Comportement en temps long du schéma d'Euler d'une EDS à mémoire

Maylis Varvenne

17 mai 2018

INSTITUT de MATHEMATIQUES de TOULOUSE

Directeurs de thèse : Laure Coutin & Fabien Panloup

Schéma d'Euler de pas $h > 0$

Soit $X := (X_n)_{n \geqslant 0}$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que

$$X_{n+1} = X_n + hb(X_n) + \sigma(X_n)\Delta_{n+1} \tag{1.1}$$

où $\Delta_{n+1} := Z_{(n+1)h} - Z_{nh}$ correspond aux accroissements, supposés stationnaires et ergodiques, d'un processus Gaussien (Z_t).

Schéma d'Euler de pas $h > 0$

Soit $X := (X_n)_{n \geqslant 0}$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que

$$X_{n+1} = X_n + hb(X_n) + \sigma(X_n)\Delta_{n+1} \tag{1.1}$$

où $\Delta_{n+1} := Z_{(n+1)h} - Z_{nh}$ correspond aux accroissements, supposés stationnaires et ergodiques, d'un processus Gaussien (Z_t).

Exemple de bruit

Accroissements du mouvement Brownien fractionnaire (mBf) de paramètre de Hurst $H \in (0, 1)$ noté $(B^H_t)_{t \in \mathbb{R}}$.

Le mBf est un processus gaussien centré à accroissements stationnaires tel que pour tout t, s

$$\mathbb{E}[(B^H_t - B^H_s)^2] = |t - s|^{2H}.$$

Représentation en moyenne mobile

Théorème de décomposition de Wold,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \Delta_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \xi_{n-k} \tag{1.2}$$

avec

$$\begin{cases} (a_k)_{k \geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ \text{ telle que } \ a_0 \neq 0 \ \text{ et } \ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2 < +\infty \\ (\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}} \ \text{ une suite i.i.d telle que } \xi_1 \sim \mathcal{N}(0, I_d). \end{cases}$$

Représentation en moyenne mobile

Théorème de décomposition de Wold,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \Delta_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \xi_{n-k} \tag{1.2}$$

avec

$$\begin{cases} (a_k)_{k\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ telle que } a_0 \neq 0 \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2 < +\infty \\ (\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}} \text{ une suite i.i.d telle que } \xi_1 \sim \mathcal{N}(0, I_d). \end{cases}$$

Remarques

- ▷ Quitte à considérer $\tilde{\Delta}_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{a}_k \xi_{n-k}$ avec $\tilde{a}_k = a_k / a_0$, on peut prendre $a_0 = 1$.
- ▷ $\mathbb{E}[\Delta_n \Delta_{n+k}] = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i a_{k+i}$

Outil : opérateur de type Toeplitz

Définition

Soit $\mathbf{T_a}$ défini sur $\ell_a(\mathbb{Z}^-, \mathbb{R}^d) := \left\{ w \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}^-} \;\middle|\; \forall k \geqslant 0, \ \sum_{l=0}^{+\infty} a_l w_{-k-l} < +\infty \right\}$ par

$$\forall w \in \ell_a(\mathbb{Z}^-, \mathbb{R}^d), \quad \mathbf{T_a}(w) = \left(\sum_{l=0}^{+\infty} a_l w_{-k-l} \right)_{k \geqslant 0}. \tag{1.3}$$

Outil : opérateur de type Toeplitz

Définition

Soit $\mathbf{T_a}$ défini sur $\ell_a(\mathbb{Z}^-, \mathbb{R}^d) := \left\{ w \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}^-} \;\middle|\; \forall k \geqslant 0,\ \sum_{l=0}^{+\infty} a_l w_{-k-l} < +\infty \right\}$ par

$$\forall w \in \ell_a(\mathbb{Z}^-, \mathbb{R}^d), \quad \mathbf{T_a}(w) = \left(\sum_{l=0}^{+\infty} a_l w_{-k-l} \right)_{k \geqslant 0}. \tag{1.3}$$

Remarque : Cet opérateur relie $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ au bruit sous-jacent $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Proposition

Soit $\mathbf{T_b}$ défini sur $\ell_b(\mathbb{Z}^-, \mathbb{R}^d)$ avec la suite $(b_k)_{k\geqslant 0}$ suivante

$$b_0 = \frac{1}{a_0} \quad \text{and} \quad \forall k \geqslant 1, \quad b_k = -\frac{1}{a_0} \sum_{l=1}^{k} a_l b_{k-l}. \tag{1.4}$$

Alors, $\mathbf{T_b} = \mathbf{T_a}^{-1}$.

On pose $\mathcal{X} := \mathbb{R}^d$ l'espace d'état et $\mathcal{W} := (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}^-}$ l'espace du bruit.
Système équivalent :

$$(X_{n+1}, (\Delta_{n+1+k})_{k\leqslant 0}) = \varphi\left((X_n, (\Delta_{n+k})_{k\leqslant 0}), \Delta_{n+1}\right) \tag{1.5}$$

où

$$\begin{aligned}\varphi : (\mathcal{X} \times \mathcal{W}) \times \mathbb{R}^d &\to \mathcal{X} \times \mathcal{W} \\ ((x, w), \delta) &\mapsto (x + hb(x) + \sigma(x)\delta,\ w \sqcup \delta).\end{aligned}$$

On pose $\mathcal{X} := \mathbb{R}^d$ l'espace d'état et $\mathcal{W} := (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}^-}$ l'espace du bruit.
Système équivalent :

$$(X_{n+1}, (\Delta_{n+1+k})_{k\leqslant 0}) = \varphi\left((X_n, (\Delta_{n+k})_{k\leqslant 0}), \Delta_{n+1}\right) \tag{1.5}$$

où

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathcal{X} \times \mathcal{W}) \times \mathbb{R}^d &\to \mathcal{X} \times \mathcal{W} \\ ((x, w), \delta) &\mapsto (x + hb(x) + \sigma(x)\delta,\ w \sqcup \delta). \end{aligned}$$

Noyau de Transition : $\mathcal{Q} : \mathcal{X} \times \mathcal{W} \to \mathcal{M}_1(\mathcal{X} \times \mathcal{W})$

On pose $\mathcal{X} := \mathbb{R}^d$ l'espace d'état et $\mathcal{W} := (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}^-}$ l'espace du bruit.
Système équivalent :

$$\left(X_{n+1}, (\Delta_{n+1+k})_{k\leqslant 0}\right) = \varphi\left(\left(X_n, (\Delta_{n+k})_{k\leqslant 0}\right), \Delta_{n+1}\right) \tag{1.5}$$

où

$$\begin{aligned}\varphi : (\mathcal{X}\times\mathcal{W})\times\mathbb{R}^d &\to \mathcal{X}\times\mathcal{W}\\ ((x,w),\delta) &\mapsto (x + hb(x) + \sigma(x)\delta,\ w\sqcup\delta).\end{aligned}$$

Noyau de Transition : $\mathcal{Q} : \mathcal{X}\times\mathcal{W} \to \mathcal{M}_1(\mathcal{X}\times\mathcal{W})$

Définition

On appelle **mesure invariante** associée à (1.1) toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X}\times\mathcal{W})$ invariante pour $\mathcal{Q}$, c'est à dire telle que $\mathcal{Q}\mu = \mu$.

On pose $\mathcal{X} := \mathbb{R}^d$ l'espace d'état et $\mathcal{W} := (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}^-}$ l'espace du bruit.
Système équivalent :

$$(X_{n+1}, (\Delta_{n+1+k})_{k\leqslant 0}) = \varphi\left((X_n, (\Delta_{n+k})_{k\leqslant 0}), \Delta_{n+1}\right) \tag{1.5}$$

où

$$\begin{aligned}\varphi : (\mathcal{X} \times \mathcal{W}) \times \mathbb{R}^d &\to \mathcal{X} \times \mathcal{W} \\ ((x, w), \delta) &\mapsto (x + hb(x) + \sigma(x)\delta,\ w \sqcup \delta).\end{aligned}$$

Noyau de Transition : $\mathcal{Q} : \mathcal{X} \times \mathcal{W} \to \mathcal{M}_1(\mathcal{X} \times \mathcal{W})$

Définition

On appelle **mesure invariante** associée à (1.1) toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X} \times \mathcal{W})$ invariante pour $\mathcal{Q}$, c'est à dire telle que $\mathcal{Q}\mu = \mu$.

Unicité : On définit $S\mu := \mathcal{L}((X_n^\mu)_{n\geqslant 0})$. Alors $\mu \simeq \nu \Longleftrightarrow \mathcal{S}\mu = \mathcal{S}\nu \quad (\star)$

($\mathbf{H_{poly}}$) : Les conditions suivantes sont vérifiées,

- il existe $\rho, \beta > 0$ et $C_\rho, C_\beta > 0$ tels que

$$\forall k \geqslant 0, \quad |a_k| \leqslant C_\rho (k+1)^{-\rho} \qquad \text{et} \qquad \forall k \geqslant 0, \quad |b_k| \leqslant C_\beta (k+1)^{-\beta}.$$

- il existe $\kappa \geqslant \rho + 1$ et $C_\kappa > 0$ tels que

$$\forall k \geqslant 0, \quad |a_k - a_{k+1}| \leqslant C_\kappa (k+1)^{-\kappa}.$$

$(\mathbf{H_{poly}})$: Les conditions suivantes sont vérifiées,

- il existe $\rho, \beta > 0$ et $C_\rho, C_\beta > 0$ tels que

$$\forall k \geqslant 0, \quad |a_k| \leqslant C_\rho (k+1)^{-\rho} \quad \text{et} \quad \forall k \geqslant 0, \quad |b_k| \leqslant C_\beta (k+1)^{-\beta}.$$

- il existe $\kappa \geqslant \rho + 1$ et $C_\kappa > 0$ tels que

$$\forall k \geqslant 0, \quad |a_k - a_{k+1}| \leqslant C_\kappa (k+1)^{-\kappa}.$$

$(\mathbf{H_{b,\sigma}})$: $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est continue, $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est continue bornée et $\sigma^{-1} : x \mapsto \sigma(x)^{-1}$ est définie et continue. De plus,

- $\exists C > 0$ telle que $\forall x \in \mathcal{X}, \quad |b(x)| \leqslant C(1 + |x|)$
- $\exists \tilde{\beta} \in \mathbb{R}$ et $\tilde{\alpha} > 0$ tels que $\forall x \in \mathcal{X}, \quad \langle x, b(x) \rangle \leqslant \tilde{\beta} - \tilde{\alpha}|x|^2$.

Théorème (V. '17)

On suppose $(\mathbf{H}_{\mathbf{b},\sigma})$. *Alors,*

(i) *Il existe une mesure invariante* $\mu_\star$ *associée à* (1.1).

(ii) *On suppose* $(\mathbf{H}_{\mathbf{poly}})$ *avec* $\rho, \beta > 1/2$ *et* $\rho + \beta > 3/2$. *Alors,* $\mu_\star$ *est unique. De plus, pour toute condition initiale* μ_0 *telle que* $\int_{\mathcal{X}} |x| \Pi^*_{\mathcal{X}} \mu_0(dx) < +\infty$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $C_\varepsilon > 0$ *telle que*

$$\|\mathcal{L}((X^{\mu_0}_{n+k})_{k\geqslant 0}) - \mathcal{S}\mu_\star\|_{TV} \leqslant C_\varepsilon \; n^{-(v(\beta,\rho)-\varepsilon)}.$$

où la fonction v *est définie par*

$$v(\beta,\rho) = \sup_{\alpha \in \left(\frac{1}{2} \vee \left(\frac{3}{2}-\beta\right),\rho\right)} \min\{1, 2(\rho-\alpha)\}(\min\{\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta-1\} - 1/2).$$

Théorème (V. '17)

On suppose $(\mathbf{H_{b,\sigma}})$. *Alors,*

(i) *Il existe une mesure invariante* $\mu_\star$ *associée à* (1.1).

(ii) *On suppose* $(\mathbf{H_{poly}})$ *avec* $\rho, \beta > 1/2$ *et* $\rho + \beta > 3/2$. *Alors,* $\mu_\star$ *est unique. De plus, pour toute condition initiale* μ_0 *telle que* $\int_{\mathcal{X}} |x| \Pi^*_{\mathcal{X}} \mu_0(dx) < +\infty$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $C_\varepsilon > 0$ *telle que*

$$\| \mathcal{L}((X^{\mu_0}_{n+k})_{k \geqslant 0}) - \mathcal{S}\mu_\star \|_{TV} \leqslant C_\varepsilon \; n^{-(v(\beta,\rho)-\varepsilon)}.$$

où la fonction v *est définie par*

$$v(\beta, \rho) = \sup_{\alpha \in \left(\frac{1}{2} \vee \left(\frac{3}{2} - \beta\right), \rho\right)} \min\{1, 2(\rho - \alpha)\}(\min\{\alpha,\ \beta,\ \alpha + \beta - 1\} - 1/2).$$

Exemple : mBf (avec $H \in (0, 1/2)$)

Vitesse de convergence à l'équilibre en n^{-v_H} avec

$$v_H = \begin{cases} H(1-2H) & \text{si} \quad H \in (0, 1/4] \\ 1/8 & \text{si} \quad H \in (1/4, 1/2) \end{cases}$$

Principe : On considère (X^1, X^2) solution du système :

$$\begin{cases} X^1_{n+1} = X^1_n + hb(X^1_n) + \sigma(X^1_n)\Delta^1_{n+1} \\ X^2_{n+1} = X^2_n + hb(X^2_n) + \sigma(X^2_n)\Delta^2_{n+1} \end{cases} \tag{3.1}$$

avec pour conditions initiales $(X^1_0, (\Delta^1_k)_{k\leqslant 0}) \sim \mu_0$ et $(X^2_0, (\Delta^2_k)_{k\leqslant 0}) \sim \mu_\star$.

Principe : On considère (X^1, X^2) solution du système :

$$\begin{cases} X^1_{n+1} = X^1_n + hb(X^1_n) + \sigma(X^1_n)\Delta^1_{n+1} \\ X^2_{n+1} = X^2_n + hb(X^2_n) + \sigma(X^2_n)\Delta^2_{n+1} \end{cases} \tag{3.1}$$

avec pour conditions initiales $(X^1_0, (\Delta^1_k)_{k\leqslant 0}) \sim \mu_0$ et $(X^2_0, (\Delta^2_k)_{k\leqslant 0}) \sim \mu_\star$.

On a

$$\|\mathcal{L}((X^1_{n+k})_{k\geqslant 0}) - \mathcal{S}\mu_\star\|_{TV} \leqslant \mathbb{P}(\tau_\infty > n).$$

où $\tau_\infty := \inf\{n \geqslant 0 \mid X^1_k = X^2_k,\ \forall k \geqslant n\}$.

Principe : On considère (X^1, X^2) solution du système :

$$\begin{cases} X^1_{n+1} = X^1_n + hb(X^1_n) + \sigma(X^1_n)\Delta^1_{n+1} \\ X^2_{n+1} = X^2_n + hb(X^2_n) + \sigma(X^2_n)\Delta^2_{n+1} \end{cases} \tag{3.1}$$

avec pour conditions initiales $(X^1_0, (\Delta^1_k)_{k\leqslant 0}) \sim \mu_0$ et $(X^2_0, (\Delta^2_k)_{k\leqslant 0}) \sim \mu_\star$.

On a

$$\|\mathcal{L}((X^1_{n+k})_{k\geqslant 0}) - \mathcal{S}\mu_\star\|_{TV} \leqslant \mathbb{P}(\tau_\infty > n).$$

où $\tau_\infty := \inf\{n \geqslant 0 \mid X^1_k = X^2_k,\ \forall k \geqslant n\}$.

On choisit

$$(\Delta^1_k)_{k\leqslant 0} = (\Delta^2_k)_{k\leqslant 0} \quad \Leftrightarrow \quad (\xi^1_k)_{k\leqslant 0} = (\xi^2_k)_{k\leqslant 0}.$$

Principe : On considère (X^1, X^2) solution du système :

$$\begin{cases} X^1_{n+1} = X^1_n + hb(X^1_n) + \sigma(X^1_n)\Delta^1_{n+1} \\ X^2_{n+1} = X^2_n + hb(X^2_n) + \sigma(X^2_n)\Delta^2_{n+1} \end{cases} \tag{3.1}$$

avec pour conditions initiales $(X^1_0, (\Delta^1_k)_{k\leqslant 0}) \sim \mu_0$ et $(X^2_0, (\Delta^2_k)_{k\leqslant 0}) \sim \mu_\star$.

On a

$$\|\mathcal{L}((X^1_{n+k})_{k\geqslant 0}) - \mathcal{S}\mu_\star\|_{TV} \leqslant \mathbb{P}(\tau_\infty > n).$$

où $\tau_\infty := \inf\{n \geqslant 0 \mid X^1_k = X^2_k,\ \forall k \geqslant n\}$.

On choisit

$$(\Delta^1_k)_{k\leqslant 0} = (\Delta^2_k)_{k\leqslant 0} \quad \Leftrightarrow \quad (\xi^1_k)_{k\leqslant 0} = (\xi^2_k)_{k\leqslant 0}.$$

On définit la suite de v.a $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \xi^1_{n+1} = \xi^2_{n+1} + g_n \quad \text{donc} \quad g_n = 0 \quad \forall n < 0.$$

Étapes du couplage

- **Étape 1** : Essayer de coller les trajectoires en “contrôlant le coût”.

Étapes du couplage

- **Étape 1** : Essayer de coller les trajectoires en “contrôlant le coût”.
- **Étape 2** : Essayer de maintenir les trajectoires collées (spécifique au cadre non markovien).

Étapes du couplage

- ▷ **Étape 1** : Essayer de coller les trajectoires en “contrôlant le coût”.
- ▷ **Étape 2** : Essayer de maintenir les trajectoires collées (spécifique au cadre non markovien).
- ▷ **Étape 3** : Si l'étape 2 échoue, imposer $g_n = 0$ suffisamment longtemps pour que l'étape 1 puisse être réalisée avec un coût contrôlé et une probabilité >0.

$\boxed{\text{Etape 3}}$

Etape 3

Retour compact

$$|X_\tau^i| \leq K$$
$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \xi_{\tau+1-k}^i\right| \leq K \text{ pour } i=1,2.$$

Etape 1 (surtout)

Etape 3

Retour compact

$$|X_\tau^i| \leq K$$
$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \xi_{\tau+1-k}^i\right| \leq K \text{ pour } i=1,2.$$

Etape 1 (surtout)

Décroissance mémoire

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k g_{\tau+n-k}\right| \leq (n+1)^{-\alpha} \qquad \forall n \geq 0$$

Etape 2

À un instant $(\tau+1)$, on veut construire $(\xi^1_{\tau+1}, \xi^2_{\tau+1})$ pour que $X^1_{\tau+1} = X^2_{\tau+1}$, i.e.

$$X^1_\tau + hb(X^1_\tau) + \sigma(X^1_\tau)\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \xi^1_{\tau+1-k} = X^2_\tau + hb(X^2_\tau) + \sigma(X^2_\tau)\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \xi^2_{\tau+1-k}$$

$$\iff \quad \xi^2_{\tau+1} = \Lambda_{\mathbf{X}}(\xi^1_{\tau+1}) \;\text{ où }\; \mathbf{X} = \left(X^1_\tau, X^2_\tau, \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \xi^1_{\tau+1-k}, \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \xi^2_{\tau+1-k}\right) \quad (3.2)$$

À un instant $(\tau+1)$, on veut construire $(\xi^1_{\tau+1}, \xi^2_{\tau+1})$ pour que $X^1_{\tau+1} = X^2_{\tau+1}$, i.e.

$$X^1_\tau + hb(X^1_\tau) + \sigma(X^1_\tau) \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \xi^1_{\tau+1-k} = X^2_\tau + hb(X^2_\tau) + \sigma(X^2_\tau) \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \xi^2_{\tau+1-k}$$

$$\iff \quad \xi^2_{\tau+1} = \Lambda_{\mathbf{X}}(\xi^1_{\tau+1}) \ \text{ où } \ \mathbf{X} = \left(X^1_\tau, X^2_\tau, \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \xi^1_{\tau+1-k}, \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \xi^2_{\tau+1-k} \right) \quad (3.2)$$

Lemme de couplage pour construire $(\xi^1_{\tau+1}, \xi^2_{\tau+1})$:

- Assurer (3.2) avec probabilité strictement positive.
- $|\xi^1_{\tau+1} - \xi^2_{\tau+1}| \leqslant M_K$ p.s.

Maintien des trajectoires collées : $X^1_{n+1} = X^2_{n+1} \quad \forall n \geqslant \tau + 1$, i.e.

$$X^1_n + hb(X^1_n) + \sigma(X^1_n) \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \xi^1_{n+1-k} = X^1_n + hb(X^1_n) + \sigma(X^1_n) \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \xi^2_{n+1-k}$$

$$\iff \quad \forall n \geqslant \tau + 1, \quad \xi^1_{n+1} - \xi^2_{n+1} = g^{(s)}_n = -\sum_{k=1}^{+\infty} a_l g_{n-k}$$

$$\iff \quad \forall n \geqslant 1, \quad g^{(s)}_{\tau+n} = -\sum_{k=1}^{n} a_k g^{(s)}_{\tau+n-k} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k g_{\tau+n-k}. \tag{3.3}$$

Maintien des trajectoires collées : $X^1_{n+1} = X^2_{n+1} \quad \forall n \geqslant \tau + 1$, i.e.

$$X^1_n + hb(X^1_n) + \sigma(X^1_n) \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \xi^1_{n+1-k} = X^1_n + hb(X^1_n) + \sigma(X^1_n) \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \xi^2_{n+1-k}$$

$$\iff \quad \forall n \geqslant \tau + 1, \quad \xi^1_{n+1} - \xi^2_{n+1} = g^{(s)}_n = -\sum_{k=1}^{+\infty} a_l g_{n-k}$$

$$\iff \quad \forall n \geqslant 1, \quad g^{(s)}_{\tau+n} = -\sum_{k=1}^{n} a_k g^{(s)}_{\tau+n-k} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k g_{\tau+n-k}. \tag{3.3}$$

Lemme de couplage pour construire $((\xi^1_{\tau+n+1}, \xi^2_{\tau+n+1}))_{n \in [\![1,T]\!]}$:

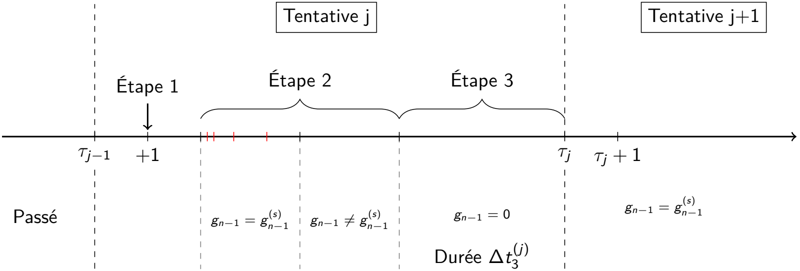
- Assurer (3.3) avec probabilité strictement positive controllée.
- $\|(g_{\tau+n})_{n \in [\![1,T]\!]}\|$ controlé p.s.

But : Déterminer pour quelles valeurs de $p > 0$ on peut contrôler $\mathbb{E}[\tau_\infty^p]$ car :

$$\mathbb{P}(\tau_\infty > n) \leqslant \frac{\mathbb{E}[\tau_\infty^p]}{n^p}$$

où $\tau_\infty := \inf\{n \geqslant 0 \mid X_k^1 = X_k^2,\ \forall k \geqslant n\}$.

Merci de votre attention !



Tentative j
Tentative j+1
Étape 1
Étape 2
Étape 3
τ_{j-1}
$+1$
τ_j
$\tau_j + 1$
Passé
$g_{n-1} = g_{n-1}^{(s)}$
$g_{n-1} \neq g_{n-1}^{(s)}$
$g_{n-1} = 0$
Durée $\Delta t_3^{(j)}$
$g_{n-1} = g_{n-1}^{(s)}$

Étape 1

À un instant $(n+1)$, on veut construire $(\xi^1_{n+1}, \xi^2_{n+1})$ pour que $X^1_{n+1} = X^2_{n+1}$, i.e.

$$F\left(X^1_n,\ \xi^1_{n+1} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \xi^1_{n+1-k}\right) = F\left(X^2_n,\ \xi^2_{n+1} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \xi^2_{n+1-k}\right)$$

Lemme 1 (inspiré de version continue J.Fontbona & F.Panloup)

Soit $K > 0$ et $\mu := \mathcal{N}(0, I_d)$. Sous $(\mathbf{H_2})$, il existe $\tilde{K} > 0$, tel que pour tout $(x, x', y, y') \in B(0, K)^4$, on peut construire (Z_1, Z_2) tel que

(i) $\mathcal{L}(Z_1) = \mathcal{L}(Z_2) = \mu$,

(ii) il existe $\delta_{\tilde{K}} > 0$ tel que

$$\mathbb{P}(F(x, Z_1 + y) = F(x', Z_2 + y')) \geqslant \delta_{\tilde{K}} > 0 \tag{3.4}$$

(iii) il existe $M_K > 0$ tel que

$$\mathbb{P}(|Z_2 - Z_1| \leqslant M_K) = 1. \tag{3.5}$$

Étape 1

On veut coupler à l'instant $\tau_{j-1}+1 \Longrightarrow$ on applique le lemme 1 avec $(x,x',y,y') := \left(X^1_{\tau_{j-1}},\ X^2_{\tau_{j-1}},\ \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \xi^1_{\tau_{j-1}+1-k},\ \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \xi^2_{\tau_{j-1}+1-k}\right)$ et on pose

$$(\xi^1_{\tau_{j-1}+1}, \xi^2_{\tau_{j-1}+1}) = (\mathbb{1}_{\Omega_{K,\alpha,\tau_{j-1}}} Z_1 + \mathbb{1}_{\Omega^c_{K,\alpha,\tau_{j-1}}} \xi, \quad \mathbb{1}_{\Omega_{K,\alpha,\tau_{j-1}}} Z_2 + \mathbb{1}_{\Omega^c_{K,\alpha,\tau_{j-1}}} \xi)$$

où $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$ indépendante de (Z_1, Z_2).

- $\mathbb{P}(\text{succès de l'étape } 1 | \Omega_{K,\alpha,\tau_{j-1}}) \geqslant \delta_K > 0$
- $\left|g_{\tau_{j-1}}\right| = |\xi^1_{\tau_{j-1}+1} - \xi^2_{\tau_{j-1}+1}| \leqslant M_K \quad p.s$

On pose $\mathcal{A}_{j,\ell} := \{$échec étape 2 de la tentative j après ℓ essais exactement$\}$

$$\mathbb{E}[|\Delta\tau_j|^p \mathbb{1}_{\{\Delta\tau_j<+\infty\}} \mid \{\tau_{j-1} < +\infty\}] = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\mathcal{A}_{j,\ell}} |\Delta\tau_j|^p \mathbb{1}_{\{\Delta\tau_j<+\infty\}} \mid \{\tau_{j-1} < +\infty\}].$$

Sur l'événement $\mathcal{A}_{j,\ell}$,

$$\Delta\tau_j = c_2 2^{\ell+1} + \Delta t_3^{(j)} \leqslant C\varsigma^j 2^{(\theta\vee 1)\ell}.$$

De plus, d'après le lemme de couplage de l'étape 2,

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_{j,\ell} \mid \{\tau_{j-1} < +\infty\}) = \mathbb{P}(\mathcal{B}_{j,\ell}^c | \mathcal{B}_{j,\ell-1}) \leqslant 2^{-\tilde{\alpha}\ell}$$

donc

$$\mathbb{E}[|\Delta\tau_j|^p \mathbb{1}_{\{\Delta\tau_j<+\infty\}} \mid \{\tau_{j-1} < +\infty\}] \leqslant C\varsigma^{jp} \Longleftarrow p \in \left(0, \frac{\tilde{\alpha}}{\theta \vee 1}\right).$$