leq R(k_j)} a_{i,l})^{-1}$.

On en déduit que

$$-\lambda_i(\beta) \geq -\frac{1}{i} (\lambda_1(\beta) + \ldots \lambda_i(\beta)) \geq -\langle e_1,\, L_\beta\, e_1 \rangle_\beta \geq a_i \exp(-k_j\, \beta),$$

ce qui termine la démonstration du théorème 1 dans le cas où $c_i = k_j \neq 0$.

Reste donc à considérer les cas où l'indice $1 \leq i \leq N - 1$ est tel que $c_i = 0$. Remarquons que toute valeur propre $\lambda_i(\beta)$ de L_β est minorée par -2. En effet, pour tout $\beta \geq 0$ et tout $x \in M$, on a

$$\begin{aligned}
|L_\beta\, f(x)| &\leq \sum\nolimits_{y \in M} q_\beta(x,\, y)\, |f(y) - f(x)| \\
&\leq 2 \max\nolimits_{y \in M} |f(y)| \sum\nolimits_{y \in M} q_\beta(x,\, y) \\
&= 2 \max\nolimits_{y \in M} |f(y)|
\end{aligned}$$

ainsi, en prenant pour f un vecteur propre non nul associé à $\lambda_i(\beta)$ et $x \in M$ tel que $|f(x)| = \max_{y \in M} |f(y)|$, on obtient $|\lambda_i(\beta)| \leq 2$.

En conséquence, il suffit de démontrer que si $c_i = 0$, alors il existe $a_i > 0$ tel que, pour tout $\beta \geq 0$,

$$-\lambda_i(\beta) \geq a_i.$$

Or notons qu'il existe toujours une partition en 0-csl1, $M = \sqcup_{l=1}^{R(0)} A_l$ et que $R(0) \geq i$, si i est tel que $c_i = 0$. On peut alors reprendre la seconde partie de la démonstration précédente pour obtenir l'inégalité ci-dessus.

Remarque. – On peut donner d'autres caractérisations de l'ensemble $\mathcal{K}$ (*cf.* [15]) :

– Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des $N \subset M$ (non nécessairement connexes) tels que U soit constant sur N. Pour $N \in \mathcal{N}$, on pose $U(N) = U(x)$, pour tout $x \in N$, et on définit

$$D(N) = \{ y \notin N;\ U(y) \leq U(N) \}$$

et

$$K(N) = \inf_{x \in N,\, y \in D(N)} H_M(x, y) - U(N).$$

Alors,

$$\mathcal{K} = \{ K(N);\ N \in \mathcal{N} \} \cap]\, 0, +\infty[$$

– Pour $k > 0$, on appelle k-cellule tout sous-graphe connexe A tel que $h(A) > k$ et $c(A, U) < k$. $\mathcal{K}$ est aussi l'ensemble des $k > 0$ pour lesquels il n'existe pas de partition de M en k-cellules.

3. Comportement des projections spectrales

Le théorème 2 se déduit facilement de la démonstration précédente. On se place désormais dans l'espace de Hilbert $L^2(\mu)\,(= L^2(\mu_0))$ et on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire et $\langle \cdot \rangle$ l'espérance par rapport à μ.

Soit $0 \leq j \leq T$ fixé. En reprenant les notations de l'introduction, remarquons que

$$\dim(H_j) = R(k_j) = R(k_{j+1}-) = \dim(\tilde{V}_j(\beta)),$$

où $\tilde{V}_j(\beta) = V_T(\beta) \oplus \ldots \oplus V_j(\beta)$.

Ainsi, d'après le lemme ci-dessous (dont la démonstration élémentaire est laissée au lecteur), pour prouver le théorème 2, il suffit de voir que, pour tout $1 \leq l \leq R(k_j)$,

$$(\star) \qquad \lim_{\beta \to +\infty} \sum_{l'=j}^{T} P_{l'}(\beta)\, F_{j,l} = F_{j,l}$$

LEMME 3. – *Dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, soit V et $\tilde{V}$ deux sous-espaces de dimension finie r. On note P_V (respectivement $P_{\tilde{V}}$) la projection orthogonale sur V (respectivement sur $\tilde{V}$). Supposons qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_r)$ de V telle que, pour tout $1 \leq i \leq r$, on ait*

$$\| P_{\tilde{V}}\, e_i - e_i \|^2 \leq \varepsilon, \qquad \text{où} \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Alors,

$$||| P_V - P_{\tilde{V}} ||| \leq \sqrt{2\, r \varepsilon}$$

où $|||\cdot|||$ est la norme d'opérateurs associée à la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{H}$.

Cependant, considérons à nouveau une partition en k_{j+1}-csl2, $M = \sqcup_{l=1}^{R(k_{j+1}-)} B_l$ et la suite de fonctions $(e_l)_{1 \leq l \leq R(k_{j+1}-)}$ qui lui est associée comme dans la section précédente. On y a vu que

$$\liminf_{\beta \to +\infty} [-\beta^{-1} \ln(-\langle e_l, L_\beta\, e_l \rangle_\beta)] \geq k_{j+1}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\liminf_{\beta \to +\infty} [-\beta^{-1} \ln(-\langle \hat{e}_l, \tilde{L}_\beta\, \hat{e}_l \rangle)] \geq k_{j+1}$$

où $\hat{e}_l = \Theta_\beta^{-1}\, e_l = g_\beta^{-1}\, e_l$.

Ce résultat permet de vérifier, en vertu du théorème 1, que

$$\begin{aligned} &\liminf_{\beta \to +\infty} \left\langle \left(\sum_{l'=j}^{T} P_{l'}(\beta)\, \hat{e}_l \right)^2 \right\rangle \\ &\quad = \lim_{\beta \to +\infty} \left\langle \left(\sum_{l'=j}^{T} P_{l'}(\beta)\, \hat{e}_l \right)^2 \right\rangle = \langle (\hat{e}_l)^2 \rangle = 1. \end{aligned}$$

Or, pour $1 \leq l \leq R(k_{j+1}-)$, $\hat{e}_l$ converge quand β devient grand vers la fonction $\mu(b(B_l))^{-\frac{1}{2}}\, \hat{F}_{j,l}$, où $\hat{F}_{j,l}$ est la fonction indicatrice de $b(B_l)$. Ainsi, de l'égalité $\{ \hat{F}_{j,l};\, 1 \leq l \leq R(k_{j+1}-) \} = \{ F_{j,l};\, 1 \leq l \leq R(k_j) \}$, on déduit que l'on a aussi, pour tout $1 \leq l \leq R(k_j)$,

$$\lim_{\beta \to +\infty} \left\langle \left(\sum_{l'=j}^{T} P_{l'}(\beta)\, F_{j,l} \right)^2 \right\rangle = \langle (F_{j,l})^2 \rangle$$

ce qui est équivalent à $(\star)$.

4. Cas continu

On va généraliser les résultats précédents au cas où l'espace des phases M est continu et compact.

Soit M une variété riemannienne compacte et connexe, on note $\langle\, ,\, \rangle, |\,|, \nabla, \Delta$ et μ, le produit scalaire, la norme, le gradient, le laplacien et la probabilité associés à la structure riemannienne de M. Soit $U \in C^{\infty}(M)$ un potentiel régulier tel que $\max_{z \in M} |\nabla U|(z) \leq 1$.

Pour tout $\beta \geq 0$ fixé, soit μ_β la probabilité sur M dont la densité par rapport à μ (encore notée μ_β) est donnée par

$$\forall x \in M, \quad \mu_\beta(x) = Z_\beta^{-1} \exp(-\beta U(x))$$

où $Z_\beta = \int_M \exp(-\beta U(y))\, \mu(dy)$ est la constante de normalisation.

On considère l'unique extention auto-adjointe L_β (dans $L^2(\mu_\beta)$) de l'opérateur $\hat{L}_\beta$ défini sur $C^2(M)$ par

$$\forall \phi \in C^2(M), \quad \forall x \in M, \quad \hat{L}_\beta \phi(x) = \Delta\phi - \beta \langle \nabla U, \nabla \phi \rangle.$$

Ces opérateurs L_β apparaissent comme les générateurs des algorithmes du recuit simulé adaptés à la recherche des minima globaux de U sur M (pour l'étude de ces processus, *voir* par exemple, [9], [2] et [15]).

Pour tout $\beta \geq 0$, il est bien connu que le spectre de L_β est discret, non borné et constitué de valeurs propres de multiplicité finie. Notons $(\lambda_i(\beta))_{i \geq 0}$ ces valeurs propres (avec multiplicité) rangées en ordre décroissant. Tout comme dans le cas fini, $\lambda_0(\beta) = 0$ et l'espace propre associé est l'ensemble des fonctions constantes. De plus, HOLLEY, KUSUOKA et STROOCK [9] ont montré qu'il existe des constantes $b_i \geq a_1 > 0$ (ne dépendant que de M) et $c(M, U) \geq 0$, telles que, pour tout $\beta \geq 0$, on ait

$$\begin{aligned} &a_1 (1 \vee \beta)^{-5m+2} \exp(-c(M, U)\beta) \\ &\quad \leq -\lambda_1(\beta) \leq b_1 (1 \vee \beta)^{4m+2} \exp(-c(M, U)\beta) \end{aligned}$$

(où m est la dimension de M) et ils ont donné une description explicite de $c(M, U)$ en terme d'élévations de chemins, similaire à celle obtenue dans le cas discret. Notre premier objectif ici est d'étendre ce résultat à la valeur propre $\lambda_i(\beta)$, pour $i \geq 2$.

On reprend les notations et notions introduites dans l'introduction : si C est un sous-ensemble non vide de M, on appelle fond de C le nombre

$f(C) = \inf_{z \in C} U(z)$, base de C l'ensemble $b(C) = \{ z \in C;\ U(z) = f(C) \}$ et hauteur de C le nombre $h(C) = \min_{x \in \partial C} U(x) - f(C)$ où ∂C est la frontière topologique de C.

Un cycle est toujours une composante connexe (non vide) des ensembles de niveau de l'énergie U. Pour $k > 0$, soit $\mathcal{C}(k)$ l'ensemble des cycles C dont la hauteur satisfait $h(C) > k$, il est facile de vérifier que cet ensemble admet un nombre fini $R(k)$ d'infima pour l'inclusion ensembliste, disons $C_1^k, \ldots, C_{R(k)}^k$. On les appelle les k-cycles, remarquons qu'ils sont fermés et que contrairement au cas fini, ils satisfont $h(C_i^k) = k$, pour $1 \leq i \leq R(k)$.

La fonction $R(\cdot)$ est décroissante, constante par palier et continue à droite sur $]0, +\infty[$. Soit $\mathcal{K} = \{ k_i; i \geq 1 \}$ l'ensemble de ses points de sauts, où les k_i sont rangés ici en ordre décroissant. Notons que $k_1 = c(M, U)$, mais il se peut que $\mathcal{K}$ soit infini, et on a alors $\lim_{i \to +\infty} k_i = 0$ (on conviendra désormais de poser $T = \operatorname{card}(\mathcal{K}) \leq +\infty$, $k_0 = +\infty$ et $k_{T+1} = 0$). Néanmoins dans tous les cas, le comportement asymptotique des valeurs propres est donné par

THÉORÈME 4. – *Soit $i \geq 1$ et $c_i \in \mathcal{K} \sqcup \{0\}$ défini par*

$$c_i = \inf \{ k > 0;\ R(k) \leq i \}.$$

Alors, il existe des constantes $b_i \geq a_i > 0$ (ne dépendant que de M et de (i)*) telles que, pour tout $\beta \geq 0$, on ait*

$$\begin{aligned} & a_i (1 \vee \beta)^{-5m+2} \exp(-c_i \beta) \\ & \leq -\lambda_i(\beta) \leq b_i (1 \vee \beta)^{3m+2} \exp(-c_i \beta). \end{aligned}$$

Remarque. – Soit L l'ensemble des minima locaux, c'est-à-dire l'ensemble des $x \in M$ pour lesquels il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $y \in M$, on ait

$$U(y) < U(x) \quad \Rightarrow \quad \inf_{\varphi \in \mathcal{C}_{x,y}^M} e(\varphi) \geq U(x) + \varepsilon$$

($\mathcal{C}_{x,y}^M$ et $e(\cdot)$ sont définis comme dans le cas discret, *voir* ci-dessous).

Considérons $\mathcal{L}$ l'ensemble des classes d'équivalence sur L pour la relation $\sim$ définie par

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad [U(x) = U(y) \text{ et } \inf_{\varphi \in \mathcal{C}_{x,y}^M} e(\varphi) = U(x)].$$

On a vérifié dans [15] que la finitude de $\mathcal{K}$ est équivalente à celle de $\mathcal{L}$, du fait que la variété M est compacte.

La démonstration du théorème 4 permet également d'obtenir des renseignements sur le comportement de certaines projections spectrales, si l'on fait des hypothèses supplémentaires sur la régularité des minima locaux de U.

Plus précisément, soit $0 \leq i < T+1$ fixé. Remarquons, comme dans le cas discret, que la famille $(b(C_l^k))_{1 \leq l \leq R(k)}$ des bases des k-cycles est indépendante de $k_{j+1} \leq k < k_j$. Soit un tel k, satisfaisant en outre $k > 0$, et $1 \leq l \leq R(k)$ fixés, on note $\mu_{C_l^k, \beta}$ la probabilité sur M qui admet pour densité par rapport à μ la fonction définie par $\forall x \in M$,

$$\mu_{C_l^k, \beta}(x) = \begin{cases} \mu_\beta (C_l^k)^{-1} \mu_\beta(x), & \text{si} \quad x \in C_l^k \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On suppose que ces mesures convergent étroitement, quand β devient grand, vers une certaine probabilité notée $\mu_{j,l}$. De plus, soient

$$\tilde{h}_{j,l}^k(\beta) = \frac{\left[\int_{C_l^k} \exp\left[-(\beta/2)\, U(x)\right] d\mu(x)\right]^2}{\int_{C_l^k} \exp\left(-\beta U(x)\right) d\mu(x)}$$

et τ_j une fonction strictement positive sur $\mathbf{R}_+$, telle que, pour β grand (à k fixé),

$$\sum\nolimits_{l=1}^{R(k)} \tilde{h}_{j,l}^k(\beta) \sim \tau_j(\beta)$$

(on peut prendre par exemple $\tau_j(\beta) = \sum_{l=1}^{R(k_{j+1})} \tilde{h}_{j,l}^{(k_j+k_{j+1})/2}(\beta)$). On suppose également que la limite suivante existe

$$\lim_{\beta \to +\infty} \tau_j^{-1}(\beta)\, \tilde{h}_{j,l}^k(\beta) = h_{j,l}.$$

Remarquons que ces propriétés, la probabilité limite $\mu_{j,l}$ (qui est nécessairement portée par $b(C_l^k)$) et le nombre $h_{j,l}$ ne dépendent pas du choix de $k \in]\, k_{j+1}, k_j[$. On dira que la condition (C) est vérifiée, si les hypothèses précédentes de convergence sont satisfaites pour tout $0 \leq j < T+1$ et tout $1 \leq l \leq R(k_{j+1})$.

Par ailleurs, notons $\mathcal{C}$ l'espace de Banach des fonctions continues sur M, muni de la norme uniforme, et $\mathcal{M}$ l'ensemble des mesures signées sur M, muni de la topologie de la convergence étroite. Rappelons que $\mathcal{M}$ est le dual topologique de $\mathcal{C}$, on désignera par $(\cdot\,,\cdot)$ le crochet de dualité.

Soit $\mathcal{L}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ l'ensemble des applications continues de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{M}$. On le munit de la topologie minimale qui rend continues toutes les applications

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathcal{C}, \mathcal{M}) &\to \mathbf{R} \\ G &\mapsto (G(\phi), \varphi) \end{aligned}$$

pour $\phi, \varphi \in \mathcal{C}$.

Pour $0 \leq j < T+1$ fixé comme précédemment, on note $\tilde{Q}_j \in \mathcal{L}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ l'élément défini par

$$\forall f \in \mathcal{C}, \quad \tilde{Q}_j(f) = \sum_{l=1}^{R(k_{j+1})} h_{j,l}(\mu_{j,l}, f)\, \mu_{j,l}$$

Revenons aux opérateurs L_β et plus précisément aux opérateurs $\tilde{L}_\beta = \Theta_\beta^{-1} \circ L_\beta \circ \Theta_\beta$ symétriques dans $L^2(\mu)$, où Θ_β est l'isométrie

$$\begin{aligned} L^2(\mu) &\to L^2(\mu_\beta) \\ f &\mapsto g_\beta f \end{aligned}$$

(g_β étant la fonction $M \ni x \mapsto Z_\beta^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{\beta}{2} U(x)\right]$.

On calcule que $\tilde{L}_\beta$ est l'opérateur de Schrödinger

$$\Delta \cdot + \left[\frac{\beta}{2} \Delta U - \frac{\beta^2}{4} |\nabla U|^2\right].$$

Pour $\beta \geq 0$ et $0 \leq j < T+1$ fixés, soient $V_j(\beta)$ l'espace engendré par les vecteurs propres (de l'opérateur $\tilde{L}_\beta$) associés aux valeurs propres $\lambda_i(\beta)$ dont les indices $i \geq 0$ sont tels que $c_i = k_j$ (pour $j = 0$, $V_0(\beta)$ est la droite vectorielle engendrée par la fonction $1/g_\beta$ qui est un vecteur propre associé à $\lambda_0(\beta) = 0$) et $P_j(\beta)$ la projection orthogonale (dans $L^2(\mu)$) sur $V_j(\beta)$. Par le biais des deux injections canoniques $\mathcal{C} \hookrightarrow L^2(\mu)$ et $L^2(\mu) \hookrightarrow \mathcal{M}$, $P_j(\beta)$ peut être considéré comme un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$.

PROPOSITION 5. – *Supposons la condition* (C) *vérifiée. Alors, pour tout* $0 \leq j < T+1$ *fixé, on a*

$$\lim_{\beta \to +\infty} \tau_j^{-1}(\beta) \sum_{l=0}^{j} P_l(\beta) = \tilde{Q}_j$$

pour la topologie de $\mathcal{L}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$.

Exemple. – Les résultats de HWANG [12] permettent de voir que la condition (C) est satisfaite sous les hypothèses suivantes :

(i) Pour tout $\min_{z \in M} U(z) \leq u \leq \max_{z \in M} U(z)$ fixé, il n'existe, au plus, qu'un nombre fini de classes $\Lambda \in \mathcal{L}$ telles que $U(\Lambda) = u$ (par définition, $U(\Lambda) = U(x)$ pour tout $x \in \Lambda$).

(ii) Pour tout $\Lambda \in \mathcal{L}$, l'une des deux propriétés ci-dessous est vérifiée :

- $\mu(\Lambda) > 0$
- l'ensemble Λ est une variété régulière (nécessairement alors compacte et connexe) telle qu'en tout point $x \in \Lambda$, le déterminant du Hessien de U normal à Λ en x est non nul.

En effet, pour $0 \leq j < T+1$, $k_{j+1} \leq k < k_j$ (et $k > 0$) et $1 \leq l \leq R(k)$ fixés, remarquons que (i) implique que $b(C_l^k)$ est la réunion d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{L}$. On peut alors appliquer la proposition (2.2) ou le théorème (3.1) de [12] pour obtenir la convergence escomptée des mesures et avoir une description explicite de la probabilité limite $\mu_{j,l}$:

Si Λ est une variété riemannienne (quelconque), on note λ_Λ sa mesure canonique (*i.e.* celle dont l'expression dans une carte est donnée par $d\lambda_\Lambda = \sqrt{\det(G(x))}\, dx$, où $G(x)$ est la matrice définissant le produit scalaire de Λ en x). Ainsi, par définition, on a $d\mu = \lambda_M(M)^{-1}\, d\lambda_M$. Soient $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_\tau \in \mathcal{L}$ les composantes connexes de $b(C_l^k)$ qui sont de dimension maximale (disons $0 \leq n_{j,l} \leq m$) et posons $N_{j,l} = \Lambda_1 \sqcup \ldots \sqcup \Lambda_\tau$. Si $n_{j,l} < m$, pour tout $x \in N_{j,l}$, soit $D_{j,l}(x)$ l'inverse de la racine carrée du déterminant (nécessairement positif) du Hessien de U normal à $N_{j,l}$ en x. Si $n_{j,l} = m$, on convient de poser $d\lambda_{N_{j,l}}(x) = 1_{N_{j,l}}(x)\, d\lambda_M(x)$ et de prendre $D_{j,l} \equiv 1$ sur $N_{j,l}$. Alors, $\mu_{j,l}$ est la probabilité sur $N_{j,l}$ qui admet $\left[\int D_{j,l}(y)\, \lambda_{N_{j,l}}(dy)\right]^{-1} D_{j,l}(\cdot)$ pour densité par rapport à $\lambda_{N_{j,l}}$.

De plus, les calculs de HWANG (basés sur la formule de Laplace) montrent que, quand β devient grand,

$$\tilde{h}_{j,l}^k(\beta) \sim (8\pi\beta^{-1})^{\frac{m-n_{j,l}}{2}} \frac{\lambda_{N_{j,l}}(D_{j,l})}{\lambda_M(M)}$$

ainsi, en posant

$$\tilde{n}_j = \max_{1 \leq l \leq R(k)} n_{j,l}$$

et

$$K_j = \sum_{l;\, n_{j,l} = \tilde{n}_j} \lambda_M^{-1}(M)\, \lambda_{N_{j,l}}(D_{j,l}),$$

on peut prendre

$$\tau_j(\beta) = K_j\,(8\,\pi\beta^{-1})^{\frac{m-\tilde{n}_j}{2}}$$

et

$$h_{j,l} = \begin{cases} K_j^{-1}\,\lambda_M^{-1}(M)\,\lambda_{N_{j,l}}(D_{j,l}), & \text{si} \quad n_{j,l} = \tilde{n}_j \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cependant, la proposition 5 est moins satisfaisante que le théorème 2, car en général, le rang de $\tilde{Q}_j$ sera inférieur au rang des $\sum_{l=0}^{j} P_l(\beta)$ (qui est $R(k_{j+1})$). Pour obtenir un véritable équivalent de ce théorème, remplaçons l'hypothèse (ii) par

(iii) l'ensemble $\mathcal{L}$ satisfait l'une des propriétés suivantes :

- pour tout $\Lambda \in \mathcal{L}$, $\mu(\Lambda) > 0$, on pose alors $n = m$.
- Il existe $0 \leq n < m$, tel que tout $\Lambda \in \mathcal{L}$ est une variété régulière de dimension n telle qu'en tout point $x \in \Lambda$, le déterminant du Hessien de U normal à Λ en x est non nul.

Pour $0 \leq j < T+1$ fixé, notons $\hat{Q}_j \in \mathcal{L}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ l'élément défini par

$$\forall f \in \mathcal{C},$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_j(f) &= \sum_{l=1}^{R(k_{j+1})} (8\,\pi)^{\frac{m-n}{2}}\,\lambda_M^{-1}(M)\,\lambda_{N_{j,l}}(D_{j,l})\,(\mu_{j,l},\, f)\,\mu_{j,l} \\ &= \sum_{l=1}^{R(k_{j+1})} (8\,\pi)^{\frac{m-n}{2}}\,(\mu_{j,l},\, f)\,D_{j,l}\,\frac{\lambda_{N_{j,l}}}{\lambda_M(M)} \end{aligned}$$

puis on pose

$$Q_j = \hat{Q}_j - \hat{Q}_{j-1}$$

en ayant convenu de prendre $\hat{Q}_{-1} = 0$. Alors, sous les hypothèses (i) et (iii), on a, pour tout $0 \leq j < T+1$ fixé,

$$\lim_{\beta \to +\infty} \beta^{\frac{m-n}{2}}\,P_j(\beta) = Q_j$$

pour la topologie de $\mathcal{L}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$.

Les démonstrations du théorème 4 et de la proposition 5 sont analogues à celles données dans le cas discret, on se contentera donc de les esquisser.

Reprenons les notations introduites dans la section 2 : pour tout sous-ensemble fermé et connexe $A \subset M$ et tous $x,\, y \in A$, on note $\mathcal{C}_{x,\,y}^{A}$

l'ensemble des chemins allant de x à y dans A (*i.e.* l'ensemble des applications continues $p : [0, 1] \to A$ telles que $p(0) = x$ et $p(1) = y$). Si p est un tel chemin, son élévation est le nombre $e(p) = \max_{0 \leq t \leq 1} U(t)$). On définit alors, pour tout $x, y \in A$,

$$H_A(x, y) = \inf_{p \in \mathcal{C}^A_{x,y}} e(p)$$
$$V_A(x, y) = H_A(x, y) - U(x) - U(y) + f(A)$$

et on pose

$$c(A, U) = \max_{x, y \in A} V_A(x, y)$$

Pour prouver le théorème 4, on utilise la caractérisation variationnelle par les traces de $-[\lambda_1(\beta) + \ldots + \lambda_i(\beta)]$, qui est également valable ici, et on reprend les démonstrations de Holley, Kusuoka et Stroock [9].

Soit $i \geq 1$ fixé et $j \geq 1$ tel que $k_j = c_i$. Commençons par vérifier qu'il existe $b_i > 0$ ne dépendant que de M et de i, tel que, pour tout $\beta \geq 0$, on ait

$$(\dagger) \qquad -\lambda_i(\beta) \leq b_i (1 \vee \beta)^{3m+2} \exp(-k_j \beta)$$

Supposons tout d'abord que $k_j > 0$. Pour $k_{j+1} \leq k < k_j$, la famille $(b(C_l^k))_{1 \leq l \leq R(k_{j+1})}$ ne dépend pas de k et $R(k_{j+1}) \geq i + 1$. Pour $1 \leq l \leq R(k_{j+1})$, choisissons $x_l \in b(C_l^k)$ et posons

$$D_l = \{ x \in M;\ H_M(x, x_l) - U(x_l) < k_j \}$$

il est facile de vérifier que ces ensembles sont disjoints et que leur définition ne dépend pas du choix de $x_l \in b(C_l^k)$ (ce sont en fait exactement les suprema, pour l'inclusion ensembliste, de l'ensemble des cycles C satisfaisant $h(C) < k_j$).

Pour $0 < \varepsilon < k_j$, considérons les ensembles définis par

$$D_{l,\varepsilon} = \left\{ x \in D_l;\ \inf_{y \notin D_l} d(x, y) \geq \frac{2\varepsilon}{3} \right\}$$
$$\tilde{D}_{l,\varepsilon} = \left\{ x \in D_l;\ \inf_{y \notin D_l} d(x, y) \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\}$$

(où d est la distance associée à la structure riemannienne de M).

Il existe des fonctions $\psi_{j,l,\varepsilon} \in C^\infty(M)$ à valeurs dans $[0, 1]$ telles que

$$\psi_{j,l,\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in D_{l,\varepsilon} \\ 0, & \text{si } x \notin \tilde{D}_{l,\varepsilon} \end{cases}$$

et telles que $\max_{z \in M} |\nabla \psi_{j,l,\varepsilon}|(z) \leq b^{(1)} \varepsilon^{-(m+1)}$, où $b^{(1)} > 0$ est une constante ne dépendant que de M (*cf.* la démonstration p. 336 de [9]). Toujours en suivant HOLLEY, KUSUOKA et STROOCK, on voit alors qu'il existe une autre constante $b^{(2)} > 0$ ne dépendant que de M, telle que, pour tout $1 \leq l \leq R(k_{j+1})$ et tout $0 < \varepsilon < k_j^{-1}$,

$$\frac{\langle \psi_{j,l,\varepsilon}, L_\beta \psi_{j,l,\varepsilon} \rangle_\beta}{\langle \psi_{j,l,\varepsilon}, \psi_{j,l,\varepsilon} \rangle_\beta} \leq b^{(2)} \varepsilon^{-3m-2} \exp(-\beta [k_j - \varepsilon])$$

(au lieu de $b^{(2)} \varepsilon^{-4m-2} \exp(-\beta [k_j - \varepsilon])$ pour HOLLEY, KUSUOKA et STROOCK, on a donc gagné un facteur ε^{-m}, ce qui explique la petite différence entre l'énoncé du théorème 4 et le résultat de [9]).

Cependant, remarquons que les fonctions $(\psi_{j,l,\beta^{-1}})_{1 \leq l \leq i+1}$ sont orthogonales et non nulles, pour $\beta > k_j^{-1}$, ainsi, en considérant le sous-espace vectoriel qu'elles engendrent, on obtient immédiatement que, pour tout $\beta > k_j^{-1}$,

$$-\lambda_i(\beta) \leq -[\lambda_1(\beta) + \ldots, \lambda_i(\beta)] \leq (i+1)\, b^{(2)}\, e\beta^{3m+2} \exp(-k_j \beta).$$

Pour traiter les cas où $\beta \leq k_j^{-1}$, il suffit d'adapter la démonstration du lemme (1.5) de [9] ; il existe une constante $b_i^{(3)}$ ne dépendant que de M et de i, telle que, pour tout $\beta \geq 0$,

$$(\dagger) \qquad -\lambda_i(\beta) \leq -[\lambda_1(\beta) + \ldots, \lambda_i(\beta)] \leq b_i^{(3)} (1 \vee \beta)^{2m+2}$$

En effet, soit $V = \max_{z \in M} U(x) - \min_{z \in M} U(x)$, pour $\beta \in [0, 3iV^{-1}[$ et toute fonction ϕ non nulle, on a

$$\frac{\langle \phi, L_\beta \phi \rangle_\beta}{\langle \phi, \phi \rangle_\beta} \leq \exp(\beta V) \frac{\langle \phi, L_0 \phi \rangle_0}{\langle \phi, \phi \rangle_0} \leq \exp(3i) \frac{\langle \phi, L_0 \phi \rangle_0}{\langle \phi, \phi \rangle_0},$$

ce qui montre, à l'aide de la caractérisation variationnelle de $-[\lambda_1(\beta) + \ldots, \lambda_i(\beta)]$ par les traces, que

$$-[\lambda_1(\beta) + \ldots + \lambda_i(\beta)] \leq -\exp(3i)[\lambda_1(0) + \ldots + \lambda_i(0)],$$

où le membre de droite ne dépend que de M (et de i).

Pour $\beta \geq 3iV^{-1}$ et $0 \leq l \leq i$, soit $x_l \in M$ tel que $U(x_l) = \frac{l}{i} V + \min_{z \in M} U(z)$. On considère des fonctions $\varphi_{l,\beta} \in C^\infty(M)$ à

valeurs dans [0, 1] telles que

$$\varphi_{l,\beta}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad d(x, x_l) \leq (2\beta)^{-1} \\ 0, & \text{si} \quad d(x, x_l) \geq \beta^{-1} \end{cases}$$

et telles que $\max_{z \in M} |\nabla \varphi_{l,\beta}|(z) \leq b^{(1)} \beta^{-(m+1)}$.

Du fait que $\beta \geq 3\, iV^{-1}$, ces fonctions sont orthogonales, or d'après un calcul de HOLLEY, KUSUOKA et STROOCK (p. 335 de [9]),

$$\frac{\langle \varphi_{l,\beta}, L_\beta \varphi_{l,\beta} \rangle_\beta}{\langle \varphi_{l,\beta}, \varphi_{l,\beta} \rangle_\beta} \leq b_i^{(4)} \beta^{2m+2}$$

(où $b_i^{(4)} > 0$ est une constante ne dépendant que de M), ce qui permet de voir que, pour $\beta \geq 3\, iV^{-1}$,

$$-[\lambda_1(\beta) + \ldots, \lambda_i(\beta)] \leq (i+1)\, b_i^{(4)} \beta^{2m+2},$$

puis le résultat annoncé $\binom{\dagger}{\dagger}$, en posant $b_i^{(3)} = [(i+1)\, b_i^{(4)}] \vee [-\exp(3\, i)\, (\lambda_1(0) + \ldots + \lambda_i(0))]$.

Remarquons que $\binom{\dagger}{\dagger}$ est également valable dans le cas où $k_j = 0$, ce qui termine de montrer $(\dagger)$ pour tout $i \geq 1$. On a d'ailleurs, dans ce cas, un résultat un peu meilleur que celui annoncé, puisqu'il existe $b_i > 0$ ne dépendant que de M et de i, tel que, pour tout $\beta \geq 0$, on ait $-\lambda_i(\beta) \leq b_i (1 \vee \beta)^{2m+2}$. Cependant, notons que l'exposant $2m+2$ n'est certainement pas optimal, car si l'on permet à b_i de dépendre de U, on a

$$\begin{aligned} -\lambda_i(\beta) &\leq -\lambda_0(\beta) + \max_{z \in M} \left[\frac{\beta^2}{4} |\nabla U|^2(z) - \frac{\beta}{2} \Delta U(z) \right] \\ &\leq -\lambda_0(\beta) - \frac{\beta}{2} \min_{z \in M} \Delta U(z) + \frac{\beta^2}{4} \end{aligned}$$

du fait que $\lambda_i(\beta)$ est aussi la $(i+1)$ième valeur propre de l'opérateur $\tilde{L}_\beta$ (*voir* la démonstration du théorème de Weyl, p. 181 de [11]).

Montrons maintenant l'autre inégalité, c'est-à-dire qu'il existe une constante $a_i > 0$ ne dépendant que de M et de i, telle que

$$-\lambda_i(\beta) \geq a_i (1 \vee \beta)^{-5m+2} \exp(-c_i \beta)$$

et reprenons pour cela le résultat suivant prouvé dans [15].

Soit $k > 0$, on dit qu'un sous-ensemble connexe et ouvert $A \subset M$ est une k-cellule, si $c(A, U) < k$ et $h(A) > k$. Alors, pour $k \notin \mathcal{K}$, il existe

des k-cellules, $A_1^k, \ldots, A_{R(k)}^k$ telles que $M = \bigcup_{l=1}^{R(k)} A_l^k$ et telles que, pour tous $1 \leq l \neq l' \leq R(k)$,

$$\inf_{z \in A_l^k \cap A_{l'}^k} U(z) > f(A_l^k) \vee f(A_{l'}^k) + k.$$

Fixons $\beta > 0$ et $V \subset L^2(\mu_\beta)$ un sous-espace vectoriel de dimension $i+1$. Soit $k \in]\, k_j, (k_j + \beta^{-1}) \wedge k_{j+1}\, [$. Puisque $k \notin \mathcal{K}$, considérons une décomposition en k-cellules comme ci-dessus, $M = \bigcup_{l=1}^{R(k)} A_l^k$. Soit $(\phi_l)_{1 \leq l \leq R(k)}$ une famille de fonctions de classe C^∞ à valeurs dans [0, 1] telles que

$$\forall x \in M, \quad \sum_{l=1}^{R(k)} \phi_l(x) = 1,$$

et telles que, pour tout $1 \leq l \leq R(k)$, le support de ϕ_l est inclus dans A_l^k et $\phi_l(x) = 1$ pour $x \in A_l^k \backslash (\bigcup_{l' \neq l} A_{l'}^k)$.

Remarquons qu'il existe des potentiels $U_{l,\beta} \in C^\infty(M)$ satisfaisant les conditions suivantes : pour tout x dans le support de ϕ_l, $U_{l,\beta}(x) = U(x)$, pour tout $x \notin A_l^k$, $U_{l,\beta}(x) \geq f(A_l^k) + k$, pour tout $x \in M$, $U_{l,\beta}(x) \geq U(x)$ et $|\nabla U_{l,\beta}|(x) \leq 2$, et enfin

$$\begin{aligned} c(M, U_{l,\beta}) &\leq c(A_l^k, U) + \beta^{-1} \\ &\leq k_j + 2\beta^{-1}. \end{aligned}$$

On peut supposer de plus que la famille $(U_{l,\beta})_{1 \leq l \leq R(k)}$ a été choisie de telle sorte que les fonctions $\varphi_{l,\beta} = \exp(-\beta[U_{l,\beta} - U])$ soient linéairement indépendantes (du fait que $\beta > 0$). Soit W l'orthogonal dans $L^2(\mu_\beta)$ des fonctions $(\varphi_{l,\beta})_{1 \leq l \leq R(k)}$. Du fait que $R(k) \leq i$, il existe $\psi \in V \cap W \backslash \{0\}$. Montrons que l'on peut trouver une constante $a_i^{(1)} > 0$ ne dépendant que de M et de i, telle que, pour cette fonction ψ, on ait

$$\langle \psi, L_\beta \psi \rangle_\beta \geq a_i^{(1)} (1 \vee \beta)^{-5m+2} \exp(-k_j \beta) \langle \psi, \psi \rangle_\beta$$

ce qui permet de conclure comme dans le cas discret, avec $a_i = i^{-1} a_i^{(1)}$.

Du fait que $\psi \in W$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \psi, \psi \rangle_\beta &= \sum_{l=1}^{R(k)} \int \psi^2 \, \phi_l \, d\mu_\beta \\
&= \sum_{l=1}^{R(k)} \frac{Z_{l,\beta}}{Z_\beta} \int \psi^2 \, \phi_l \, d\mu_{l,\beta} \\
&\leq \sum_{l=1}^{R(k)} \frac{Z_{l,\beta}}{Z_\beta} \int \psi^2 \, d\mu_{l,\beta} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{R(k)} \frac{Z_{l,\beta}}{Z_\beta} \int (\psi(x) - \psi(y))^2 \, d\mu_{l,\beta}(x) \, d\mu_{l,\beta}(y)
\end{aligned}$$

où $\mu_{l,\beta}$ est la probabilité admettant $Z_{l,\beta}^{-1} \varphi_{l,\beta}$ pour densité par rapport à μ_β ($Z_{l,\beta} = \int \varphi_{l,\beta} \, d\mu_\beta$ étant la constante de normalisation). Cependant, pour un $1 \leq l \leq R(k)$ fixé, on peut appliquer le résultat de Holley, Kusuoka et Stroock (théorème (1.14) et remarque (1.16) de [9]) sur le comportement de la seconde valeur propre de l'opérateur

$$\Delta . - \beta \langle \nabla U_{l,\beta}, \nabla . \rangle$$

pour voir qu'il existe une constante $a^{(2)} > 0$ ne dépendant que de M, telle que

$$\begin{aligned}
a^{(2)} (1 \vee \beta)^{-5m+2} \exp[-\beta c(M, U_{l,\beta})] \int (\psi(x) \\
- \psi(y))^2 \, d\mu_{l,\beta}(x) \, d\mu_{l,\beta}(y) \leq 2 \int |\nabla \psi|^2 \, d\mu_{l,\beta} .
\end{aligned}$$

Or, puisque $U_{l,\beta} \geq U$,

$$\frac{Z_{l,\beta}}{Z_\beta} \int |\nabla \psi|^2 \, d\mu_{l,\beta} \leq \int |\nabla \psi|^2 \, d\mu_\beta = \langle \psi, L_\beta \psi \rangle_\beta,$$

ainsi

$$\begin{aligned}
a^{(2)} (1 \vee \beta)^{-5m+2} \exp[-\beta c(M, U_{l,\beta})] \langle \psi, \psi \rangle_\beta \\
\leq R(k) \langle \psi, L_\beta \psi \rangle_\beta \leq i \langle \psi, L_\beta \psi \rangle_\beta
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat annoncé précédemment, avec $a_i^{(1)} = a^{(2)} i^{-1}$.

Plaçons-nous pour la fin de cette section dans l'espace de Hilbert $L^2(\mu)$. La proposition 5 découle alors immédiatement des démonstrations précédentes.

En effet, pour $0 \leq j < T+1$ fixé, remarquons que l'on a toujours

$$\lim_{\beta \to +\infty} \beta^{-1} \ln(\tau_j(\beta)) = 0.$$

Ainsi, en reprenant la section 3, on voit que

$$\lim_{\beta \to +\infty} \tau_j^{-1}(\beta) \left| \left| \left| \sum_{l=0}^{j} P_l(\beta) - \tilde{P}_j(\beta) \right| \right| \right| = 0$$

où $|||\cdot|||$ est la norme d'opérateurs associée à la norme de $L^2(\mu)$, et où $\tilde{P}_j(\beta)$ est la projection orthogonale sur l'espace engendré par les fonctions

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_{j,l,\beta^{-1}} &= \left[\int (\Theta_\beta^{-1}[\psi_{j,l,\beta^{-1}}])^2 \, d\mu\right]^{-\frac{1}{2}} \Theta_\beta^{-1} \psi_{j,l,\beta^{-1}} \\ &= \left[\int \exp(-\beta U(y)) \, \psi_{j,l,\beta^{-1}}^2(y) \, d\mu(y)\right]^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{\beta}{2} U\right) \psi_{j,l,\beta^{-1}}\end{aligned}$$

pour $1 \leq l \leq R(k_{j+1})$, où les $(\psi_{j,l,\beta^{-1}})_{1 \leq l \leq R(k_{j+1})}$ sont les fonctions considérées précédemment.

Cette convergence assure notamment que

$$\lim_{\beta \to +\infty} \tau_j^{-1}(\beta) \left(\sum_{l=0}^{j} P_l(\beta) - \tilde{P}_j(\beta)\right) = 0$$

dans $\mathcal{L}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$. Cependant, la condition (C) est exactement l'hypothèse qui permet d'obtenir

$$\lim_{\beta \to +\infty} \tau_j^{-1}(\beta) \tilde{P}_j(\beta) - \tilde{Q}_j = 0$$

dans $\mathcal{L}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$, d'où la proposition 5.

Remarques. – C'est l'étude du comportement en temps grand de certains algorithmes de recuit simulé, dont la température décroît trop rapidement pour pouvoir minimiser globalement le potentiel, qui a suggéré les résultats présentés ici :

Pour simplifier, plaçons-nous dans le cas où M est un ensemble fini. Soient $k > 0$, $k \notin \mathcal{K}$ et $\beta_t = k^{-1} \ln(1+t)$ pour $t \geq 0$. On s'intéresse aux processus de Markov à valeurs dans M, $(X_t)_{t \geq 0}$, dont la famille des générateurs est $(L_{\beta_t})_{t \geq 0}$. Si la loi initiale de ce processus est m, on note m_t la loi de X_t pour tout $t \geq 0$. On a vu dans [15] que la limite suivante existe (en variation totale)

$$m_\infty = \lim_{t \to +\infty} m_t$$

Pour déterminer la dimension (qui est $R(k)-1$) de l'ensemble convexe des lois limites m_∞ quand m varie, on a été amené à s'intéresser à l'espace $\mathcal{E}_b$ des solutions bornées $g : [0, +\infty[\times M \to \mathbf{R}$ de l'équation (« parabolique rétrograde »)

$$\partial_t g = -L_{\beta_t} g$$

et on a vérifié que $\mathcal{E}_b$ est de dimension $R(k)$.

Or, si L_{β_t} pouvait se diagonaliser dans une base indépendante de t (ce qui n'est pas vrai) sous la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 \exp(-c_1 \beta_t) & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{N-1} \exp(-c_{N-1} \beta_t) \end{pmatrix}$$

avec $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_{N-1} \geq 0$ et $a_1 < 0, \dots, a_{N-1} < 0$, il est clair que l'on aurait

$$\dim(\mathcal{E}_b) = 1 + \operatorname{card}\{1 \leq i \leq N-1 ; c_i \geq k\}.$$

C'est ce résultat heuristique qui a suggéré que le théorème 1 devait être satisfait.

Par ailleurs, en reprenant les notations introduites avant le théorème 2, on a vu dans [15] que

$$m_\infty(.) = \sum_{l=1}^{R(k)} m_\infty(b(C_l^k))\, \mu_{b(C_l^k)}(.)$$

où

$$\mu_{b(C_l^k)}(x) = \begin{cases} \mu(b(C_l^k))^{-1}\, \mu(x), & \text{si } x \in b(C_l^k) \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Posons $\tilde{m}_\infty(.) = \mu^{-1}(.)\, m_\infty(.)$ (et plus généralement pour tout $t \geq 0$, $\tilde{m}_t = \mu^{-1} m_t$), l'égalité précédente peut encore s'écrire

$$\tilde{m}_\infty = \sum_{l=j}^{T} Q_l(\tilde{m}_\infty)$$

où $0 \leq j \leq T$ est tel que $k_j < k < k_{j+1}$.

Ceci nous amène à penser qu'il doit être possible de retrouver ce résultat directement à partir du théorème 2, en utilisant l'équation de Fokker-Planck

$$\partial_t \tilde{m}_t = L^*_{\beta_t} \tilde{m}_t$$

(où $L^*_{\beta_t}$ est l'adjoint de L_{β_t} dans $L^2(\mu)$), mais nous n'y sommes pas encore arrivé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CATONI (O.). – Sharp large deviations estimates for simulated annealing algorithms, *Annales de l'IHP*, vol. 27, n° 3, 1991, p. 291-383.

[2] CONCORDET (D.). – Estimation de la densité du recuit simulé, *Annales de l'IHP*, 1995 (à paraître).

[3] CHIANG (T. S.) and CHOW (Y.). – On the Convergence Rate of Annealing Processes, *SIAM J. Control and Optimization*, vol. 26, n° 6, 1988, p. 1455-1470.

[4] FREIDLIN (M. I.) and WENTZELL (A. D.). – *Random Perturbations of Dynamical Systems*. – Berlin, Springer-Verlag, 1984.

[5] GEMAN (S.) and GEMAN (D.). – Stochastic relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restauration of Images, *I.E.E.E. Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 6, 1984, p. 721-741.

[6] GIDAS (B.). – Non stationary Markov chains and convergence of the annealing algorithm, *J. Stat. Phys.*, vol. 39, 1985, p. 73-131.

[7] GÖTZE (F.). – *Rate of convergence of simulated annealing processes*, Preprint, Universität Bielefeld, December 1991.

[8] HAJEK (B.). – Cooling Schedules for Optimal Annealing, *Mathematics of Operations Research*, vol. 13, n° 2, 1988, p. 311-329.

[9] HOLLEY (R.), KUSUOKA (S.) and STROOCK (D.). – Asymptotics of the Spectral Gap with Applications to the Theory of Simulated Annealing, *J. F.A.*, vol. 83, 1989, p. 333-347.

[10] HOLLEY (R.) and STROOCK (D.). – Annealing via Sobolev Inequalities, *C.M.P.*, vol. 115, 1988, p. 553-569.

[11] HORN (R.) and JOHNSON (C.). – *Matrix Analysis*. – Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1985.

[12] HWANG (C. R.). – Laplace's Method Revisited: Weak Convergence of Probability Measures, *The Annals of Probability*, vol. 8, n° 6, 1980, p. 1177-1182.

[13] KIRKPATRICK (S.), GELATT (C. D.) and VECCHI (M. P.). – Optimization by simulated annealing, *Science*, vol. 220, 1983, p. 621-680.

[14] MATHIEU (P.). – Zero white noise limit through Dirichlet Forms. Application to diffusions in a random medium. *Probability Theory and Related Fields* (à paraitre 1995).

[15] MICLO (L.). – Étude des algorithmes de recuit simulé sous-admissibles, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (à paraitre 1995).

[16] TROUVÉ (A.). – *Parallélisation massive du recuit simulé*, Thèse de doctorat, Université Paris-11, janvier 1993.