Continuité lipschitzienne des solutions d'un problème en calcul des variations.

Pierre Bousquet * et Francis Clarke †

Abstract

Dans cette note, on décrit quelques développements récents sur la régularité des minimiseurs u de la fonctionnelle $\int_\Omega F(\nabla u)+G(x,u)$, définie sur l'ensemble des fonctions $W^{1,1}(\Omega)$ dont la trace sur $\partial\Omega$ est égale à une certaine fonction ϕ. Notre travail s'inscrit dans la théorie de Hilbert-Haar mais on remplace la traditionnelle condition de *pente bornée* par une condition de *pente minorée*, moins restrictive que la précédente car elle est satisfaite dès que ϕ est la restriction à $\partial\Omega$ d'une fonction convexe, voire semiconvexe. Sous cette nouvelle condition et des hypothèses de convexité sur F et Ω, on montre que tout minimiseur u est localement lipschitzien dans Ω, et dans certains cas, continu sur $\overline{\Omega}$.

Abstract

In this note, we describe some recent developments concerning the regularity of the minimizers u of $\int_\Omega F(\nabla u) + G(x,u)$, over the functions $u \in W^{1,1}(\Omega)$ that assume given boundary values ϕ on $\partial\Omega$. The classical Hilbert-Haar theory derives regularity of u from an assumption on ϕ, the well-known *bounded slope condition*. Instead of this, we impose the less restrictive *lower* (or upper) *bounded slope condition*, which is satisfied if ϕ is the restriction to $\partial\Omega$ of a convex (or even semiconvex) function. Under this new assumption and some convexity hypotheses on F and Ω, we show that any minimizer u is locally Lipschitz in Ω. In some cases we are also able to assert that u is continuous on $\overline{\Omega}$.

Dans cette note, on considère le problème (P) de minimiser la fonctionnelle

$$I(u) := \int_\Omega F(\nabla u(x)) + G(x,u(x))\,dx$$

sur l'ensemble des $u \in W^{1,1}(\Omega)$ dont la trace sur $\Gamma := \partial\Omega$ est égale à une certaine fonction ϕ. On suppose que le problème (P) est bien posé sur cet ensemble et admet une solution u. Dans toute la suite, l'ouvert Ω sera borné et convexe. On désire montrer que si ϕ vérifie certaines hypothèses de régularité, alors u est localement lipshitzien sur Ω. Cette démarche est caractéristique de la théorie de Hilbert-Haar (voir [6], chapitre 1), qui requiert habituellement que ϕ vérifie une condition de pente bornée (CPB).

*Université Claude Bernard Lyon 1, bousquet@igd.univ-lyon1.fr

†Membre de l'Institut universitaire de France et professeur à l'Université Claude Bernard Lyon 1, Clarke@igd.univ-lyon1.fr

La condition de pente bornée de constante K est l'hypothèse que pour tout point γ de la frontière, il existe deux fonctions affines

$$y \mapsto \langle \zeta_\gamma^-, y - \gamma \rangle + \phi(\gamma), y \mapsto \langle \zeta_\gamma^+, y - \gamma \rangle + \phi(\gamma)$$

égales à ϕ en γ, avec $|\zeta_\gamma^-| \leq K, |\zeta_\gamma^+| \leq K$ et telles que

$$\langle \zeta_\gamma^-, y - \gamma \rangle + \phi(\gamma) \leq \phi(\gamma') \leq \langle \zeta_\gamma^+, y - \gamma \rangle + \phi(\gamma) \quad \forall \gamma' \in \Gamma.$$

Le théorème de Hilbert-Haar classique (voir [12]) affirme que si F est convexe, G nul et si ϕ vérifie la (CPB) de constante K, alors il existe un minimum pour I sur l'ensemble des fonctions lipschitziennes valant ϕ au bord. En fait, on peut montrer comme dans [11], Théorème 3.10, qu'un tel minimum est aussi solution de (P) (i.e. minimise I sur les éléments de $W^{1,1}(\Omega)$ dont la trace est égale à ϕ). Si de plus F est strictement convexe, tout minimum sur $W^{1,1}(\Omega)$ est K lipschitzien (voir [4] et [10]). Le cas où G est non nul a été étudié par Stampacchia [13] (voir aussi [9]), en utilisant la théorie des équations aux dérivées partielles elliptiques.

La (CPB) est une condition relativement contraignante. Quand ϕ vérifie la (CPB) sans être affine, alors Ω est nécessairement convexe (c'est une conséquence facile de la définition). De plus, la (CPB) implique que ϕ est de classe $C^{1,\alpha}$ lorsque Γ est de classe $C^{1,\alpha}$, pour $0 \leq \alpha \leq 1$ (voir [7]). Néanmoins, la (CPB) est moins restrictive quand l'ouvert Ω est uniformément convexe, c'est-à-dire quand il existe $\epsilon > 0$ tel qu'en chaque point γ de la frontière, il passe un hyperplan H qui vérifie:

$$d_H(\gamma') \geq \epsilon |\gamma - \gamma'|^2 \quad \forall \gamma' \in \Gamma.$$

Quand Ω est uniformément convexe, il suffit que ϕ soit de classe $C^{1,1}$ pour vérifier la (CPB) (voir [12]).

Cette note propose quelques généralisations de ces résultats lorsqu'on affaiblit cette condition (CPB), afin de pouvoir considérer un ensemble plus grand de conditions de Dirichlet ϕ.

Dans un article récent [5], Clarke a introduit la condition de pente minorée (CPM) de constante K : pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe une fonction affine $y \mapsto \langle \zeta_\gamma, y - \gamma \rangle + \phi(\gamma)$ telle que $|\zeta_\gamma| \leq K$ et vérifiant:

$$\langle \zeta_\gamma, \gamma' - \gamma \rangle + \phi(\gamma) \leq \phi(\gamma') \quad \forall \gamma' \in \Gamma.$$

On pourrait également définir la condition de pente majorée et obtenir des résultats similaires à ceux qui suivent.

La condition de pente minorée est considérablement moins restrictive que la condition de pente bornée : l'ensemble de domaines Ω et de conditions de Dirichlet ϕ qu'on peut considérer est plus grand. Cette nouvelle condition est étudiée dans [1] où l'on montre la :

Proposition 1 *La fonction ϕ vérifie la (CPM) si et seulement si c'est la restriction à Γ d'une fonction convexe. Lorsque Ω est supposé de plus uniformément convexe, ϕ vérifie la (CPM) si et seulement si c'est la restriction à Γ d'une fonction qui est localement semiconvexe sur $\mathbb{R}^n$.*

En fait, il existe une correspondance entre les résultats établis par Hartman dans [7], [8] pour la (CPB) et ceux montrés dans [1] pour la (CPM). Par exemple, lorsque Γ est de classe $C^{1,1}$, on peut dire que ϕ (vue comme fonction sur la variété Γ) est semiconvexe quand la composition de ϕ avec une paramétrisation d'une partie de Γ est semiconvexe (en tant que fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$). Quand Ω est un ouvert convexe borné de classe $C^{1,1}$,

Théorème 1 *Si ϕ vérifie la (CPM), alors ϕ est semiconvexe. Réciproquement, quand Ω est uniformément convexe et ϕ semiconvexe, ϕ vérifie la (CPM).*

Il est d'ailleurs remarquable que la théorie de la semiconvexité donne une preuve simplifiée du théorème principal de [7].

L'intérêt de la (CPM) est qu'elle garantit que les minimiseurs de (P) sont localement lipschitziens. Ainsi, lorsque $G = 0$, on a (voir [5]):

Théorème 2 *On suppose que $G = 0$ et que F est strictement convexe. Soit u une solution de (P). Alors si ϕ vérifie la condition de pente minorée, u est localement lipschitzien sur Ω.*

Contrairement à la (CPB), on ne peut affirmer que les minimiseurs soient globalement lipschitziens (un contre-exemple est donné dans [5]). Mais il suffit qu'un minimiseur u soit localement lipschitzien pour vérifier l'équation d'Euler-Lagrange (si le lagrangien est régulier), en l'absence de toute hypothèse de croissance à l'infini de F. On peut alors appliquer à u les théorèmes de régularité des équations elliptiques.

La preuve du théorème 2 s'appuie sur un principe de comparaison dans le cadre des espaces de Sobolev (voir [10]), et utilise la comparaison d'un minimiseur u avec une fonction construite à partir de u à l'aide d'une dilatation (et non d'une translation, comme c'était habituellement le cas dans la théorie Hilbert-Haar). Ces méthodes ont été étendues pour traiter des lagrangiens plus généraux, de la forme $L(x, u, p) = F(p) + G(x, u)$. Plus précisément, on fait les hypothèses suivantes :

(HF) Il existe $\mu > 0$ tel que pour tout $\theta \in (0, 1)$ et $p, q \in \mathbb{R}^n$, on ait:

$$\theta F(p) + (1-\theta)F(q) \geq F(\theta p + (1-\theta)q) + (\mu/2)\theta(1-\theta)|p-q|^2. \qquad (1)$$

(HG) $G(x, u)$ est mesurable en x et différentiable en u, et pour tout intervalle borné U, il existe une constante L telle que pour presque tout $x \in \Omega$,

$$|G(x, u) - G(x, u')| \leq L|u - u'| \quad \forall u, u' \in U. \qquad (2)$$

On suppose de plus qu'il existe une fonction bornée b telle que $\displaystyle\int_\Omega G(x, b(x))\, dx$ soit bien définie et finie.

Sous les hypothèses (HF) and (HG), la fonctionnelle I est bien définie sur l'ensemble des fonctions de $W^{1,1}(\Omega)$ qui sont bornées sur Ω. On conviendra de dire que u est solution de (P) relativement à $L^\infty(\Omega)$ si u est elle-même bornée et si on a $I(u) \leq I(w)$ pour toute fonction w admissible pour (P) et bornée sur Ω. Alors, on a (voir [3]) :

Théorème 3 *Sous les hypothèses (HF) et (HG), et si ϕ vérifie la condition de pente minorée, toute solution u de (P) relativement à $L^\infty(\Omega)$ est localement lipschitzienne sur Ω.*

Stampacchia [13] a décrit des conditions structurelles sur G qui garantissent *a priori* que les solutions de (P) (sur $W^{1,1}(\Omega)$) soient bornées. Notre preuve utilise des techniques de Hartman et Stampacchia [9], et peut facilement être adaptée au contexte des équations elliptiques non linéaires (voir [2]).

Si la (CPM) ne garantit pas qu'un minimiseur u soit globalement lipschitzien, elle permet néanmoins d'affirmer que u est continue sur l'adhérence de Ω dans de nombreux cas. Ainsi, on a (voir [5]) :

Théorème 4 *Sous les hypothèses du théorème 2 (respectivement, du théorème 3), tout minimiseur u de (P) (respectivement, relativement à $L^\infty(\Omega)$) est continue sous l'une des hypothèses supplémentaires suivantes :*
i) Ω est strictement convexe,
ii) Ω est un polyhèdre,
iii) Ω est de classe $C^{1,1}(\Omega)$ et $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $p > (n+1)/2$.

Le problème de savoir si la continuité de u peut être établie sans hypothèse supplémentaire reste ouvert. De même, l'une des caractéristiques de la (CPM) est qu'elle n'implique pas que Ω soit convexe. Cependant, dans tous les théorèmes précédents, la convexité du domaine était une hypothèse de base. Il serait intéressant de pouvoir élargir l'ensemble des domaines considérés à des domaines non convexes.

References

[1] P. Bousquet. The lower bounded slope condition. Accepted for publication in *Journal of Convex Analysis.*

[2] P. Bousquet. Local Lipschitz continuity of solutions of nonlinear elliptic pde's. Submitted.

[3] P. Bousquet and F. Clarke. Local Lipschitz continuity of solutions to a problem in the calculus of variations. Submitted.

[4] A. Cellina. On the bounded slope condition and the validity of the Euler Lagrange equation. *SIAM J. Control Optim.,* 40(4):1270-1279, 2001/02.

[5] F. Clarke. Continuity of solutions to a basic problem in the calculus of variations. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5),* 4(3):511-530, 2005.

[6] E. Giusti. *Direct methods in the calculus of variations.* World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2003.

[7] P. Hartman. On the bounded slope condition. *Pacific J. Math.,* 18:495-511, 1966.

[8] P. Hartman. Convex sets and the bounded slope condition. *Pacific J. Math.,* 25:511-522, 1968.

[9] P. Hartman and G. Stampacchia. On some non-linear elliptic differential-functional equations. *Acta Math.,* 115:271-310, 1966.

[10] C. Mariconda and G. Treu. Gradient maximum principle for minima. *J. Optim. Theory Appl.,* 112(1):167-186, 2002.

[11] C. Mariconda and G. Treu. Existence and Lipschitz regularity for minima. *Proc. Amer. Math. Soc.,* 130(2):395-404, 2002.

[12] M. Miranda. Un teorema di esistenza e unicità per il problema dell'area minima in n variabili. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3),* 19:233-249, 1965.

[13] G. Stampacchia. On some regular multiple integral problems in the calculus of variations. *Comm. Pure Appl. Math.,* 16:383-421, 1963.