

NOM :
Prénom :

Date :

Faculté des sciences et ingénierie (Toulouse III)
Département de mathématiques – L3 MMESI
Analyse numérique I

Année universitaire
2012-2013

TP n° 4 – Tracé de courbes et approximation de fonctions

Aller dans le dossier L3_analyseNumerique et créer le dossier TP04, dans lequel seront placés les fichiers relatifs à ce TP.

1 Découverte de MATLAB (4) : outils graphiques

1.1 Tracé de courbes en MATLAB

Maintenant que nous savons créer et calculer les valeurs de fonctions, reste à savoir tracer leurs courbes représentatives. C'est ce que l'on se propose de découvrir au cours de ce TP. Et comme la vie est bien faite, cela correspond aussi au cours que nous commençons : comment, étant donné une famille d'abscisses x_0, \dots, x_N et d'images $f(x_0), \dots, f(x_N)$, peut-on approcher f par une fonction régulière qui passe par les points $(x_i, f(x_i))$?

Vous savez maintenant que MATLAB ne fait pas de calcul formel, c'est-à-dire que, pour lui, seules les données numériques permettent de représenter des objets mathématiques. Ainsi, pour MATLAB, le tracé de la courbe représentative d'une fonction f ne se fait pas à partir de la définition de la fonction $x \mapsto f(x)$ en tant qu'application de la variable x . Souvenez-vous de votre vieille calculette du lycée... vous lui donniez un intervalle pour x , elle calculait plein de valeurs de $f(x)$ et plaçait sur un graphe les couples $(x, f(x))$ calculés ; comme elle en calculait un grand nombre, en "reliant les points", cela faisait une jolie courbe...

Pour MATLAB c'est presque pareil sauf que, cette fois, vous lui donnez un vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ d'abscisses¹, puis :

- il calcule les images $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N)$, que l'on convient de noter $f(x)$;
- il place les points $(x, f(x))$ dans un repère ;
- il relie ces points par des segments.

Ainsi, si vous prenez peu de points², votre "graphe de f " ne ressemblera à rien !

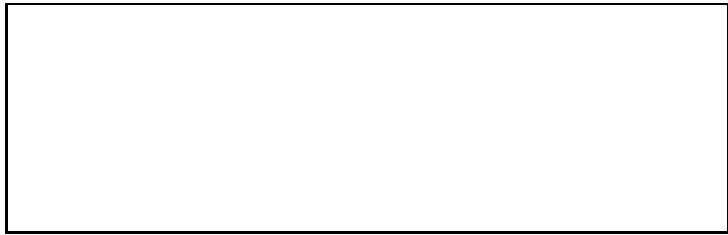
Pour ces tracés, on va utiliser la commande `plot` dont on va tester la syntaxe et les options.

1. C'est-à-dire que chacun des x_i est une abscisse.

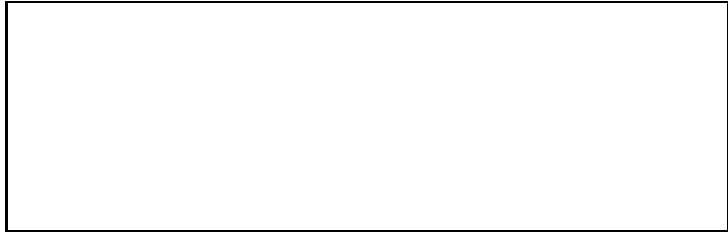
2. C'est-à-dire un N très petit.

Exemple 1. Reproduire (à main levée!) et expliquer le résultat observé sur ces quatre tracés :

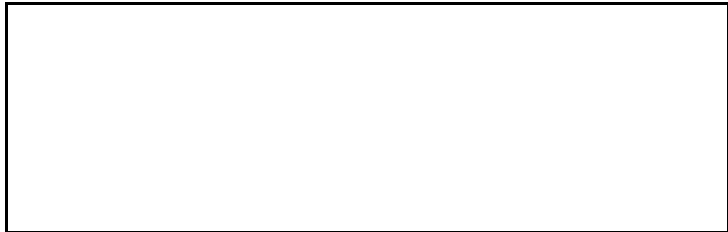
```
x=[0, pi/2, pi]
y=sin(x)
plot(x,y)
```



```
N=100
x=linspace(0, pi, N)
y=sin(x)
plot(x,y)
```



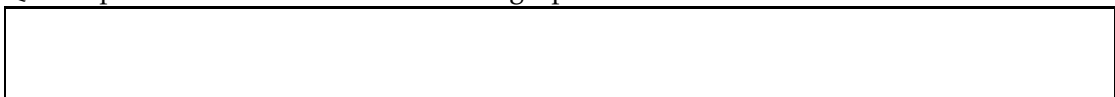
```
x=[0, pi, 2*pi]
plot(x, sin(x))
```



```
x=linspace(0, 2*pi, N);
plot(x, sin(x))
```



Que se passe-t-il si on refait les mêmes graphes avec $N = 10$?



Attention! Dans la syntaxe `plot(x, sin(x))`, le premier argument (ici `x`) ne correspond pas au nom d'une variable par rapport à laquelle on va tracer le graphe de la fonction `sin`. Il correspond à une liste d'abscisses auxquelles on va placer les points du graphe.

Autrement dit, ce n'est pas "MATLAB trace la fonction sinus sur $[0, \pi]$ " mais "étant donné un vecteur $x = (x_1, \dots, x_N)$, MATLAB place les points $(x_i, \sin(x_i))$ puis les relie par des segments".

1.2 Options graphiques

Exemple 2. Reproduire les commandes suivantes en ligne de commande et expliquer le résultat obtenu.

```
1 x=linspace(0,2*pi,100)
2 y=sin(x)
3 z=cos(x)
4 plot(x,y)
5 plot(x,z)
6 plot(x,y,x,z)
7 clf
8 hold on
9 plot(x,y)
10 plot(x,z)
11 clf
12 hold on
13 plot(x,z)
14 plot(x,y,'r')
15 clf
16 plot(x,y,'b--',x,z,'*')
```



Quel est l'intérêt de la commande `hold on` ?

Comment annuler son effet ?

Comment faire apparaître des axes orthonormés ? une grille ?

Comment faire apparaître une légende sur les axes ? un titre ?

Commandes à utiliser :

`axis on` `axis off` `axis equal` `grid on` `grid off`
`legend` `xlabel` `ylabel` `title`

`close all` `figure`

1.3 Un petit exercice

Pour gérer la liste des options et éviter de tout recopier à chaque fois en ligne de commande, on va se servir de scripts.

Exercice 1. Soit la fonction $f : x \mapsto x \sin(\frac{1}{x})$.

1. Supposons le vecteur des abscisses de taille 3 (*i.e.* $x=[x_1,x_2,x_3]$) : exprimer alors (en fonction de x_1, x_2, x_3) le vecteur des ordonnées permettant de tracer f .

2. Créer un script `exercice1.m` dans le répertoire TP04 qui permet de tracer dans deux figures séparées :
 - la fonction f pour $x \in [-1, 1]$;
 - la fonction f pour $x \in [-0.05, 0.05]$ ainsi que les deux droites $y = x$ et $y = -x$.Faire varier le nombre de points et commenter le résultat observé.

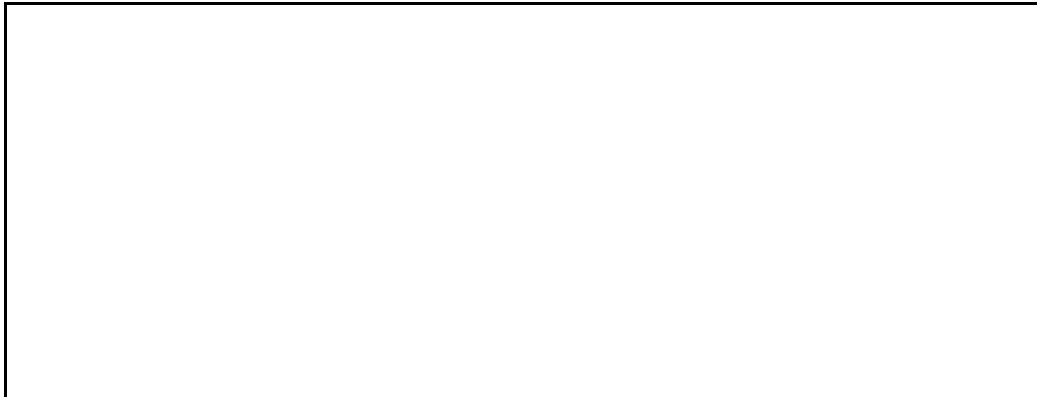
--	--

Exercice 2 (Courbes paramétrées). Un des intérêts principaux de la manière dont MATLAB trace les courbes (en plaçant des points (abscisse,ordonnée)), est la simplicité avec laquelle on peut tracer des courbes paramétrées. En effet, pour tracer une courbe paramétrée, on calcule (grâce à différentes valeurs du paramètre) les abscisses des points de la courbe séparément des ordonnées. Ainsi, avec MATLAB, il suffit : de fabriquer le vecteur des abscisses à partir du paramètre, de fabriquer le vecteur des ordonnées à partir du même paramètre et enfin de placer les points sur un graphe.

On demande ici de créer un script (`exercice2.m`) dans lequel tracer les courbes paramétrées suivantes :

1. $x(\theta) = 2 \cos(\theta)$, $y(\theta) = \sin(\theta)$ lorsque θ varie dans $[0, \pi/2]$, puis $[0, \pi]$, $[0, 3\pi/2]$ et enfin $[0, 2\pi]$. Qu'observez-vous?

2. $x(t) = \exp(-0.1t)\cos(t)$, $y(t) = \exp(-0.1t)\sin(t)$ lorsque $t \in [0, 20]$ puis $t \in [0, 200]$.
Qu'observez-vous ?



2 Interpolation de Lagrange d'une fonction

On considère un échantillon de $n + 1$ points (des "mesures") $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$. On cherche à construire une fonction "régulière" qui passe par tous les points. La première idée (un peu comme on prendrait une droite si l'on n'avait que deux points), est de chercher s'il existe un tel polynôme.

Idée Chercher $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall 0 \leq i \leq n, P(x_i) = y_i$.

2.1 Base de Lagrange associée à un vecteur $X = (x_0, \dots, x_n)$

Théorème : Étant donné $n + 1$ réels distincts x_0, \dots, x_n et $n + 1$ réels y_0, \dots, y_n , il existe un unique polynôme P tel que :

$$P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq i \leq n, P(x_i) = y_i. \quad (1)$$

Base de Lagrange associée à $X = (x_0, \dots, x_n)$: Soit $0 \leq i \leq n$, considérons le polynôme ℓ_i défini par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \ell_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - x_j}{x_i - x_j}.$$

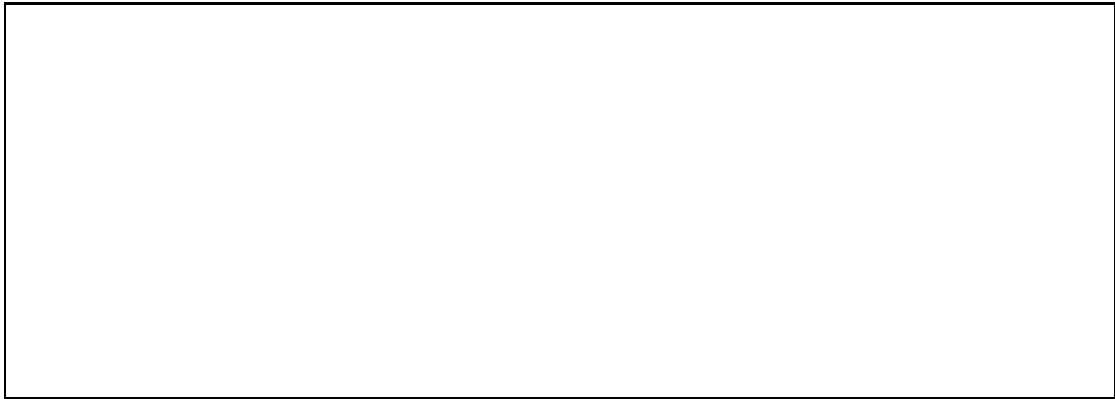
Alors, pour tout $0 \leq i \leq n$:

1. $\ell_i \in \mathbb{R}_n[X]$.
2. $\ell_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$, $\ell_i(x_j) = 1$ si $i = j$.
3. (ℓ_0, \dots, ℓ_n) constitue une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Par conséquent, il est clair que le polynôme $P(t) = \sum_{i=0}^n y_i \ell_i(t)$ satisfait les deux conditions de (1). Par unicité, c'est donc le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$.

Exercice 3. Écrire une fonction `lagrange(X,i,t)` qui, étant donné un vecteur X , un entier i et un réel t renvoie $\ell_i(t)$, où ℓ_i est le i -ème polynôme de la base de Lagrange associée à $X = (x_0, \dots, x_n)$.

Important : Pour pouvoir tracer le graphe de ℓ_i par la suite, il est important que si t est un vecteur $t = (t_0, \dots, t_p)$ pour $p \geq 1$, alors `lagrange(X,i,t)` renvoie le vecteur des $\ell_i(t_k)$ pour $0 \leq k \leq p$.



2.2 Interpolation de Lagrange d'une fonction f

Principe On suppose cette fois que l'on connaît uniquement quelques valeurs d'une fonction f régulière et l'on veut la reconstituer (ou du moins l'approcher). On suppose donc que :

- l'on connaît $n + 1$ points du graphe de la fonction $f : (x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$;
- l'on ne connaît pas f ,

et on cherche le polynôme de Lagrange associés aux points $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$.

Exercice 4. Écrire une fonction qui, étant donné deux vecteurs $X = (x_0, \dots, x_n)$ et $Y = (y_0, \dots, y_n)$, construit le polynôme de Lagrange associé ces points. On pourra pour cela utiliser le script qui permettait de définir la base de Lagrange



Exercice 5. Écrire une fonction qui, étant donné un vecteur $X = (x_0, \dots, x_n)$ et une fonction f prédéfinie, construit la fonction polynomiale de Lagrange de f associée aux points x_0, \dots, x_n .

Exercice 6. Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange Π_n de la fonction \sin définie sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ associé à $n + 1$ points équidistants de $[0, 2\pi]$, avec $x_0 = 0$ et $x_n = 2\pi$ pour $n = 3, 4, 5, 6$. Le tracer en superposant les résultats pour les différentes valeurs de n et tracer sur le même graphique la fonction \sin . Faire de même pour la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur l'intervalle $[-5, 5]$ (qu'observez-vous sur les bords lorsque n augmente?).

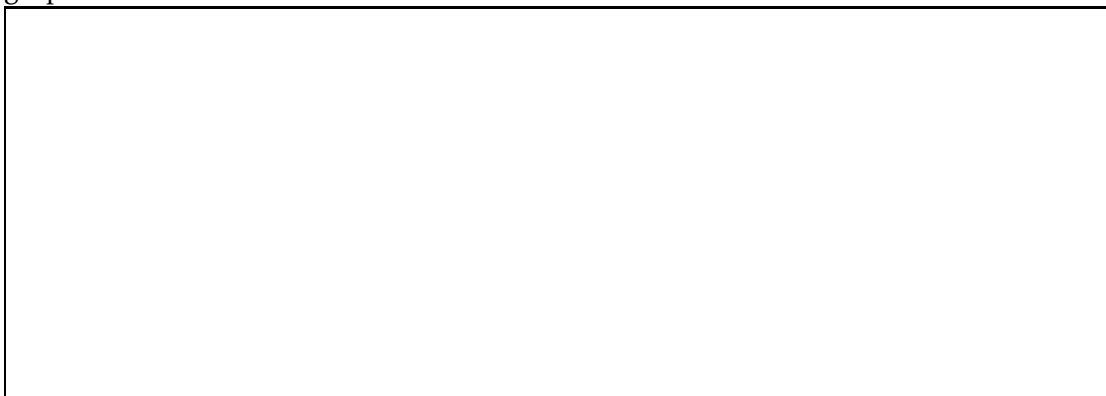
2.3 La commande `polyfit`

Comme la vie est bien faite, il se trouve que la commande `polyfit`, préprogrammée en `MATLAB`, permet de calculer les coefficients du polynôme d'interpolation de Lagrange associé à des points $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ où $X = (x_0, \dots, x_n)$ et $Y = (y_0, \dots, y_n)$ sont donnés.

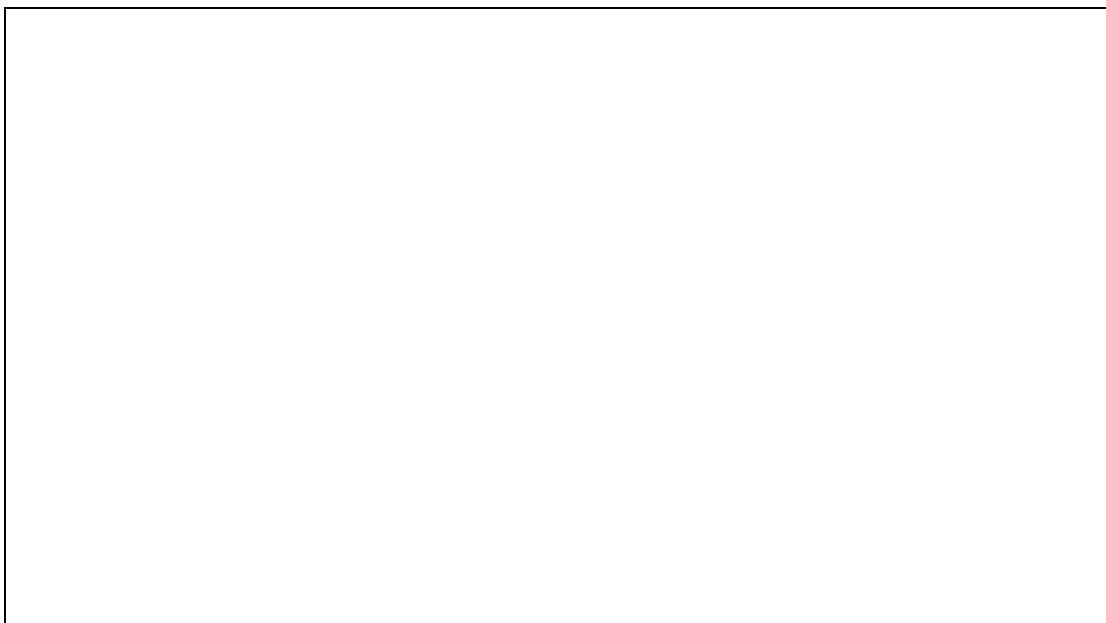
Exercice 7. Expliquer la syntaxe de la commande `polyfit` et ce qu'elle renvoie.

Écrire un script qui permet, grâce aux commandes `polyfit` et `polyval`, étant donné $X = (x_0, \dots, x_n)$ et $Y = (y_0, \dots, y_n)$ de tracer le polynôme d'interpolation de Lagrange associé

aux points $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$. Faire apparaître les points d'interpolation sur le même graphe.



Écrire un script qui permet de tracer le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction sin associé à 7 points équidistants. Tracer sur le même graphe le polynôme obtenu à l'exercice précédent ainsi que la fonction sin.



2.4 Interpolation et population américaine

Exercice 8. Notre but est d'examiner si on peut prédire à partir d'une interpolation polynomiale la valeur de la population américaine en 2010 alors qu'on ne dispose que de ses valeurs sur les changements de dizaines entre 1900 et 2000.

1. Le fichier `census.dat` de MATLAB contient l'évolution de la population américaine de 1900 à 2000. Pour le charger, tapez `load census` en ligne de commande. Le vecteur p contient les valeurs de la population américaine de 1900 à 2000 tous les 10 ans.

- Retenir les valeurs correspondant aux changements de dizaines entre 1900 et 1980. On notera ce vecteur `pop9`. Retenir parmi les 9 valeurs déjà prises les valeurs associées aux années 1900, 1920, 1940, 1960 et 1980. Ce vecteur sera noté `pop6`. Enfin, retenir parmi ces 6 dernières valeurs uniquement les valeurs correspondant aux années 1900, 1940 et 1980. Ce vecteur sera noté `pop3`.

- Écrire un script `population.m` qui permet de calculer le polynôme de Lagrange passant par $n + 1$ points $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ à l'aide des commandes `polyfit` et `polyval`.

- Tracer maintenant les polynômes d'interpolation correspondant à `pop3`, `pop6` et `pop9` en faisant apparaître les données sur la population.

Que constatez-vous? Que dire de la population américaine en 2010?