M1 MATH FONDAMENTALES ET APPLIQUEES

code Apogee	S7	présentiel	ECTS	CM	TD	TP	UE a choix
EM7MFAAM	Analyse Fonctionnelle	**66**	6	30	36		4 sur 5
EM7MFABM	Algèbre et Géométrie	**66**	6	30	36		
EM7MFACM	Probabilités-Analyse	**66**	6	30	36		
EM7MFADM	Distributions	**66**	6	30	36		
EM7MFAEM	Géométrie Différentielle	**66**	6	30	36		
EM7MFAGM	Projet 1		3				
EM7MFAFM	Langue	**24**	3				
	Total	**288**	**30**				

code Apogee	S8	présentiel	ECTS	CM	TD	TP	UE a choix
	Modélisation		6				
	- Introduction a la modélisation	**20**		8	4	8	
	- Modélisation en Proba-Stat	**40**		16	8	16	1 sur 2
	- Modélisation en EDO,EDP, Optimisation	**40**		16	8	16	
EM8MFAAM	Algèbre Commutative ou Analyse Complexe	**66**	6	30	36		3 sur 5
EM8MFABM	Topologie	**66**	6	30	36		
EM8MFACM	Equations aux dérivées partielles	**66**	6	30	36		
EM8MFADM	Probabilité-Statistique	**66**	6	30	36		
EM8MFAEM	Systèmes Dynamiques	**66**	6	30	36		
EM8MFAIM	Projet 2		6				
	Total	**258**	**30**				

Projet 1 et 2

(3 ECTS au S7 et 6 ECTS au S8)

2.8.1 Choix des projets

Une dizaine sujets de projets seront proposés aux étudiants en 2011-2012 (le nombre exact sera ajusté à la rentrée en fonction des effectifs présents). La liste des projets et donc des encadrants sera arrêtée au plus tard à la fin du mois de septembre par le directeur du Département de Mathématiques.
Les étudiants choisiront leur projet avant la fin du premier semestre, les encadrants et le responsable du M1 veilleront à ce que ceux-ci se répartissent sur l'ensemble des projets en respectant les consignes:

-au moins un étudiant par sujet;

-pas plus de trois étudiants par sujet.

2.8.2 Travail d'encadrement

Les enseignants encadrant un projet devront:

-présenter en détail le sujet à l'ensemble des étudiants (mini-cours de 2h) pendant le premier semestre;

-encadrer les étudiants (1, 2 ou 3) qui choisissent leur sujet;

-leur faire rédiger en fin de premier semestre le mini-cours de présentation, completé, comme amorce du mémoire;

-encadrer le travail et la rédaction du mémoire, tapé en LateX;

-participer au jury de soutenance, prévu le meme jour pour tous les groupes, en fin de second semestre, pour harmoniser les notes.

2.8.3 Rémunération

Chaque projet sera comptabilisé dans le service de l'encadrant pour un volume EqTD qui sera le même pour tous les encadrants, indépendamment du nombre d'étudiants encadrés (1,2,3). Le volume exact, compris entre 8 h ETD et 12 EqTD, dépendra du nombre total d'étudiants et sera fixé à la fin du mois de septembre.

Semestre S7 (30 ECTS, 300 h)

Il y a **deux modules obligatoires** à 3 ECTS chacun [Anglais et Projet] et **quatre modules d'options** à 6 ECTS chacun, à choisir parmi

- Algèbre et Géométrie
- Analyse fonctionnelle
- Distributions
- Géométrie différentielle
- Probabilité-Analyse

Le module d'**Anglais** comporte **24 h** de cours pour une valeur de **3 ECTS**.

Le **projet** est un module annuel qui comporte deux parties: au semestre 7, l'ensemble des sujets seront présentés par les encadrants à raison de **deux heures de présentation par semaine**. Une brève évaluation (type QCM) sera faite pour valider les **3 ECTS** correspondants. Les étudiants doivent avoir choisi leur sujet à l'issu du semestre 7 et redigé le mini-cours de présentation de leur sujet a l'inter-semestre. Ils travaillent au semestre 8 a la préparation d'un mémoire soutenu après les examens du semestre 8, et rédigé en **LateX** (voir présentation plus loin). Une initiation au LateX sera proposée aux étudiants au semestre 7.

EM7MFABM

Algèbre et Géométrie

(6 ECTS, 60h = 30 HCM + 36 HTD)

1 Groupes

- Rappels sur les groupes et actions de groupes
- Théorèmes de Sylow

2 Modules sur les anneaux commutatifs

- Module sur un anneau commutatif
- Conditions de finitude, modules noethériens
- Structure de modules sur les anneaux principaux

3 Extensions de corps

- Extension algébrique
- Corps de décomposition
- Séparabilité

4 Courbes algébriques

- Courbes algébriques affines
- Droite projective, résultant, discriminant

EM7MFAAM

Analyse fonctionnelle

(6 ECTS, 60h = 30 HCM + 36 HTD)

1 Espaces fonctionnels classiques

- Topologies usuelles des espaces
- Propriétés de compacité (Riesz, Ascoli) et de densité (Weierstrass)
- Suites de fonctions holomorphes, propriété de Montel, espaces de Bergman.

2 Les théorèmes de Banach

- Le lemme de Baire
- Le théorème de Banach-Steinhaus
- Théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé

3 Séries de Fourier dans un Hilbert

- projection sur un convexe fermé, orthogonal, bases hilbertiennes, Bessel & Parseval
- Séries de Fourier des fonctions localement intégrables (Riemann-Lebesgue, Fejer, Dirichlet)

4 Analyse Hilbertienne

- Théorème de représentation de Riesz
- Convergence faible, compacité séquentielle faible de la boule unité d'un Hilbert
- Opérateurs compacts, adjoints, théorème spectral

EM7MFADM

Distributions

(6 ECTS, 60h=30 HCM+36 HTD)

1 Compléments d’intégration

- Convolution de fonctions, régularisation, théorèmes de densité (espaces).
- Fonctions lisses à support compact, partition de l’unité, intégration par parties

2 L’espace de Schwartz sur *R*

- Semi-normes, stabilité par dérivation et multiplication par des fonctions à croissance polynômiale
- Convolution dans *S*, transformée de Fourier, formule d’inversion et de Parseval-Plancherel
- Relations Fourier et dilatation, translation, dérivation et convolution .

3 EDP élémentaires

- Equation de la chaleur sur *R* avec donnée initiale Schwartz , propriétés régularisantes
- Equation de transport en dimension 1+1 (constater que la formule a encore un sens avec des données moins régulières mais que cela ne régularise pas).

4 Distributions tempérées

- Définition, opérations sur les distributions tempérées : dérivation, multiplication par une fonction lisse à croissance polynômiale. Retour sur le cas des équations de transport.
- Transformée de Fourier des distributions tempérées

EM7MFAEM

Géométrie différentielle

(6 ECTS, 60h = 24 HCM + 36 HTD)

1 Sous-variétés de

- Définition, exemples, paramétrage local, espace tangent, champs de vecteurs
- Formes différentielles, théorème de Green-Riemann, théorème de Stokes
- Variété abstraite: atlas, variétés quotients, théorème de plongement (sans démonstration)
- Exemples des sphères et des tores.

2 Courbes (dans le plan et dans l'espace de dimension 3)

- Repère de Frenet, courbure, torsion, classification locale, à isométrie près.
- Nombre d'enroulement, invariance par homotopie, théorème de la tangente tournante.
- Propriétés globales des courbes planes: inégalité isopérimétrique, théorème des 4 sommets.
- L'intégrale de la courbure est au moins 2ð, égalité ssi c'est une courbe plane convexe.

3 Surfaces dans

- Surfaces paramétrées régulières; exemples (surfaces de révolution, surfaces réglées)
- Plan tangent; première forme fondamentale; notion d'aire.
- Application de Gauss; seconde forme fondamentale; courbures principales; courbure de Gauss; lignes de courbure; surfaces ombiliques; surfaces à courbure sectionnelle nulle; exemples.
- Théorème Egregium de Gauss
- Courbe paramétrée sur une surface, courbure normale, géodésique; transport parallèle.
- Théorème de Gauss-Bonnet; champs de vecteurs; applications.

EM7MFACM

Probabilités

(6 ECTS, 60h = 24 HCM + 36 HTD)

- Le pré-requis est le cours de probabilités et statistique du L3 maths fonda, qui sera enseigné en 2012, donc ce cours de M1 est a adapter la première année si tous les rappels n'en sont pas (écourter partie 2).

1 Rappels : convergences stochastiques

- Espace de probabilité, suite de variables aléatoires, independance.
- Cas réel et vectoriel, fonctions de répartition, densités.
- Convergence en moyenne d'ordre p, loi faible dans L^p.
- Convergence en probabilité, loi faible des grands nombres.
- Convergence presque sure, loi du 0-1, Borel-Cantelli, loi forte.
- Convergence en loi, théorème limite central, cas réel et vectoriel.

2 Convergence faible

- Topologie faible sur un espace de Banach, propriétés.
- Topologie faible-* sur le dual, lien forte/faible, cas réflexif.
- Liens entre convergence faible et convergence en loi.
- Théorème de transformation continue, exemple du TLC.
- Théorème du porte-manteau, utilisations (intervalles de confiance).
- Théorème de transformation différentiabe, exemple du TLC.

3 Espérance conditionnelle

- Conditionnement par un événement : E(X|A), construction et propriétés.
- Cas d'un couple (X,Y) : E(X|Y), construction et propriétés.
- Lois de probabilité conditionnelles, décomposition de la loi d'un couple.
- Densités conditionnelles, formule « intégrale » de Bayes.

4 Application aux martingales

- Filtration en temps discret, temps d'arrêt associés.
- Martingales, sur et sous martingales, inégalités de Doob.
- Théorème d'arrêt, théorème de convergence presque sûre.
- Convergence dans L^1, équi-intégrabilité, convergence dans L^p.

Semestre S8 (30 ECTS, 300h)

Il y a **trois modules obligatoires** [Modélisation (6 ECTS), Projet (6 ECTS)] et **trois modules d’options (6 ECTS), à choisir parmi**,

- Algèbre commutative ou Analyse complexe (modules alternants tous les deux ans)
- EDO et EDP
- Probabilités-Statistique
- Systèmes dynamiques (module proposé uniquement si le nombre d’étudiants est suffisant)
- Topologie

Le décision de proposer l’option "Systèmes dynamiques" sera prise au plus tard à la fin du mois de septembre.

L’option Algèbre commutative sera proposée en 2011-2013, puis c’est l’option Analyse Complexe qui sera proposée en 2013-2015, etc.

EM8MFAAM

Algèbre commutative

(6 ECTS, 66h= 30 HCM+ 36 HTD)

1 Compléments sur les anneaux et les modules

- Produit tensoriel de modules, restriction et extension des scalaires, platitude.
- Radical de Jacobson, théorème de Nakayama. Anneaux réduits, radical d'un idéal.
- Algèbres de type fini, algèbres finies. Syzygy.

2 Localisation des anneaux et des modules

- Localisation, platitude de la localisation, localisation en un idéal premier.
- Anneaux locaux, corps résiduel. Passage du local au global.

3 Intégralité

- Morphismes entiers, morphismes finis. Fermeture intégrale, anneaux intégralement clôs.
- Théorèmes de Cohen-Seidenberg. Théorème de normalisation de Noether.

4 Théorème des zéros de Hilbert

- Rappels sur les ensembles algébriques.
- Nullstellensatz. Applications.

5 Complétion

- Complété d'un module, platitude et stabilité de la noethérianité par complétion.
- Dimension de Krull, dimension du complété. Anneaux locaux réguliers. Exemples.

EM8MFAAM

Analyse complexe

(6 ECTS, 66h= 30 HCM+ 36 HTD)

1 Théorèmes d'uniformisation

- Domaines simplement connexes, théorème de Cauchy, théorème de Rouché
- Théorème d'uniformisation de Riemann, géométries euclidienne, hyperbolique
- Théorèmes de Picard

2 Surfaces de Riemann

- Sphère de Riemann, homographies, géométrie sphérique
- Prolongement analytique, surfaces de Riemann d'une fonction multiforme, monodromie
- Produits infinis, fonctions spéciales, courbes elliptiques

3 Théorie du potentiel

- Fonctions harmoniques, noyau de Poisson, inégalités de Harnack
- Fonctions sous-harmoniques, problème de Dirichlet, potentiels logarithmiques
- Ensembles de Julia et mesure de Green des polynômes.

EDO et EDP

(6 ECTS, 66h=30 HCM+ 36 HTD)

1- Compléments sur les équations différentielles
1.1 Rappel de Cauchy-Lipschitz sur un ouvert de R^n. Dépendance par rapport aux conditions initiales. Critères d'existence globale.
1.2 Flot d'un champ de vecteurs, propriété de groupe dans le cas autonome.
1.3 Stabilité.
Point d'équilibre stable, asymptotiquement stable, fonction de Lyapunov, conditions suffisantes de stabilité asymptotique, d'instabilité.

2- EDP d'ordre 1
2.1. Méthodes des caractéristiques pour les équations de transport.
2.2. Solutions faibles.
2.3. Applications à des modèles simples: équations de Vlasov, modèles de dynamique
des populations.
2.4. Equations non linéaires du premier ordre: Burgers, Hamilton-Jacobi.

3. Introduction aux problèmes elliptiques d'ordre 2
Le but de cette partie est de résoudre l'équation Delta u = f dans un ouvert borne.
2.1 Définition de l'espace de Hilbert H^1_0 sur un ouvert borne. Inégalité de Poincaré.
2.2 Résolution du problème faible (avec 2nd membre L^2) par application du th. de Lax-Milgram.
2.3 Interprétation de la solution au sens des distributions.

Probabilité-Statistique

(6 ECTS, 66h=30 HCM+ 36 HTD)

1 Chaines de Markov (5 semaines)

- Chaine homogène, critère, propriété de Markov faible.
- Espace d'états finis, dénombrable, matrice stochastique, classification des états.
- La loi stationnaire : existence, unicité, détermination.
- Loi des grands nombres, ergodicité.
- Convergence vers la loi stationnaire.

2 Statistique mathematique (7 semaines = 7 lecons)

- Estimation dans un modèle paramétrique.
  - domination d'une classe de mesures de dimension finie, fonction de vraisemblance en le paramètre.
  - risque et biais d'un estimateur, exemple quadratique.
  - information de Fisher en le paramètre, bornes d'information, efficacité.
  - statistiques exhaustives, minimales, complètes, amélioration du risque.
  - convergence des estimateurs du maximum de vraisemblance.
- Tests dans un modèle paramétrique.
  - Test de Neyman-Pearson, deux hypothèses simples.
  - Tests de Lehmann, deux hypothèses composites.

Au chapitre 2 certains problèmes et exercices consisteront a estimer et tester les paramètres de la matrice de transition d'une chaine de Markov. En parallèle de ce cours il est très fortement recommandé de suivre la partie proba-stat du module obligatoire de modèlisation, qui complète et illustre ce cours théorique par des cas concrets.

Modélisation

(6 ECTS, 66h=30 HCM + 36 HTD)

L'UE se décompose en deux parties :

1) une première partie de tronc commun sur quatre semaines consacrées à l'apprentissage de matlab/scilab sur la base d'algorithmes standard
2) une deuxième partie sur 8 semaines propose deux options au choix : Proba-Stat et EDO-EDP-Optimisation correspondant aux deux options d'agrégation qui sont préparés à Toulouse.

1) Tronc commun

Prise en main de matlab / scilab a partir de TP orientés vers une initiation a la cryptographie ou le calcul formel.

- arithmétique algorithmique élémentaire.
- nombres premiers : théorie analytique des nombres et cryptographie.
- nombres p-adiques, factorisation arithmétique de polynômes.

2) Modélisation en Proba Stat

- Génération de variables aléatoires : lois discrètes, méthodes des quantiles, de rejet, familles paramétriques, vecteurs gaussiens.
- Illustration des théorèmes limites usuels via la convergence des estimateurs, méthode des moments ou du max vraisemblance.
- Méthodes de Monte-Carlo.
- Tests d'adéquation (Kolmogorov, Chi-deux), cas d'une famille paramétrique.
- Chaînes de Markov et martingales : trajectoires, convergences.
- Tests de Markovianité, estimation et test de la mesure invariante.
- Estimateurs de la densité.

Les sujets de TP seront inspirés des textes usuels de l'épreuve de modélisation aléatoire de l'agrégation, toujours issus d'une modélisation mathématique d'un problème relevant d'autres sciences (génétique, intelligence artificielle, évolution, physique, économie, théorie des jeux).

3) Modélisation en EDO-EDP-Optimisation

Pour chacun des trois thèmes:

- un problème qui se comprend et dont on arrive à expliquer relativement aisément la modélisation;
- une étude théorique selon possibilités (avec bagage EDO L3 et EDP M1)
- une implémentation sur Matlab/Scilab suivie d'une analyse des résultats

Ce qui peut donner par exemple :

* Une EDO issue de la biologie (par exemple proie-prédateur) pour laquelle on peut mener a bien / modélisation, étude du portrait de phase, une étude numérique (donc ou introduction ou révision d'une ou deux méthodes numériques parmi Euler, Euler rétrograde, Runge-Kutta); étude de la convergence d'un des schémas; programmation et illustration par Matlab

* le thème EDP peut être en lien avec les cours de distribution et EDO-EDP par exemple l' équation de transport de trafic routier pour laquelle on peut mener à bien : la modélisation , l'étude théorique (étude des caractéristiques et des chocs) et une introduction aux schemas de differences finies: convergence et implémentation avec Matlab (sur un modèle simplifie si nécessaire)

* le thème optimisation; plusieurs exemples possibles, par exemple la configuration d'une molécule a N atomes d'énergie minimale (ref: texte agreg option B)

- étude théorique (existence d'un minimiseur)
- introduction, étude et implémentation (Matlab) de la méthode de descente

Systèmes dynamiques

(6 ECTS, 66h=30 HCM+ 36 HTD)

Syllabus en cours de rédaction.