Cours de Géométrie affine et euclidienne pour l'agrégation

Pierre Bousquet

2010/2011

En guise de motivation bassement scolaire, voici ce qu'affirme le rapport de jury 2005, et que répète celui de 2006, au sujet des leçons de géométrie."Elles n'ont eu que peu de succès comme souvent : c'est un tort. (...) Pour certains candidats, il serait plus profitable de travailler des leçons de géométrie, même à un niveau élémentaire, plutôt que de choisir des sujets d'algèbre générale qu'ils ne maîtrisent pas."

Avertissement : ce qui suit n'est nullement original. Je me suis inspiré de l'excellent livre : *Géométrie* de Michèle Audin. J'ai également emprunté certains passages au 4ème tome de la série de livres d'Arnaudiès et Fraysse, et au *Mathématiques générales pour l'agrégation* de Tauvel. Conseil : utilisez votre bouquin de 1er cycle/prépa préféré !

Dans tout ce cours, le corps de base est $\mathbb{R}$ et tous les $\mathbb{R}$ espaces vectoriels considérés sont de dimension finie. (En fait, le langage introduit et toutes les propriétés algébriques, lorsqu'on ne divise pas par 2, restent vrais lorsqu'on remplace $\mathbb{R}$ par un corps commutatif quelconque, mais pas les propriétés particulières à $\mathbb{R}$ que sont : l'orientation, la convexité ou la topologie).

Chapitre 1

Géométrie affine

1.1 Espaces affines

Définition 1 *Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. On dit qu'un ensemble non vide $\mathcal{E}$ est un espace affine sur E s'il existe une action fidèle et transitive du groupe additif de E sur $\mathcal{E}$.*

En termes plus explicites, il existe une application $(t,x) \in E \times \mathcal{E} \mapsto x+t \in \mathcal{E}$ qui est une

- action : $\forall t,t' \in E, \forall x \in \mathcal{E}, x+(t+t') = (x+t)+t'$ (le signe $+$ a deux significations différentes ici : il désigne soit l'action de groupe, soit la loi additive pour le groupe additif de E) et $x+0 = x$,
- transitive : il n'y a qu'une orbite, c'est-à-dire : $\forall x, x' \in \mathcal{E}$, il existe $t \in E$ tel que $x' = x+t$,
- fidèle : si $t \in E$ vérifie $x+t = x$ pour tout $x \in \mathcal{E}$, alors $t = 0$.

En toute rigueur, c'est le triplet constitué de $\mathcal{E}$, de E et de l'action précédente qu'on devrait appeler espace affine. On dit que E est l'espace directeur de $\mathcal{E}$. Les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés les *points*.

La dimension de $\mathcal{E}$ est par définition la dimension de E. Si $\dim \mathcal{E} = 1$, on parle de droite affine. Si $\dim \mathcal{E} = 2$, on parle de plan affine.

Dans toute la suite, la lettre $\mathcal{E}$ désigne un espace affine de direction E et de dimension n.

Proposition 1 *Pour tout $x \in \mathcal{E}$, l'application $\xi_x : t \in E \mapsto x+t \in \mathcal{E}$ est bijective.*

Preuve : On fixe $x \in \mathcal{E}$. L'application ξ_x est surjective, par transitivité de l'action de E sur $\mathcal{E}$. Soient maintenant $t_1, t_2 \in E$ tels que $x+t_1 = x+t_2$. Alors

$$x+(t_1-t_2) = (x+t_1)+(-t_2) = (x+t_2)+(-t_2) = x+(t_2-t_2) = x+0 = x.$$

Il suffit donc de montrer que pour tout $x \in \mathcal{E}, t \in E$, si $x+t = x$, alors $t = 0$. On utilise la fidélité de l'action. Soit $y \in \mathcal{E}$. Montrons que $y+t = y$ ce qui permettra de conclure puisque y est arbitraire. Par transitivité, il existe $u \in E$ tel que $y = x+u$. On a

$$y+t = (x+u)+t = x+(u+t) = x+(t+u) = (x+t)+u = x+u = y.$$

$\square$

Ainsi, pour tout $x, y \in \mathcal{E}$, il existe un unique vecteur $t \in E$ tel que $x+t = y$. On le note $t = y-x$ ou encore $t = \overrightarrow{xy}$.

Exercice 1 *Montrer que*

$$\{x-y, x, y \in \mathcal{E}\} = E.$$

Preuve : L'inclusion $\subset$ est évidente. Réciproquement, soit $t \in E$. Il existe $y \in \mathcal{E}$. Soit $x := y+t$. Alors $t = x-y$ ce qui conclut la preuve.

$\square$

Pour tout $x \in \mathcal{E}$, la bijection précédente permet de transporter sur $\mathcal{E}$ une structure d'espace vectoriel en posant

$$\xi_x(t) + \xi_x(u) := \xi_x(t+u)\ ,\ \lambda\xi_x(u) := \xi_x(\lambda u).$$

La structure d'espace vectoriel ainsi obtenue sur $\mathcal{E}$ est la structure d'origine x. Le point x de l'espace affine $\mathcal{E}$ est le vecteur nul de l'espace vectoriel d'origine x.

Exercice 2 *1) Montrer la formule de Chasles : pour tout $x, y, z \in \mathcal{E}$, on a*

$$\overrightarrow{yx} = \overrightarrow{yz} + \overrightarrow{zx}.$$

Généraliser à un nombre fini de points.

2) Montrer la règle du parallélogramme : si $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{x'y'}$, alors $\overrightarrow{yy'} = \overrightarrow{xx'}$. On dit alors que $xyy'x'$ est un parallélogramme.

Exemples d'espaces affines

Exemple 1 *Tout espace vectoriel E est canoniquement muni d'une structure d'espace affine d'espace directeur E, où l'action est donnée par la loi $+$ de E. Plus généralement, si $x_0 \in E$, on peut définir sur E la structure d'espace affine*

$$(t, x) \in E \times E \mapsto x_0 + x + t.$$

Exercice 3 *1) Montrer que l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires à second membre nul est un espace vectoriel. Si les seconds membres ne sont pas nuls et qu'il existe une solution, c'est un espace affine.*

2) Montrer que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène est un espace vectoriel. Si le second membre est non nul, c'est un espace affine (ce qu'on formule souvent en disant que toute solution de l'équation est la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière).

Exemple 2 *Si F est un sous-espace vectoriel de E, et $x \in \mathcal{E}$, alors l'ensemble $x + F := \{x + t, t \in F\} \subset \mathcal{E}$ est naturellement muni d'une structure d'espace affine de direction F.*

Preuve : On considère l'application $(u, z) \in F \times (x + F) \mapsto z + u$ obtenue par restriction à partir de l'action de groupe de E sur $\mathcal{E}$. C'est une action du groupe additif de F sur $x + F$. Il n'y a qu'une orbite, à savoir $x + F$. Ainsi l'action est transitive. Enfin, si $t \in F$ vérifie $x + u + t = x + u$ pour tout $u \in F$, alors $t = 0$, ce qui suffit à montrer que l'action est fidèle.

□

Définition 2 *Un sous-ensemble non vide $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ s'il existe $x \in \mathcal{E}$ et un sous-espace vectoriel F de E tel que $\mathcal{F} = x + F$.*

On définit de manière évidente les notions de dimension et de direction de sous-espaces affines.

Exemple 3 *Les sous-espaces affines d'un espace vectoriel E sont les $u + F$ où $u \in E$ et F est un sous-espace vectoriel de E. Les sous-espaces vectoriels de E sont donc les sous-espaces affines contenant* 0.

Définition 3 *Soit $A \subset \mathcal{E}$ une partie non vide. On définit $Aff(A)$ comme l'intersection de tous les sous-espaces affines contenant A.*

C'est un sous-espace affine, de direction $Vect(b-a, b \in A)$ pour tout $a \in A$. En effet, pour tout $a \in A$, l'ensemble $a + Vect(b-a, b \in A)$ est un sous-espace affine qui contient A, et qui est contenu dans tout sous-espace affine contenant A.

Définition 4 *On dit que deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de directions F et G sont parallèles si $F \subset G$ ou $G \subset F$.*

On en déduit immédiatement que

– Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.
– Etant donné un point x et une droite affine Δ, il existe une unique droite Δ' parallèle à Δ passant par x.

1.2 Applications affines

On fixe deux espaces affines $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ de direction E et F.

Définition 5 *On dit que $T : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est une application affine s'il existe $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que*

$$T(y) - T(x) = f(y-x), \ \ \forall x, y \in \mathcal{E}. \tag{1.1}$$

Comme $E = \{y - x, x, y \in \mathcal{E}\}$, l'application linéaire définie par (1.1) est nécessairement unique. On l'appelle *partie linéaire* de T.

On notera $\mathcal{A}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ l'ensemble des applications affines de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$. Lorsque $\mathcal{F} = \mathbb{R}$, on parle de fonction affine.

Exercice 4 *Montrer qu'une application $T : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est affine si et seulement si il existe $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $x \in \mathcal{E}$, $y \in \mathcal{F}$ tels que*

$$T(z) = y + f(z - x), \ \ \forall z \in \mathcal{E}.$$

Exercice 5 *1) Montrer que la composée de deux applications affines est affine.*

2) Montrer qu'une application affine est injective/surjective si et seulement si sa partie linéaire est injective/surjective.

3) L'inverse d'une bijection affine est affine.

Preuve : 1) Soient $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, et $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ deux applications affines, de partie linéaire f et g. Alors pour tout $x, y \in E$,

$$\begin{aligned} \psi \circ \phi(y) - \psi \circ \phi(x) &= \psi(\phi(y)) - \psi(\phi(x)) = g(\phi(y) - \phi(x)) \\ &= g(f(y-x)) = g \circ f(y-x) \end{aligned}$$

donc $\psi \circ \phi$ est affine de partie linéaire $g \circ f$.

2) Soit $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application affine de partie linéaire f. Fixons $x \in \mathcal{E}$. Alors il existe $y \in \mathcal{F}$ tels que

$$\phi = y + f(\cdot - x) = \xi_y \circ f \circ \zeta_{-x}$$

où $\xi_y(t) = y + t$ et $\zeta_{-x}(z) = z - x$. Comme $\zeta_{-x} : \mathcal{E} \to E$ est bijective (sa réciproque n'est autre que ξ_x) ainsi que $\xi_y : F \to \mathcal{F}$, le résultat en découle.

3) Avec les notations précédentes,

$$\phi^{-1} = (\zeta_{-x})^{-1} \circ f^{-1} \circ (\xi_y)^{-1} = \xi_x \circ f^{-1} \circ \zeta_{-y}$$

est bien une application affine par composition (où on voit E et F comme des espaces affines).

$\square$

Proposition 2 *1) L'image d'un sous-espace affine par une application affine est un sous-espace affine.*

2) L'image réciproque d'un sous-espace affine par une application affine est soit vide soit un sous-espace affine.

3) L'ensemble des points fixes d'une application affine est soit vide, soit un sous-espace affine.

Preuve : Soit $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application affine de partie linéaire f.

1) Soit $\mathcal{V} = x + V$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. Alors

$$\phi(x+V) = \phi(x) + f(V)$$

ce qui montre que $\phi(\mathcal{V})$ est un sous-espace affine de $\mathcal{F}$.

2) Soit $\mathcal{W}$ un sous-espace affine de $\mathcal{F}$ et notons W sa direction. Supposons que $\phi^{-1}(\mathcal{W})$ soit non vide, et soit $x \in \phi^{-1}(\mathcal{W})$. Alors $\mathcal{W} = \phi(x) + W$, et on vérifie que

$$\phi^{-1}(\mathcal{W}) = x + f^{-1}(W)$$

ce qui montre que $\phi^{-1}(\mathcal{W})$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$.

3) Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des points fixes de ϕ que l'on suppose non vide. Soit $x_0 \in \mathcal{V}$. Alors,

$$x \in \mathcal{V} \Leftrightarrow \phi(x) = x \Leftrightarrow \phi(x) - \phi(x_0) = x - x_0 \Leftrightarrow (f - Id)(x - x_0) = 0.$$

Ainsi $\mathcal{V} = x_0 + \text{Ker}\,(f - Id)$.

$\square$

Proposition 3 *L'ensemble des points fixes d'une application affine est un singleton si et seulement si* 1 *n'est pas valeur propre de sa partie linéaire.*

Preuve : Introduisons l'application affine

$$\psi : x \in \mathcal{E} \mapsto \overrightarrow{x\phi(x)} \in E.$$

Alors ψ est une application affine de partie linéaire $f - Id$. L'ensemble des points fixes de ϕ est $\psi^{-1}(\overrightarrow{0})$. Si 1 n'est pas valeur propre, $f - Id$ est bijective, donc ψ aussi et donc il existe un unique point fixe. Si 1 est valeur propre et l'ensemble des points fixes non vide, alors sa direction $Ker\,(f - Id)$ est de dimension ≥ 1.

$\square$

Exemples d'applications affines

Exemple 4 *Une application $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est affine si et seulement si il existe $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ linéaire et $x \in \mathbb{R}^n$ tels que*

$$\phi(u) = f(u) + x, \ \ u \in \mathbb{R}^m.$$

Exemple 5 *Les applications affines de partie linéaire nulle sont les constantes. Les applications affines dont la partie linéaire est l'identité sont les translations. Les applications affines dont la partie linéaire est une homothétie qui n'est ni nulle ni l'identité, sont les homothéties affines.*

Exemple 6 *Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction V et différent de $\mathcal{E}$. Soit W un supplémentaire de V dans E. Pour tout $x \in \mathcal{E}$, soit $P(x)$ l'unique point commun à $\mathcal{V}$ et à $x + W$ (voir l'exercice 12). L'application P est appelée la projection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{V}$ parallèlement à W.*

$\mathcal{V}$ est l'ensemble des points fixes de P. De plus, en notant p la projection *vectorielle* de E sur V parallèlement à W, on a pour tout $x \in \mathcal{V}$,

$$P = x + p(\cdot - x).$$

Cela montre que P est bien une application affine et $P \circ P = P$.

Exemple 7 *Soit $\lambda \notin \{0,1\}$. L'application $\phi(x) = P(x) + \lambda(x - P(x))$ est appelée affinité de base $\mathcal{V}$ et de rapport λ parallèlement à W. Si $\lambda = -1$, ϕ est la symétrie autour de $\mathcal{V}$ parallèlement à W. Si de plus $\mathcal{V}$ est un point, on parle de symétrie centrale.*

Exercice 6 *1) Montrer qu'une affinité est bien une application affine. Déterminer sa partie linéaire ainsi que l'ensemble de ses points fixes.*
2) Montrer qu'une symétrie ϕ est une involution : $\phi \circ \phi = Id$.
3) Réciproquement, montrer que toute involution affine différente de l'identité est une symétrie.
4) Montrer que l'affinité de base un point x (dans ce cas, on dit aussi de centre x) et de rapport $\lambda \notin \{0,1\}$ est une homothétie. Réciproquement, montrer que toute homothétie affine est une affinité, dont on déterminera la base et le rapport.

Exercice 7 *Soient A, B deux points du plan et λ, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Déterminer la composition de l'homothétie de centre A et de rapport λ avec l'homothétie de centre B et de rapport μ.*

Définition 6 *L'ensemble des bijections affines est le groupe affine de $\mathcal{E}$, noté $GA(\mathcal{E})$.*

Exercice 8 *Montrer que l'ensemble des homothéties et translations est un sous-groupe de $GA(\mathcal{E})$.*

Preuve : Soit $\Theta : GA(\mathcal{E}) \to GL(E)$ l'application qui à une bijection affine associe sa partie linéaire. C' est un morphisme surjectif, de noyau le groupe des translations. L'ensemble des homothéties et translations est l'image réciproque par Θ du sous-groupe des homothéties vectorielles de $GL(E)$ (lui-même isomorphe à $\mathbb{R}^*$). En particulier, le groupe des homothéties-translations est distingué dans $GA(\mathcal{E})$.

□

Une propriété affine est une propriété invariante par un élément du groupe affine. Par exemple, le fait d'être un sous-espace affine est une propriété affine...

1.3 Barycentre

Selon le rapport du jury 2004, concernant la leçon *Barycentre et convexité*, “Les candidats négligent les barycentres (...) Un barycentre n'est pas forcément à coefficients positifs ! ! !”

Proposition 4 *Si $(A_i)_{1\leq i\leq k}$ est une famille de points de $\mathcal{E}$ et $(\lambda_i)_{1\leq i\leq k}$ une famille de réels telle que $\sum \lambda_i \neq 0$, il existe un unique point G tel que*

$$\sum_i \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}.$$

Preuve : Pour tous $O, G \in \mathcal{E}$, on a

$$\sum_i \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \sum_i \lambda_i \overrightarrow{GA_i} + (\sum_i \lambda_i)\overrightarrow{OG}$$

d'où $\sum_i \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si

$$G = O + \frac{\sum_i \lambda_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_i \lambda_i}$$

ce qui démontre l'existence et l'unicité du point G.

$\square$

Définition 7 *Le point G est appelé le barycentre des points A_i afffectés des coefficients λ_i. On appelle $\{(A_i, \lambda_i)\}$ un système de points pondérés.*

Remarque 1 *Si $G = O + \sum \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$, alors G est le barycentre des points $\{(O, 1 - \sum \lambda_i), (A_i, \lambda_i)\}$.*

Exemple 8 *Si tous les λ_i sont égaux, on parle d'isobarycentre. En particulier, si A, B, C sont trois points de $\mathcal{E}$, le barycentre de $\{(A, 1/2), (B, 1/2)\}$ est appelé le milieu du segment $[AB]$. Le barycentre de $\{(A, 1/3), (B, 1/3), (C, 1/3)\}$ est appelé le centre de gravité du triangle ABC.*

Le milieu d'un segment, le centre de gravité d'un triangle sont des notions affines.

Proposition 5 *Si G est le barycentre des points $\{(A_1, \lambda_1), ..., (A_k, \lambda_k)\}$ et H le barycentre des points $\{(B_1, \mu_1), ..., (B_l, \mu_l)\}$, alors le barycentre K de $\{(G, \sum \lambda_i), (H, \sum \mu_j)\}$ (défini si $\sum \lambda_i + \sum \mu_j \neq 0$) est le barycentre de*

$$\{(A_1, \lambda_1), ..., (A_k, \lambda_k), (B_1, \mu_1), ..., (B_l, \mu_l)\}.$$

Preuve : Fixons $O \in \mathcal{E}$. Il suffit de vérifier que

$$K = O + \frac{\sum_i \lambda_i \overrightarrow{OA_i} + \sum_j \mu_j \overrightarrow{OB_j}}{\sum_i \lambda_i + \sum_j \mu_j}.$$

On a

$$\begin{aligned} K &= O + \frac{(\sum_i \lambda_i)\overrightarrow{OG} + (\sum_j \mu_j)\overrightarrow{OH}}{\sum_i \lambda_i + \sum_j \mu_j} \\ &= O + \frac{\sum_i \lambda_i \overrightarrow{OA_i} + \sum_j \mu_j \overrightarrow{OB_j}}{\sum_i \lambda_i + \sum_j \mu_j}. \end{aligned}$$

$\square$

Proposition 6 *1) Une partie non vide $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est un sous-espace affine ssi le barycentre de tout système de points pondérés de $\mathcal{F}$ est dans $\mathcal{F}$.*

2) Une application $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ entre deux espaces affines est une application affine ssi elle envoie le barycentre de tout système de points pondérés $\{(A_i, \lambda_i)\}$ de $\mathcal{E}$ sur le barycentre de $\{(\phi(A_i), \lambda_i)\}$.

Preuve : Les parties directes de 1) et 2) se vérifient facilement. Montrons la réciproque de 1). Fixons $O \in \mathcal{F}$. Soit V l'ensemble des points qui s'écrivent sous la forme d'une somme finie

$$\sum \lambda_i \overrightarrow{OA_i}\ ,\ A_i \in \mathcal{F},\ \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Alors V est un sous-espace vectoriel de E. On a $\mathcal{F} \subset O + V$. Montrons que $O + V \subset \mathcal{F}$, ce qui achèvera la preuve de 1). Soit $\sum \lambda_i \overrightarrow{OA_i} \in V$. Si $\sum \lambda_i \neq 0$, alors le barycentre G des points A_i affectés des coefficients λ_i est dans $\mathcal{F}$ et on a

$$O + \sum \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = O + (\sum \lambda_i)\overrightarrow{OG}$$

qui est le barycentre des points $\{(O, 1 - \sum \lambda_i), (G, \sum \lambda_i)\}$, et appartient donc à $\mathcal{F}$. Si $\sum \lambda_i = 0$, on peut supposer par exemple que $\lambda_1 \neq 0$. Alors par ce qui précède, le point $B := O + \sum_{i>1} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$ appartient à $\mathcal{F}$. Enfin,

$$O + \sum \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = B + \lambda_1 \overrightarrow{OA_1}$$

est le barycentre de $\{(A,\lambda_1),(O,-\lambda_1),(B,1)\}$ et appartient donc à $\mathcal{F}$.

Montrons la réciproque de 2). Soit ϕ une application qui stabilise les barycentres". Montrons qu'elle est affine. Fixons $O\in\mathcal{E}$. Il suffit de montrer que l'application

$$f:\overrightarrow{OM}\in E\mapsto\overrightarrow{\phi(O)\phi(M)}$$

est linéaire. Soient $M,N\in\mathcal{E}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Il existe $A\in\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$. Alors A est le barycentre de $\{(M,\lambda),(N,1),(O,-\lambda)\}$ donc $\phi(A)$ est le barycentre de $\{(\phi(M),\lambda),(\phi(N),1),(\phi(O),-\lambda)\}$. Ainsi

$$\lambda\overrightarrow{\phi(A)\phi(M)}+\overrightarrow{\phi(A)\phi(N)}-\lambda\overrightarrow{\phi(A)\phi(O)}=\overrightarrow{0}.$$

On en déduit

$$\overrightarrow{\phi(O)\phi(A)}=\lambda\overrightarrow{\phi(O)\phi(M)}+\overrightarrow{\phi(O)\phi(N)}$$

ce qui montre que $f(\lambda\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})=\lambda f(\overrightarrow{OM})+f(\overrightarrow{ON})$.

□

Lemme 1 *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de points de $\mathcal{E}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) Il existe $j\in I$ tel que la famille $(\overrightarrow{A_jA_i})_{i\neq j}$ est libre.

ii) Pour tout $j\in I$, la famille $(\overrightarrow{A_jA_i})_{i\neq j}$ est libre.

Preuve : Il suffit de montrer $i)\Rightarrow ii)$. Supposons que $(\overrightarrow{A_{j_0}A_i})_{i\neq j_0}$ soit libre. Soit $j\in I$. Considérons une relation linéaire

$$\sum_{i\neq j}\lambda_i\overrightarrow{A_jA_i}=\overrightarrow{0}$$

et montrons qu'elle est triviale, ce qui achèvera la preuve du lemme. On a

$$\overrightarrow{0}=\sum_{i\neq j,j_0}\lambda_i\overrightarrow{A_{j_0}A_i}+(\sum_{i\neq j}\lambda_i)\overrightarrow{A_jA_{j_0}}.$$

Par hypothèse, on en déduit

$$\forall i\notin\{j,j_0\},\lambda_i=0\ ,\ \sum_{i\neq j}\lambda_i=0$$

d'où l'on déduit $\lambda_{j_0}=0$, ce qui conclut la preuve.

□

Définition 8 *Une famille (A_i) est dite affinement libre si elle vérifie l'une des conditions équivalentes précédentes. C'est une base affine de $\mathcal{E}$ si de plus $Aff(A_i)=\mathcal{E}$.*

Remarque 2 *Soient $A_1,\ldots,A_k$ des points de $\mathcal{E}$. Alors $Aff(A_1,\ldots,A_k)$ est l'ensemble des barycentres de $A_1,\ldots,A_k$.*

En effet, notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des barycentres de $A_1,\ldots,A_k$. D'une part, tout sous-espace affine contenant $A_1,\ldots,A_k$ contient $\mathcal{F}$. Donc $\mathcal{F}\subset Aff(A_1,\ldots,A_k)$. D'autre part, l'ensemble $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine puisque tout barycentre de points de $\mathcal{F}$ est dans $\mathcal{F}$. Donc $Aff(A_1,\ldots,A_k)\subset\mathcal{F}$.

On rappelle aussi que $Aff(A_i)=\mathcal{E}$ est équivalent à pour tout i, $E=Vect_{j\neq i}\overrightarrow{A_iA_j}$. Le cardinal d'une base affine est dim E+1.

Exemple 9 *Les bases affines d'une droite affine sont les paires de points distincts. Les bases affines d'un plan affine sont les triplets de points distincts tels qu'aucun n'appartienne à la droite passant par les deux autres.*

Proposition 7 *La famille* $(A_1, ..., A_{n+1})$ *est une base affine de* $\mathcal{E}$ *si et seulement si pour tout* $M \in \mathcal{E}$*, il existe un unique* $n+1$ *uplet* $(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1})$ *tel que* $\sum \lambda_i = 1$ *et* M *soit le barycentre de* $\{(A_i, \lambda_i)\}$.

Preuve : M est le barycentre de $\{(A_i, \lambda_i)\}$ avec $\sum \lambda_i = 1$ si et seulement si

$$\overrightarrow{A_1M} = \sum_{i>1} \lambda_i \overrightarrow{A_1A_i}.$$

Si $(A_1, ..., A_{n+1})$ est une base affine, alors $(\overrightarrow{A_1A_i})_{i>1}$ est une base de E. On en déduit que le n uplet $(\lambda_2, ..., \lambda_{n+1})$ correspond aux coordonnées de $\overrightarrow{A_1M}$ dans la base $(\overrightarrow{A_1A_i})_{i>1}$ et $\lambda_1 = 1 - \sum_{i>1} \lambda_i$.

Réciproquement, l'hypothèse implique que la famille $(\overrightarrow{A_1A_i})_{i>1}$ est une base de $\{\overrightarrow{A_1M}, M \in \mathcal{E}\} = E$, ce qui prouve $Aff(A_i) = \mathcal{E}$.

$\square$

Définition 9 *Soit* $(A_1, ..., A_{n+1})$ *une base affine de* $\mathcal{E}$*. On appelle suite de coordonnées barycentriques d'un point* $M \in \mathcal{E}$ *la suite* $(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1})$ *telle que* $\sum \lambda_i = 1$ *et* M *est le barycentre de* $\{(A_i, \lambda_i)\}$.

1.4 Repères affines

Définition 10 *Un repère affine de* $\mathcal{E}$ *est un élément* $\mathcal{R} = (O; e_1, ..., e_n)$ *de* $\mathcal{E} \times E^n$*, tel que* $(e_1, ..., e_n)$ *soit une base de* E*. Le point* O *est l'origine du repère.*

Pour tout $M \in \mathcal{E}$, il existe un unique n uplet $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ tel que

$$M = O + \sum \lambda_i e_i.$$

Les λ_i sont les *coordonnées* de M dans le repère $\mathcal{R}$.

Exercice 9 *Soient* $\mathcal{R} = (O; e_1, ..., e_n)$ *et* $\mathcal{R}' = (O'; e'_1, ..., e'_n)$ *deux repères de* $\mathcal{E}$*. Soit* $x \in \mathcal{E}$ *et* X, X' *les matrices colonne des coordonnées de* x *dans* $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$*. Ecrire la relation entre* X *et* X'*.*

Preuve : Soit P la matrice de passage de la base (e_i) à la base (e'_i). Soit C la matrice colonne des coordonnées de O' dans $\mathcal{R}$. Si Y est la matrice colonne des coordonnées de x dans le repère $(O'; e_1, ..., e_n)$, on a

$$Y = PX'.$$

Ecrivant $\overrightarrow{Ox} = \overrightarrow{O'x} + \overrightarrow{OO'}$, on obtient

$$X = Y + C = PX' + C.$$

Exercice 10 *Soit* $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ *une application affine. Soit* $\mathcal{R} = (O; e_1, ..., e_n)$ *un repère de* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{R}' = (O'; f'_1, ..., f'_p)$ *un repère de* $\mathcal{F}$*. Soit* X *la matrice colonne des coordonnées d'un point* $x \in \mathcal{E}$ *dans* $\mathcal{R}$ *et* Y *celle de* $\phi(x)$ *dans* $\mathcal{R}'$*. Exprimer* Y *en fonction de* X*.*

Preuve : Soit A la matrice de la partie linéaire g de ϕ dans les bases $(e_i), (f'_j)$. L'identité $\overrightarrow{O'\phi(x)} = g(\overrightarrow{Ox}) + \overrightarrow{O'\phi(O)}$ s'écrit

$$Y = AX + C$$

où C est la matrice colonne des coordonnées de $\phi(O)$ dans $\mathcal{R}'$.

Représentation paramétrique Une représentation paramétrique affine d'un sous-espace affine $\mathcal{F}$ est une application (automatiquement bijective) de la forme

$$(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \mapsto x + \sum \lambda_i e_i$$

où $x \in \mathcal{F}$ et (e_i) est une base de F, la direction de $\mathcal{F}$.

Représentation cartésienne Soit $\mathcal{R} = (O; e_1, ..., e_n)$ un repère affine d'un espace affine $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, que l'on écrit comme l'intersection des noyaux de $n-p$ fonctions affines linéairement indépendantes $\phi_1, ..., \phi_{n-p}$. On note g_i leur partie linéaire et L_i le vecteur ligne des coordonnées de g_i dans la base duale de (e_i). Soit A la matrice dont la i ème ligne est L_i. Enfin, soit B le vecteur colonne dont la i ème ligne est $\phi_i(O)$. Alors $x \in \mathcal{F}$ si et seulement si pour tout i, $g_i(x-O) + \phi_i(O) (= \phi_i(x)) = 0$, si et seulement si

$$AX + B = 0,$$

où X est le vecteur colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{R}$. Cette équation correspond à un système affine, qui est la *représentation cartésienne* de $\mathcal{F}$.

1.5 Exercices supplémentaires

Sous-espaces affines

Exercice 11 *Une intersection non vide de sous-espaces affines est un sous-espace affine. Sa direction est l'intersection des directions des sous-espaces affines.*

Une condition suffisante pour que deux espaces affines soient d'intersection non vide est donnée par l'

Exercice 12 *Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de directions F et G telles que $F + G = E$. Alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$.*

Exercice 13 *Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de direction F et G.*
i) Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, alors

$$\dim Aff(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G.$$

ii) Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$, alors

$$\dim Aff(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G + 1.$$

iii) A quelle condition $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est un sous-espace affine ?

Applications affines

Exercice 14 *Si $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une application linéaire, montrer que tous les $f^{-1}(y)$ pour $y \in \mathbb{R}^n$ sont des sous-espaces affines parallèles.*

Exercice 15 *Soient $\phi_1, ..., \phi_k$ k fonctions affines sur $\mathcal{E}$ de partie linéaire $f_1, ..., f_k$. Soit*

$$\mathcal{V} = \{x \in \mathcal{E} : \phi_i(x) = 0, i = 1, ..., k\}.$$

1) Montrer que si $\mathcal{V}$ n'est pas vide, alors c'est un espace affine de dimension $\dim E - \mathrm{rg}\,(f_1, ..., f_k)$. (On pourra considérer l'application $x \in \mathcal{E} \mapsto (\phi_1(x), ..., \phi_k(x)) \in \mathbb{R}^k$.)

2) Montrer que si la famille $(f_1, ..., f_k)$ est libre alors $\mathcal{V}$ n'est pas vide.

Exercice 16 *Quelle est la conjuguée $\phi \circ h \circ \phi^{-1}$ de l'homothétie de centre O et de rapport λ par la transformation affine ϕ ?*

Exercice 17 *1) Soit ABC un triangle, I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[BC]$ et K le milieu de $[AC]$. Montrer que l'orthocentre du triangle IJK est le centre O du cercle circonscrit à ABC.*

2) Soit G le centre de gravité de ABC et h l'homothétie de centre G et de rapport $-1/2$. Quelle est l'image par h de A, B, C? De la hauteur de ABC passant par A? De l'orthocentre H du triangle ABC? En déduire que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OJ}$.

3) Soit AB la corde d'un cercle $\mathcal{C}$. Montrer que le lieu de l'orthocentre du triangle ABM lorsque M décrit $\mathcal{C}$ est le cercle $\mathcal{C}'$ symétrique orthogonal de $\mathcal{C}$ par rapport à (AB).

Exercice 18 *Soient d, d', d'' 3 droites parallèles distinctes, $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ 2 droites dont aucune n'est parallèle à d. Soient $A_i = \mathcal{D}_i \cap d$, $A'_i = \mathcal{D}_i \cap d'$, $A''_i = \mathcal{D}_i \cap d''$. Alors on a*

$$\frac{\overline{A_1A''_1}}{\overline{A_1A'_1}} = \frac{\overline{A_2A''_2}}{\overline{A_2A'_2}}.$$

Réciproquement, si un point B de $\mathcal{D}_1$ vérifie l'égalité

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1A'_1}} = \frac{\overline{A_2A''_2}}{\overline{A_2A'_2}},$$

alors $B = A''_1$.

(Remarque : Si A, B, C sont 3 points alignés, et u un vecteur directeur de la droite qu'ils définissent, on peut écrire $\overrightarrow{AB} = \lambda u$ et c'est ce nombre λ qu'on note $\overline{AB}$. Cette mesure algébrique dépend du choix de u. En revanche, le rapport $\overline{AB}/\overline{AC}$ n'en dépend pas.)

Exercice 19 *Soient A, B et C trois points d'une droite $\mathcal{D}$ et A', B' et C' trois points d'une droite $\mathcal{D}'$ distincte de $\mathcal{D}$. Si (AB') est parallèle à (BA') et (BC') est parallèle à (CB'), alors (AC') est parallèle à (CA').*

Barycentres

Exercice 20 *Montrer que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.*

Exercice 21 *1) Montrer que les médianes d'un triangle sont concourantes.*

2) Montrer que le centre de gravité d'un tétraèdre est le milieu des segments joignant les milieux des arêtes opposées.

Exercice 22 *Soit ABC un triangle et α, β, γ trois réels différents de 1. Soit L le barycentre de $(B, 1), (C, -\alpha)$, M celui de $(C, 1), (A, -\beta)$ et N celui de $(A, 1), (B, -\gamma)$. De même, soit L' le barycentre de $(C, 1), (B, -\alpha)$, M' celui de $(A, 1), (C, -\beta)$ et N' celui de $(B, 1), (A, -\gamma)$.*

1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur α, β, γ pour que les points L, M, N soient alignés.

2) Montrer que sous cette même condition, les points L', M', N' sont alignés. La droite passant par les points L', M' et N' est appelée l'isotomique de la droite passant par L, M, N, par rapport au triangle ABC. alignés. La droite passant par ces milieux est la droite de Newton. ABC et la droite isotomique.

Exercice 23 *1) Dans un plan affine réel, décrire l'intérieur d'un triangle ABC en termes de barycentres.*

2) Soit ϕ une bijection affine. Montrer que l'image par ϕ de l'intérieur de ABC est l'intérieur du triangle $\phi(A)\phi(B)\phi(C)$.

Exercice 24 *Dans le plan affine, on considère un triangle ABC et une droite D qui coupe (BC) en P, (CA) en Q et (AB) en R. On définit 3 points I, J et K par*

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AR}\ ,\ \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BR}\ ,\ \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ}.$$

Montrer que les points I, J et K sont alignés.

Exercice 25 *Soit ABC un triangle équilatéral et M un point de son plan. On note A', B', C' les symétriques de M par rapport à $(BC), (CA), (AB)$. Montrer que les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes sauf si M est sur le cercle passant par les points A_1, B_1 et C_1 où A_1 est le symétrique de A par rapport à (BC), B_1 celui de B par rapport à (AC) et C_1 celui de C par rapport à (AB).*

Repères

Exercice 26 *$\mathbb{R}^3$ étant muni d'un repère affine (O, i, j, k), décrire par un système d'équations paramétriques le sous-espace affine engendré par les points $A_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, $1 \leq i \leq 3$.*

Exercice 27 *Soit $\mathcal{E}$ un plan affine muni d'un repère $\mathcal{R} := (O; e_1, e_2)$.*

1) Montrer que l'équation cartésienne d'une droite est de la forme $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Donner l'équation cartésienne de la droite vectorielle qui dirige cette droite affine.

2) Deux droites d'équation $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$.

3) Trois points de coordonnées $(x, y), (x', y'), (x'', y'')$ sont alignés si et seulement si $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \end{vmatrix} = 0.$

4) Trois droites d'équation $a_ix + b_iy + c_i = 0$, $1 \leq i \leq 3$, sont concourantes ou parallèles si et seulement si $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$

5) On se donne deux équations cartésiennes de plan dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$: $(\mathcal{P}_1)$ d'équation $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, et $(\mathcal{P}_2)$ d'équation $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Donne une CNS sur les coefficients pour que ces deux plans soient parallèles ? s'intersectent selon une droite ? Soit $(\mathcal{P}_3)$ d'équation $a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$. CNS pour que les trois plans soient parallèles ? qu'ils s'intersectent selon une droite ? selon un point ?

Exercice 28 *A quelles conditions les deux systèmes d'équations*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1'x + b_1'y + c_1'z = d_1' \\ a_2'x + b_2'y + c_2'z = d_2' \end{cases}$$

décrivent-ils des droites affines de $\mathbb{R}^3$? des droites affines parallèles de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 29 *$\mathbb{R}^3$ étant muni d'un repère affine, décrire en coordonnées cartésiennes*

1) une translation de vecteur t,

2) une homothétie de centre A et de rapport λ.

Exercice 30 *Déterminer la nature de l'application affine*

$$\phi : (x, y) \mapsto (\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y + 1, -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y - 1).$$

1.5.1 Solutions ou indications des exercices

Solution 2

1) D'une part, $y + \overrightarrow{yx} = x$. D'autre part, $y + (\overrightarrow{yz} + \overrightarrow{zx}) = (y + \overrightarrow{yz}) + \overrightarrow{zx} = z + \overrightarrow{zx} = x$. Par injectivité de $t \mapsto y + t$, on obtient $\overrightarrow{yx} = \overrightarrow{yz} + \overrightarrow{zx}$.
2) Notons d'abord que $\overrightarrow{yx} = -\overrightarrow{xy}$ car par la relation de Chasles, $\overrightarrow{yx} + \overrightarrow{xy} = \overrightarrow{yy} = \overrightarrow{0}$. Ensuite,

$$\overrightarrow{yy'} = \overrightarrow{yx} + \overrightarrow{xx'} + \overrightarrow{x'y'} = \overrightarrow{xx'}.$$

Solution 3

1) On peut écrire un système d'équations linéaires sous la forme $AX = B$ où A est une matrice dont le nombre de lignes est le nombre d'équations et le nombre de colonnes est le nombre d'inconnues. Si le vecteur colonne B est nul, le système est homogène, et l'ensemble des solutions est le noyau $Ker\,A$ de A qui est bien un espace vectoriel. Dans le cas général, s'il existe une solution X_0, alors l'ensemble des solutions est $X_0 + Ker\,A$ qui est bien un espace affine de direction $Ker\,A$.
2) Considérons l'équation $X' = AX + B$. Lorsque $B = 0$, l'équation est homogène et l'ensemble des solutions est $\{t \mapsto \exp(tA)Z, Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$. Lorsque $B \neq 0$, en notant X_0 une solution particulière de l'équation, l'ensemble des solutions s'écrit $\{t \mapsto X_0(t) + \exp(tA)Z, Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$, qui est bien un espace affine dont la direction est l'espace des solutions de l'équation homogène associée.

Solution 4 Si T est une application affine, on note f sa partie linéaire. On fixe $x \in \mathcal{E}$ et on note $y := T(x)$. Alors $\forall z \in \mathcal{E}, T(z) - T(x) = f(z - x)$. Réciproquement, s'il existe $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $x \in \mathcal{E}$ et $y \in \mathcal{F}$ tels que $T(z) = y + f(z - x)$ pour tout $z \in \mathcal{E}$, alors pour tout $z_1, z_2 \in \mathcal{E}, T(z_1) = y + f(z_1 - x)$ et $T(z_2) = y + f(z_2 - x)$, donc $T(z_2) - T(z_1) = f(z_2 - z_1)$ en utilisant la formule de Chasles.

Solution 6 Montrons 1). Pour tout $x, y \in \mathcal{E}$,

$$\phi(x) - \phi(y) = P(x) - P(y) + \lambda(x - P(x) - y + P(y)) = [(1 - \lambda)p + \lambda Id](x - y).$$

Donc ϕ est une application affine de partie linéaire $(1 - \lambda)p + \lambda Id = Id_V + \lambda Id_W$. De plus, $x = \phi(x)$ si et seulement si $x = P(x)$ si et seulement si $x \in \mathcal{V}$.

Montrons 2). Comme $Id_V - Id_W$ est une involution vectorielle, la partie linéaire de $\phi \circ \phi$ est l'identité. Donc $\phi \circ \phi$ est une translation. Tout point de $\mathcal{V}$ est un point fixe de ϕ, donc de $\phi \circ \phi$. La seule translation ayant un point fixe est l'identité. Donc $\phi \circ \phi$ est l'identité.

Montrons 3). Soit ϕ une application affine telle que $\phi \circ \phi = Id$. Soit $\mathcal{V}_1$ l'ensemble de ses points fixes. Si $x \in \mathcal{E}$, alors $(x + \phi(x))/2 \in \mathcal{V}_1$. Donc $\mathcal{V}_1$ est non vide et c'est un sous-espace affine. La partie linéaire f de ϕ est une involution linéaire. Comme le polynôme scindé à racines simples $X^2 - 1$ annule f, f est diagonalisable dans une base et a pour valeurs propres 1 et/ou -1. En notant V et W les sous-espaces propres associés (lorsqu'ils sont non triviaux), on a donc

$$f = Id_V - Id_W.$$

Soit $x \in \mathcal{V}_1$. Alors

$$\phi(y) = x + f(y - x), \quad y \in \mathcal{E}.$$

On en déduit que $\mathcal{V}_1 = x + V$ et que ϕ est la symétrie autour de $\mathcal{V}_1$ parallèlement à W.

Montrons 4). Si ϕ est l'affinité de base x et de rapport λ, alors

$$\phi(y) = x + \lambda(y - x)$$

et la partie linéaire de ϕ est bien une homothétie vectorielle de rapport $\lambda \notin \{0, 1\}$, ce qui montre que ϕ est une homothétie. Réciproquement, soit ϕ une homothétie. Il existe donc $\lambda \notin \{0, 1\}$ et $x, y \in \mathcal{E}$ tels que

$$\phi(z) = y + \lambda(z - x), \;\; z \in \mathcal{E}.$$

On cherche un point fixe de ϕ : l'unique solution de $\phi(z) = z$ est $z_0 = x + (y - x)/(1 - \lambda)$. Alors

$$\phi(z) = z_0 + \lambda(z - z_0)$$

apparaît bien comme une affinité de centre z_0 et de rapport λ.

Solution 7 La partie linéaire de la composée est la composée des parties linéaires, à savoir la composée des homothéties vectorielles de rapport λ et μ. Si $\lambda\mu \neq 1$, il s'agit d'une homothétie différente de l'identité. Donc la composée des homothéties affines est dans ce cas une homothétie affine. Si $\lambda\mu = 1$, la composée des homothéties affines est une translation, de vecteur non nul sauf si $A = B$.

Solution 11 Soit $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ telle que $\cap_{i\in I}\mathcal{F}_i \neq \emptyset$. Notons F_i la direction de $\mathcal{F}_i$. Soit $x \in \cap_{i\in I}\mathcal{F}_i$. Alors pour tout $i \in I$, on a $\mathcal{F}_i = x + F_i$. D'où

$$\cap_{i\in I}\mathcal{F}_i = \cap_{i\in I}(x + F_i) = x + \cap_{i\in I}F_i.$$

Solution 12 Soient $x \in \mathcal{F}$ et $y \in \mathcal{G}$. Alors $x - y \in E = F + G$. Donc il existe $f \in F, g \in G$ tels que $x - y = f + g$. Alors $x - f = y + g \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.

Solution 13

i) Soit $x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. La direction de $Aff(\mathcal{F} + \mathcal{G})$ est

$$Vect(y - x : y \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = Vect(F \cup G)$$

car $\mathcal{F} - x = F$ et $\mathcal{G} - x = G$. Ainsi, la direction de $Aff(\mathcal{F} + \mathcal{G})$ est $F + G$. On peut conclure.

ii) Soient $x \in \mathcal{F}, y \in \mathcal{G}$ et $t = x - y$. Alors $t \notin F + G$ (sinon t s'écrit $t = t_F + t_G$ d'où $x - t_F = y - t_G \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$...). La direction de $Aff(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$ est

$$Vect(z - y : z \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = Vect(G \cup (\mathcal{F} - y)) = Vect(G \cup (\mathcal{F} - x + t))$$

$$= Vect(G \cup (F + t)) = Vect(G \cup (F + \mathbb{R}t)) = G + F + \mathbb{R}t.$$

Comme $t \notin F + G$, on a $dim\,(G + F + \mathbb{R}t) = 1 + dim\,(G + F)$. D'où le résultat.

iii) On commence par écarter le cas où $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont disjoints (car le milieu d'un segment joignant un point de $\mathcal{F}$ et un point de $\mathcal{G}$ ne peut appartenir alors à $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$). On se restreint donc au cas où $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont sécants, en un point qu'on appelle O. La direction de $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est $\{\overrightarrow{OM} : M \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}\}$, c'est-à-dire $F \cup G$. On se ramène ainsi au même exercice en remplaçant sous-espaces affines par sous-espaces vectoriels. On sait bien que la réunion de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel ssi l'un est contenu dans l'autre (si on a oublié, que dire de $f + g$ si $f \in F \setminus G$ et $g \in G \setminus F$?)

Solution 14 La direction de $f^{-1}(y)$ est $Ker\, f$.

Solution 15 1) On considère l'application

$$\Phi : x \in \mathcal{E} \mapsto (\phi_1(x), ..., \phi_k(x)) \in \mathbb{R}^k$$

C'est une application affine (ici $\mathbb{R}^k$ est muni de sa structure affine naturelle), de partie linéaire

$$\eta : x \in E \mapsto (f_1(x), ..., f_k(x)) \in \mathbb{R}^k.$$

Alors $\mathcal{V} = \Phi^{-1}(0)$ apparaît bien comme un sous-espace affine. La direction de $\mathcal{V}$ est $V := \operatorname{Ker} \eta$. On a de plus $\operatorname{rg} \eta = \operatorname{rg}(f_1, ..., f_k)$. Donc la dimension de V est donnée par la formule du rang.

2) Si la famille $(f_1, ..., f_k)$ est libre, alors le rang de η est égal à k, c'est-à-dire η est surjectif, donc Φ est surjectif, donc $0 \in \operatorname{Im} \Phi$. Ainsi $\mathcal{V} \neq \emptyset$.

Solution 16 En regardant les parties linéaires, on voit qu'il s'agit d'une homothétie de rapport λ (utiliser le fait que les homothéties vectorielles commutent avec toutes les applications linéaires). Il rest à déterminer le centre. On remarque que $\phi(O)$ est un point fixe. C'est donc le centre de l'homothétie cherchée.

Solution 17 1) Notons provisoirement L l'orthocentre de IJK et montrons que $L = O$. Les droites (IK) et (BC) sont parallèles (par exemple par le théorème de Thalès) et les droites (IK) et (JL) sont perpendiculaires (par définition d'une hauteur). Donc les droites (JL) et (BC) sont perpendiculaires. Elles se coupent en J qui est le milieu de $[BC]$. Donc la droite (JL) est la médiatrice de $[BC]$. De même, (KL) et (IL) sont les médiatrices de $[AC]$ et $[AB]$ respectivement. Donc $L = O$.

2) On sait que G est" situé aux deux-tiers" des médianes. Donc $h(A) = J$, $h(B) = K$ et $h(C) = I$. L'image de la hauteur passant par A est une droite, passant par $h(A) = J$ et parallèle à cette hauteur, et donc perpendiculaire à (BC). C'est donc la droite (JO). On en déduit $h(H) = O$ et donc $\overrightarrow{GO} = (-1/2)\overrightarrow{GH}$. Comme $\overrightarrow{GJ} = (-1/2)\overrightarrow{GA}$, il vient facilement $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OJ}$.

3) Notons I le milieu de $[AB]$, O le centre du cercle et pour tout $M \in \mathcal{C}$, H l'orthocentre du triangle ABM. Alors par la question précédente, $\overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{OI}$. Le point H décrit le translaté de $\mathcal{C}$ par la translation de vecteur $2\overrightarrow{OI}$, qui est aussi le symétrique orthogonal de $\mathcal{C}$ par rapport à (AB).

Solution 18 Soit π la projection affine sur $\mathcal{D}_2$ parallèlement à d et p la projection linéaire associée. Alors $\pi(A_1) = A_1'$, etc... En introduisant λ tel que $\overrightarrow{A_1A_1''} = \lambda\overrightarrow{A_1A_1'}$, on a

$$p(\overrightarrow{A_1A_1''}) = \lambda p(\overrightarrow{A_1A_1'}),$$

d'où $\overrightarrow{A_2A_2''} = \lambda\overrightarrow{A_2A_2'}$, ce qui permet de montrer le théorème. Pour la réciproque : on a $\overline{A_1B} = \overline{A_1A_1''}$. Donc $B = A_1''$.

Solution 19 On considère d'abord le cas où $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles. Soit O leur point d'intersection.Soient ϕ l'homothétie de centre O qui envoie A sur B et ψ celle qui envoie B sur C. Alors $\phi(B') = A'$ et $\psi(C') = A'$. Alors $\phi \circ \psi(C') = A'$ et $\psi \circ \phi(A) = C$. Comme ϕ et ψ ont le même centre, elles commutent. De plus, une homothétie envoie une droite sur une droite qui lui est parallèle. Donc (AC') et (CA') sont parallèles.

On considère ensuite le cas où $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles. On reconnaît deux parallélogrammes : $ABA'B'$ et $BCB'C'$. D'où $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'A'}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{C'B'}$. On en déduit

$$\overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{C'B'} + \overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.$$

Donc $ACA'C'$ est un parallélogramme. Donc (AC') et $(A'C)$ sont parallèles.

Solution 20 Soit I le milieu de $[AB]$. Alors $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$. On en déduit

$$\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}.$$

Donc I est le milieu de $[CD]$.

Solution 21 1) Soit G l'isobarycentre de A, B et C. Par associativité, c'est aussi le barycentre de $\{(A,1),(I,2)\}$ où I est le milieu de $[BC]$. Donc G appartient à la droite (AI). De même, G appartient aux deux autres médianes. Donc les médianes sont concourantes.

2) Le barycentre de $\{(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)\}$ est par associativité le barycentre de $\{(I,2),(J,2)\}$ où I est le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[CD]$. On fait de même avec les autres côtés.

Solution 22 Commençons par la remarque générale suivante. Soient A_1, A_2 et A_3, 3 points formant une famille affinement libre. Soient M_1, M_2 et M_3 repérés par leurs coordonnées barycentriques dans le repère $\{A_1,A_2,A_3\}$: $(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)$, $1\le i\le 3$ (en particulier, $\alpha_i+\beta_i+\gamma_i=1$). Alors les points M_1, M_2 et M_3 sont alignés ssi M_3 s'écrit comme le barycentre de M_1 et M_2, i.e. s'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que (pour tout point O) $\overrightarrow{OM_3}=\lambda\overrightarrow{OM_1}+(1-\lambda)\overrightarrow{OM_2}$, ce qui s'écrit au niveau des coordonnées :

$$\alpha_3=\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2,$$

et de même pour β_i, γ_i. Ainsi, si M_1, M_2 et M_3 sont alignés alors la famille $\{(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)\}_{1\le i\le 3}$ est liée. Réciproquement, si la famille $\{(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)\}_{1\le i\le 3}$ est liée, quitte à permuter, il existe λ, $\mu\in\mathbb{R}$ tels que

$$\alpha_3=\lambda\alpha_1+\mu\alpha_2,$$

et de même pour β_i, γ_i. Lorsqu'on somme ces 3 égalités et qu'on se souvient de $\alpha_i+\beta_i+\gamma_i=1$, on obtient $\mu=1-\lambda$. En conclusion, M_1, M_2 et M_3 sont alignés ssi la famille $\{(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)\}_{1\le i\le 3}$ est liée ou de manière équivalente

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}=0.$$

Lorsqu'on applique notre remarque à la situation particulière de cet exercice, on trouve qu'une CNS pour que L, M et N soient alignés est $\alpha\beta\gamma=1$. C'est aussi la condition pour que L', M', et N' soient alignés (même justification).

Solution 23 1) Montrons que l'intérieur de ABC est l'ensemble des barycentres de $\{(A,\alpha)$, (B,β), $(C,\gamma)\}$ lorsque $0<\alpha,\beta,\gamma$. Soit M dans l'intérieur de ABC. Alors la droite (AM) coupe le $[BC]$ en un point I dans l'intérieur relatif de $[BC]$. Donc il existe $0<\beta_0<1$ tel que I soit le barycentre de $\{(B,\beta_0),(C,1-\beta_0)\}$. De plus, M est dans l'intérieur relatif de $[AI]$. Il existe donc $0<\alpha<1$ tel que M soit le barycentre de $\{(A,\alpha),(I,1-\alpha)\}$. Finalement, M est le barycentre de

$$\{(A,\alpha),(B,\beta_0(1-\alpha)),(C,(1-\alpha)(1-\beta_0))\}.$$

Réciproquement, si M est le barycentre de $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ lorsque $0<\alpha,\beta,\gamma$, notons I le barycentre de $\{(B,\beta),(C,\gamma)\}$. Alors I est dans l'intérieur relatif de $[BC]$. Comme M est le barycentre de $\{(A,\alpha),(I,\beta+\gamma)\}$, M est dans l'intérieur de $[AI]$. Donc M est dans l'intérieur de ABC.

2) Comme ϕ est affine bijective, $\phi(A)$, $\phi(B)$ et $\phi(C)$ forment une famille affinement libre et sont donc les sommets d'un triangle (non plat). Le résultat est alors conséquence de 1) et du fait que les applications affines préservent les barycentres.

Solution 24 On introduit les coordonnées barycentriques des points P, Q et R dans le repère donné par les points A, B et C : il existe trois réels α, β, γ tels que P est le barycentre de (B,α), $(C,1-\alpha)$, Q est le barycentre de (A,β), $(C,1-\beta)$ et R est le barycentre de (A,γ), $(B,1-\gamma)$. Par la solution de l'exercice 22, on sait que le déterminant suivant est nul :

$$\Delta := \begin{vmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ \alpha & 0 & 1-\gamma \\ 1-\alpha & 1-\beta & 0 \end{vmatrix}.$$

Un calcul facile donne $\Delta = \alpha\gamma+\beta-\beta\gamma-\alpha\beta$. Ensuite, I est le barycentre de $(A,\beta+\gamma-1)$, $(B,1-\gamma)$, $(C,1-\beta)$, J est le barycentre de (A,γ), $(B,\alpha-\gamma)$ $(C,1-\alpha)$ et K est le barycentre de (A,β), (B,α), $(C,1-\alpha-\beta)$. Il reste à voir que

$$\Delta' := \begin{vmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ \alpha & 0 & 1-\gamma \\ 1-\alpha & 1-\beta & 0 \end{vmatrix}$$

est nul. On a (en faisant $L_3 \to (L_3+L_1+L_2)$ puis $L_2 \to L_2-\alpha L_3$ et enfin $L_1 \to L_1-\beta L_3$)

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \gamma-1 & \gamma-\beta & 0 \\ 1-\gamma-\alpha & -\gamma & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha\gamma+\beta-\beta\gamma-\alpha\beta = 0.$$

Solution 25 Introduisons les coordonnées barycentriques (α,β,γ) du point M dans le repère A,B,C. On a donc $\alpha+\beta+\gamma=1$ et on notera pour simplifier

$$M = \alpha A+\beta B+\gamma C.$$

Notons A_1 le symétrique de A par rapport à (BC). On a $A_1 = B+C-A$. Comme les applications affines préservent les barycentres, il vient $A' = \alpha A_1+\beta B+\gamma C$. Ainsi

$$A' = -\alpha A+(\beta+\alpha)B+(\gamma+\alpha)C = (\beta+\gamma-1)A+(1-\gamma)B+(1-\beta)C.$$

Un point $N = xA+yB+zC$ $(x+y+z=1)$ appartient à (AA') ssi il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $N = tA+(1-t)A'$. En remplaçant A' par son expression comme barycentre de A, B, C et en identifiant, il vient que N appartient à (AA') ssi il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} y = (1-t)(1-\gamma) \\ z = (1-t)(1-\beta) \end{cases}$$

(ici, on a aussi utilisé le fait que $x = 1-y-z$). Ce système a une solution en t si et seulement si $(1-\beta)y = (1-\gamma)z$.

On en déduit que les droites (AA'), (BB'), (CC') son concourantes ssi le système

$$\begin{cases} x+y+z = 1 \\ (1-\beta)y = (1-\gamma)z = (1-\alpha)x \end{cases}$$

a une solution (x,y,z). Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} x+y+z = 1 \\ (1-\alpha)x-(1-\beta)y = 0 \\ (1-\alpha)x-(1-\gamma)z = 0 \end{cases}$$

C'est un système qu'on notera (S) à 3 équations et 3 inconnues.

On exclut les cas où $A' = A$ ou $B' = B$ ou $C' = C$ ce qui correspond à

$$(\alpha, \beta, \gamma) \in \{(-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1)\}.$$

Alors (S) ne peut pas avoir une infinité de solutions (sinon les trois droites seraient confondues, et donc A, B et C seraient alignés, ce qui est absurde). Donc les trois droites sont concourantes ssi (S) a une unique solution, i.e. ssi son déterminant est non nul

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-\alpha & \beta - 1 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & \gamma - 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

En développant par rapport à une colonne, on tombe sur la condition

$$(1-\alpha)(1-\gamma) + (1-\beta)(1-\gamma) + (1-\alpha)(1-\gamma) \neq 0.$$

Il reste à voir que l'ensemble des points $M = \alpha A + \beta B + \gamma C$, $(\alpha + \beta + \gamma = 1)$ tels que $(1-\alpha)(1-\gamma) + (1-\beta)(1-\gamma) + (1-\alpha)(1-\gamma) = 0$ est précisément le cercle passant par A_1, B_1 et C_1. On observe d'abord qu'un point $M = xA_1 + yB_1 + zC_1$ $(x+y+z = 1)$ appartient à ce cercle ssi $xy+xz+yz = 0$. Pour le voir, il suffit d'écrire que

$$||\overrightarrow{OM}||^2 = ||x\overrightarrow{OA_1} + y\overrightarrow{OB_1} + z\overrightarrow{OC_1}||^2$$

(où O est le centre du cercle), de développer le membre de droite puis d'utiliser le fait que $(x + y + z)^2 = 1$. Dans l'égalité $M = xA_1 + yB_1 + zC_1$, on remplace alors A_1, B_1 et C_1 par leur expression barycentrique en fonction de A, B et C ce qui permet de déterminer x, y et z en fonction de α, β et γ. L'égalité $xy+xz+yz = 0$ apparaît alors équivalente à $(1-\alpha)(1-\gamma)+(1-\beta)(1-\gamma)+(1-\alpha)(1-\gamma) = 0$.

Solution 26 Le sous-espace engendré par A_1, A_2, A_3 est l'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) tels que M s'écrive comme barycentre des points A_1, A_2, et A_3 ce qui s'écrit en coordonnées :

$$\{(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3, \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \lambda_3\beta_3, \lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \lambda_3\gamma_3) : \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\}$$

$$= \{(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\alpha_3, \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2$$
$$+(1 - \lambda_1 - \lambda_2)\beta_3, \lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\gamma_3) : (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Attention : ceci n'est une *représentation paramétrique* que si A_1, A_2 et A_3 forment une famille affinement libre (il y a le mot *bijection* dans la définition de représentation paramétrique !). Si par exemple $A_3 \in (A_1A_2)$, alors la droite (A_1A_2) admet comme représentation paramétrique

$$\{(\lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2, \lambda\beta_1 + (1-\lambda)\beta_2, \lambda\gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Solution 27

1) Soit $(\mathcal{D})$ une droite du plan de direction la droite vectorielle D. Soit $t \neq 0$ de coordonnées (α, β) un vecteur directeur de D et $A \in \mathcal{D}$ de coordonnées (x_0, y_0). Alors $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) tels que $\overrightarrow{OM}$ est colinéaire à t. Une équation paramétrique de $\mathcal{D}$ est donc
$$\{(x_0 + \lambda\alpha, y_0 + \lambda\beta), \lambda \in \mathbb{R})\}.$$
On remarque que pour tout (x, y), il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y) = (x_0 + \lambda\alpha, y_0 + \lambda\beta)$ ssi
$$x - x_0 = \lambda\alpha \ , \ y - y_0 = \lambda\beta \Longleftrightarrow \beta(x - x_0) = \alpha(y - y_0).$$
On a donc l'équation cartésienne $\beta x - \alpha y - \beta x_0 + \alpha y_0 = 0$. L'équation de D est alors $\beta x - \alpha y = 0$.

2) Les droites affines sont parallèles ssi leurs directions sont confondues. Les équations des droites vectorielles sont $ax + by = 0$ et $a'x + b'y = 0$. Elles sont confondues ssi leurs vecteurs directeurs de coordonnées $(-b, a)$ et $(-b', a')$ sont colinéaires, d'où la condition sur le déterminant.

3) Les trois points (appelons-les M, M' et M'') sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{MM''}$ sont colinéaires. Ces deux vecteurs ont pour coordonnées $(x' - x, y' - y)$ et $(x'' - x, y'' - y)$. Le déterminant indiqué est égal au déterminant où on a retranché aux deux dernières colonnes la première, qui vaut (en développant par rapport la première ligne)

$$\begin{vmatrix} x' - x & x'' - x \\ y' - y & y'' - y \end{vmatrix}.$$

4) Les 3 droites sont parallèles ssi

$$rg \left\{ \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{array} \right\} = 1.$$

Elles sont concourantes ssi

$$\left\{ \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array} \right\} \in Im\, A \text{ où } A = \left\{ \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{array} \right\}.$$

Lorsque $rg\, A = 2$, cela est équivalent à $rg\, B = 2$ où B est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array} \right\}.$$

Lorsque $rg\, A = 1$, cela est équivalent à $rg\, B = 1$. En résumé, les 3 droites sont concourantes ou parallèles ssi $rg\, B \leq 2$ ssi $det\, B = 0$.

5) $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parrallèles ssi

$$rg \left\{ \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{array} \right\} = 1$$

et sécants si ce rang vaut 2. Enfin, $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, et $\mathcal{P}_3$ sont parrallèles ssi

$$rg \left\{ \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \right\} = 1.$$

Plus généralement, l'ensemble des points de coordonnées (x, y, z) qui sont dans l'intersection des trois plans vérifient

$$AX = D \text{ avec } A = \left\{ \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array} \right\},\ X = \left\{ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right\} \text{ et } D = \left\{ \begin{array}{c} -d_1 \\ -d_2 \\ -d_3 \end{array} \right\}.$$

S'il est non vide, l'espace des solutions est donc $dim\, Ker\, A = 3 - rg\, A$. On a déjà vu que les trois plans sont parallèles ssi $rg\, A = 1$. Et les trois plans sont alors confondus ssi $D \in Im\, A$ ce qui s'écrit aussi $rg\, B = 1$ avec

$$B = \left\{ \begin{array}{cccc} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array} \right\}.$$

Les 3 plans s'intersectent selon une droite ssi $rg\, A = 2 = rg\, B$. Ils s'intersectent selon un point ssi $rg\, A = 3 = rg\, B$.

Solution 28 Chacun des systèmes décrit une droite affine pourvu que les deux plans définis par chacune des deux équations s'intersectent, i.e.

$$rg \left\{ \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{array} \right\} = 2.$$

et de même pour le second système. Les deux droites obtenues sont alors parallèles (éventuellement confondues) ssi en mettant les 4 équations ensemble, on obtient un système de la forme $AX = D$ avec $dim\, Ker\, A = 1$ i.e. $rg\, A = 2$.

Solution 29 Notons (t_1, t_2, t_3) les coordonnées de t dans la base associée au repère donné. lors la translation de vecteur t s'écrit en coordonnées :

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + t_1, x_2 + t_2, x_3 + t_3).$$

Notons (a_1, a_2, a_3) les coordonnées de A dans le repère. Alors l'homothétie de centre A et de rapport λ s'écrit :

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (a_1 + \lambda(x_1 - a_1), a_2 + \lambda(x_2 - a_2), a_3 + \lambda(x_3 - a_3)).$$

Solution 30 On commence par étudier la partie linéaire, qui a pour valeurs propres 1 (espace propre : la droite $y = x$) et 2 (espace propre : la droite $y = -x$). On détermine l'ensemble des points fixes : c'est la droite $x - y + 2 = 0$. Ainsi, il s'agit d'une affinité de base la droite $x - y + 2 = 0$, parallèlement à la droite $y = -x$, et de rapport 2.

Chapitre 2

Notions de géométrie euclidienne

2.1 Premières définitions

Définition 11 *Un espace affine euclidien est un espace affine dont l'espace vectoriel associé est muni d'un produit scalaire (forme bilinéaire symétrique définie positive).*

Dans toute la suite, on note $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension $n \geq 1$ et E l'espace vectoriel associé, muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ce produit scalaire induit la norme euclidienne notée $|| \cdot ||$, qui permet de définir une distance sur $\mathcal{E}$ par

$$d(A, B) = ||\overrightarrow{AB}|| \ \ A, B \in \mathcal{E}.$$

Exercice 31 *Vérifier qu'il s'agit bien d'une distance, et étudier le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.*

Définition 12 *Une application affine $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une isométrie affine si ϕ préserve les distances, i.e.*

$$d(\phi(A), \phi(B)) = d(A, B) \ \ A, B \in \mathcal{E}.$$

Remarque 3 *En fait, on peut montrer (Exercice 43) que si $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une application qui préserve les distances, alors elle est affine.*

Groupe orthogonal On rappelle qu'une isométrie vectorielle est une application linéaire qui préserve la norme (ou de manière équivalente) le produit scalaire. On note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles, et $Isom(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries affines. L'inverse de $f \in O(E)$ est son adjoint f^*.

Exercice 32 *Montrer qu'une application affine est une isométrie affine si et seulement si sa partie linéaire est une isométrie vectorielle.*

Les isométries vectorielles étant bijectives, il en est de même des isométries affines. Comme $O(E)$ est un groupe, $Isom(\mathcal{E})$ est un groupe.

On note $SO(E)$ l'ensemble des éléments de $O(E)$ dont le déterminant vaut 1.

Pour $n \geq 1$, on note $O(n)$ l'ensemble des matrices A d'ordre n telles que $A^T A = Id$ (ou de manière équivalente $AA^T = Id$). Cette condition dit exactement que les vecteurs colonnes de A (ou de manière équivalente ses vecteurs lignes) forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Le déterminant de $A \in O(n)$ est égal à ± 1. On vérifie que $O(n)$ est un groupe.

On rappelle que $O(n)$ co"incide avec l'ensemble des matrices représentant un élément de $O(E)$ dans une base orthonormée de E. Se donner une base orthonormée $e = (e_1, \ldots, e_n)$ de E revient à se donner un isomorphisme de $O(n)$ sur $O(E)$ (qui à une matrice $A \in O(n)$ associe l'application linéaire dont la matrice dans la base e est A).

On note $SO(n)$ l'ensemble des éléments de $O(n)$ dont le déterminant est positif, c'est-à-dire vaut 1.

Orientation d'un espace vectoriel On rappelle la définition de l'orientation de E : on définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E en disant que deux bases e et f sont équivalentes si la matrice de passage de l'une à l'autre est de déterminant strictement positif.

Exercice 33 *1) Reformuler cette relation d'équivalence en termes d'action de groupe.*
2) Montrer qu'il existe exactement deux classes d'équivalence.

Preuve : 1) On fait agir l'ensemble des matrices de déterminant > 0 sur l'ensemble des bases de E. Deux matrices sont équivalentes au sens précédent si et seulement si elles appartiennent à la même orbite.

2) Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $f := (-e_1, \dots, e_n)$. Alors f est une base de E qui n'est pas équivalente à e. Si b est une base qui n'est pas équivalente à e, alors on vérifie qu'elle est équivalente à f (par composition des matrices de passage). Autrement dit, il y a deux orbites pour l'action de groupe précédente.

$\square$

Par définition, *orienter* E, c'est faire le choix d'une de ces deux classes d'équivalence. Alors une base sera dite *directe* ou *indirecte* selon qu'elle appartient à cette classe ou non.

Exercice 34 *1) Montrer que $SO(E)$ un sous-groupe distingué de $O(E)$.*
2) Si E est orienté, montrer que $SO(E)$ est l'ensemble des isométries qui envoie une base orthonormée directe sur une base orthonormée directe.

Preuve : 1) Le déterminant est un morphisme de groupe de $O(E)$ vers $\{\pm 1\}$ de noyau $SO(E)$. Donc $SO(E)$ est un sous-groupe distingué de $O(E)$.

2) Soient e une base orthonormée directe et $u \in SO(E)$. Alors l'image par u de e est une base (car $u \in GL(E)$), orthonormée (car $u \in O(E)$) directe (car $\det(u) > 0$).

Soient e, f deux bases orthonormées directes. La matrice de passage P de e à f est donc de déterminant > 0. De plus, ses vecteurs colonnes sont les coordonnées de f dans la base e. Ils constituent une base orthonormée, donc $P \in SO(n)$. Alors l'application qui a pour matrice P dans la base e est un élément de $SO(E)$ qui envoie e sur f.

$\square$

Définition 13 *On appelle déplacement une isométrie affine dont la partie linéaire appartient à $SO(E)$. Une isométrie affine qui n'est pas un déplacement est un antidéplacement.*

Forme réduite des isométries

Théorème 1 *Soit $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une isométrie affine. Alors il existe un unique couple $(t, \psi) \in E \times Isom(\mathcal{E})$ tel que ψ possède un point fixe et*

$$\phi(M) = \psi(M) + t = \psi(M + t).$$

Preuve : Procédons par analyse et synthèse. Si un tel couple (t, ψ) existe, alors la partie linéaire de ψ est égale à la partie linéaire f de ϕ (car la partie linéaire d'une composée est la composée des parties linéaires, et que la partie linéaire d'une translation est l'identité). Si O est un point fixe de ψ, on a $t = \overrightarrow{O\phi(O)}$. De plus, la commutativité implique

$$O + f(t) = \psi(O + t) = \psi(O) + t = O + t$$

donc $f(t) = t$. Soit $F := \text{Ker}\,(f - Id)$. Alors $t \in F$. Soit $\eta(M) := \overrightarrow{M\phi(M)}$. Alors $t \in \eta(\mathcal{E})$. L'ensemble $\eta(\mathcal{E})$ est un sous-espace affine de E de direction $G := \text{Im}\,(f - Id)$ car η est une application affine de partie linéaire $f - Id$. Or G et F sont supplémentaires orthogonaux dans E d'après le lemme suivant.

Lemme 2 *Si $f \in O(E)$, alors Ker $(f - Id)$ et Im $(f - Id)$ sont supplémentaires orthogonaux.*

Preuve : Pour tout endomorphisme u, on a $\text{Im}\,u = (\text{Ker}\,u^*)^\perp$. Appliqué ici à $u = f - Id$, on obtient

$$\text{Im}\,(f - Id) = (\text{Ker}\,(f^* - Id))^\perp = (\text{Ker}\,(f^{-1} - Id))^\perp = (\text{Ker}\,(f - Id))^\perp$$

(on a utilisé successivement que $f^* = f^{-1}$ car $f \in O(E)$ puis que $f^{-1}(x) = x$ si et seulement si $f(x) = x$).

□

On poursuit la preuve du théorème. Par l'exercice 12 (2 sous-espaces affines dont les directions engendrent E s'intersectent), $\eta(\mathcal{E}) \cap F$ est non vide. De plus, la direction de l'intersection est l'intersection des directions, c'est-à-dire $\{0\}$. Ainsi, $\eta(\mathcal{E}) \cap F$ est un singleton, qui est nécessairement t. D'où l'unicité de t puis de $\psi = \phi - t$

Réciproquement, soit t le point d'intersection de F et $\eta(\mathcal{E})$ et $\psi := \phi - t$. On a

$$\phi(M + t) = \phi(M) + f(t) = \phi(M) + t$$

(car $t \in F$) donc

$$\psi(M + t) = \psi(M) + t.$$

Montrons que ψ a un point fixe. Il existe $O \in \mathcal{E}$ tel que $t = \overrightarrow{O\phi(O)}$. Alors

$$\psi(O) = \phi(O) - t = O.$$

D'où l'existence du couple (t, ψ).

□

Remarque 4 *F est la direction du sous-espace affine des points fixes de ψ. Si $F = 0$, alors $t = 0$ et $\psi = \phi$ ont un unique point fixe.*

Générateurs de $O(E)$ et $Isom(\mathcal{E})$

Définition 14 *1) Une symétrie orthogonale est une isométrie euclidienne involutive qui n'est pas l'identité.*

2) Une symétrie affine orthogonale est une isométrie affine qui a (au moins) un point fixe et dont la partie linéaire est une symétrie orthogonale.

Soit f une symétrie orthogonale. Il existe un sous-espace vectoriel F (qui est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 si 1 est valeur propre de f et $\{0\}$ sinon) tel que f s'écrive

$$Id_F - Id_{F^\perp}.$$

Lorsque F est un hyperplan, on parle de réflexion (euclidienne).

Soit ϕ une symétrie affine orthogonale et $\mathcal{F}$ le sous-espace affine de ses points fixes. La partie linéaire f de ϕ s'écrit $Id_F - Id_{F^\perp}$, où $F := Ker(f - Id)$ est la direction de $\mathcal{F}$. On dit que ϕ est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{F}$. Lorsque F est de dimension $n - 1$, on parle de réflexion (affine).

Théorème 2 *Toute isométrie euclidienne est le produit d'au plus n réflexions (linéaires).*

Preuve : On procède par récurrence sur n. Si $n = 1$, $O(E) = \{\pm Id\}$ et le résultat est vrai (par convention, le produit de 0 réflexion est l'identité). Supposons le résultat vrai jusqu'à $n-1$ et montrons-le pour un espace de dimension n. Soit u une isométrie euclidienne. Soit $x_0 \in E \setminus \{0\}$ et supposons que $u(x_0) = x_0$. En particulier, u stabilise la droite $\mathbb{R}x_0$ et donc aussi son orthogonal, qu'on note F.

On applique l'hypothèse de récurrence à $v := u_{|F}$: il existe des réflexions de F $\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_l$ avec $l \leq n-1$, et

$$v = \tilde{s}_1 \circ \ldots \circ \tilde{s}_l.$$

On prolonge $\tilde{s}_i$ en une réflexion de E de la manière suivante. Considérons par exemple $\tilde{s}_1$. On a $\tilde{s}_1 = Id_{F_1} - Id_{G_1}$ où F_1 est un hyperplan de F et G_1 son supplémentaire orthogonal dans F. On pose alors

$$s_1 := Id_{F_1} + Id_{\mathbb{R}x_0} - Id_{G_1}.$$

Alors s_1 est une réflexion autour de $F_1 \oplus \mathbb{R}x_0$, co"incide avec $\tilde{s}_1$ sur F et vaut l'identité sur $\mathbb{R}x_0$. On procède ainsi pour tous les $\tilde{s}_i$. L'application $s_1 \circ \ldots \circ s_l$ co"incide avec u sur F et vaut l'identité sur $\mathbb{R}x_0$. Ainsi sur F et sur $\mathbb{R}x_0$ donc sur E on a l'identité

$$u = s_1 \circ \cdots \circ s_l,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Supposons maintenant que $u(x_0) \neq x_0$. Soit s la réflexion qui envoie $u(x_0)$ sur x_0 (i.e. la réflexion par rapport à l'hyperplan $(\mathbb{R}(u(x_0) - x_0))^{\perp}$). Alors $s \circ u(x_0) = x_0$ et on est ramené au cas précédent : $s \circ u$ s'écrit $s_1 \circ \cdots s_l$, $l \leq n-1$, d'où

$$u = s \circ s_1 \circ \cdots \circ s_l.$$

□

Théorème 3 *Toute isométrie affine est le produit d'au plus* $n+1$ *réflexions (affines).*

Preuve : Soit ϕ une isométrie affine. Supposons d'abord que ϕ a un point fixe O. Par le Théorème 2, la partie linéaire f de ϕ est un produit de réflexions linéaires : $f = s_1 \circ \ldots \circ s_k$ avec $k \leq n$. Notons $\sigma_i(M) = O + s_i(\overrightarrow{OM})$. Alors σ_i est une réflexion affine et

$$\phi = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_k$$

(car l'égalité est vraie en O et les parties linéaires sont égales).

Supposons maintenant que ϕ n'a pas de point fixe. Soit $A \in \mathcal{E}$ et σ une (en fait la) réflexion qui envoie $\phi(A)$ sur A (pour construire σ, soit F l'orthogonal de $\mathbb{R}\overrightarrow{A\phi(A)}$ dans E et I le milieu du segment $[A\phi(A)]$. Soit s la réflexion autour de F. Alors $\sigma(M) := I + s(\overrightarrow{IM})$ convient). Ainsi A est un point fixe de $\sigma \circ \phi$ et on est ramené au cas précédent.

□

2.2 Angle

Au sujet de la leçon *Applications des nombres complexes à la géométrie*, le rapport du jury 2008 s'exclame : "C'est le moment de mettre à plat la notion d'angle." En 2007, pour la leçon *Groupe des nombres complexes de module* 1, il avait déjà précisé :"Il ya trois réalisations de ce groupe, $SO(2), U(1)$ et $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Chacune est reliée à un aspect géométrique, algébrique, arithmétique. C'est l'occasion de s'interroger sur l'exponentielle complexe, ce qu'est le nombre π, la mesure des angles. Quelle place trouve la suite exacte

$$2\pi\mathbb{Z} \hookrightarrow \underbrace{\mathbb{R} \to U(1)}_{t \mapsto e^{it}} \ ?$$

Y-a-t'il une section continue ?" Et en 2005, "Il semble opportun de soigner la logique de présentation (par exemple on peut définir l'exponentielle complexe puis les fonctions cosinus et sinus)."

2.2.1 Un détour par les nombres complexes

On définit l'exponentielle complexe par la série entière

$$exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!},$$

dont le rayon de convergence est infini. La fonction e^z est donc holomorphe sur $\mathbb{C}$ (et de dérivée elle-même). Par le théorème de Fubini (avec la mesure de dénombrement), on vérifie que

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'}$$

(et donc l'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$). Comme la conjugaison complexe est continue (pour la topologie naturelle de $\mathbb{C}$), on a

$$\overline{e^z} = e^{\bar{z}}.$$

On en déduit pour tout réel θ,

$$|e^{i\theta}| = e^{i\theta}\overline{e^{i\theta}} = e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i\theta - i\theta} = e^0 = 1.$$

De plus, en notant $U(1)$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, si $e^z \in U(1)$, alors montrons que z est un imaginaire pur : on a facilement

$$1 = |e^z| = e^z e^{\bar{z}} = e^{2\mathrm{Re}\,(z)} = (e^{\mathrm{Re}\,z})^2.$$

On est alors ramené à l'étude de l'exponentielle réelle : $e^0 = 1$ et $e^x \neq 0$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires $e^x > 0$, donc $x \mapsto e^x$ est strictement croissante. Donc la seule valeur x telle que $e^x = 1$ est $x = 0$, ce qui permet de conclure.

Proposition 8 *L'application $f : \theta \in \mathbb{R} \mapsto e^{i\theta} \in U(1)$ est un morphisme surjectif, non injectif, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$, où 2π est le plus petit réel strictement positif a tel que $e^{ia} = 1$.*

Preuve : Par restriction, on sait que f est un morphisme C^∞ et en particulier continu. Soient $z \in U(1) \setminus \{-1\}$ et

$$g(t) := 1 - t + tz\ ,\ h(t) = g(t)\exp\left(-\int_0^t \frac{g'(u)}{g(u)}\,du\right).$$

On vérifie que $1 - t + tz \neq 0$ si $t \in [0,1]$, $z \in U(1) \setminus \{-1\}$. Alors $h(0) = 1$, $h'(t) = 0$. Donc $h(t) = 1$ et en particulier

$$z = g(1) = exp(w) \text{ avec } w = \int_0^1 \frac{g'(u)}{g(u)}\,du.$$

Comme $|z| = 1$, w est un imaginaire pur. Ainsi, $U(1)\setminus\{-1\}$ est dans l'image de f. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $e^{i\theta} = i$. Alors $e^{4i\theta} = i^4 = 1 = e^{i0}$. Donc f n'est pas injective.

Le noyau de f est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ (car f est un morphisme), fermé (car f est continu), non réduit à 0 car f n'est pas injective, et distinct de $\mathbb{R}$ (car f n'est pas constante). Donc (structure des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$) il est de la forme $2\pi\mathbb{Z}$ pour un certain $\pi > 0$.

On a $e^{2i\pi} = 1$, donc $(e^{i\pi})^2 = 1$, donc (par définition de π, $e^{i\pi} \neq 1$) $e^{i\pi} = -1$. Donc f est surjective. $\square$

L'application f passe donc au quotient en un isomorphisme $\hat{f}$ de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sur U. Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on appelle $\hat{f}^{-1}(z/|z|)$ l'argument de z, et on le note $Arg(z)$.

On pose $\cos : \theta \in \mathbb{R} \mapsto Re(e^{i\theta})$ et $\sin : \theta \in \mathbb{R} \mapsto Im(e^{i\theta})$, qui sont des fonctions C^∞ et 2π périodiques. On a le fait suivant

Proposition 9 *Soit $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$. Alors il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $\cos\theta = x$ et $\sin\theta = y$.*

Preuve : Il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $e^{i\theta} = x + iy$.

$\square$

A partir de ces définitions et premières propriétés, on peut établir le tableau de variations des fonctions $\cos, \sin$ sans difficulté.

2.2.2 Angle d'une rotation euclidienne

Dans ce paragraphe, on donne la définition de *matrice de rotation d'angle θ* où $\theta \in \mathbb{R}$ et de *mesure de l'angle de la rotation u*, où $u \in SO(E)$.

Etude de $SO(2)$ Soit $A = (a_{ij}) \in O(2)$. Alors les vecteurs colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$:

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1\ ,\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1\ ,\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0.$$

L'orthogonal dans $\mathbb{R}^2$ de la droite vectorielle de direction (a_{11}, a_{21}) est de dimension 1. Donc il existe exactement deux vecteurs unitaires orthogonaux à (a_{11}, a_{21}), à savoir $(a_{21}, -a_{11})$ et son opposé.

Par ailleurs, il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que

$$a_{11} = \cos\theta\ ,\ a_{21} = \sin\theta.$$

Donc A est de la forme

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \text{ ou } R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Définition 15 *On appelle $R(\theta)$ la matrice de rotation d'angle θ.*

On a $\det S(\theta) = -1$ et $\det R(\theta) = 1$.

Comme $S(\theta)^2 = Id$, $S(\theta)$ est une réflexion, dont on peut déterminer l'axe en calculant le sous-espace propre associé à la valeur propre 1.

La matrice $R(\theta)$ appartient à $SO(2)$ et toutes les matrices de $SO(2)$ sont de cette forme. De plus, le nombre $\cos\theta$ est invariant par conjugaison par des éléments de $O(2)$ (il suffit de calculer la trace, qui est un invariant) tandis que la classe de θ dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est invariante par conjugaison par des éléments de $SO(2)$. On peut le voir par exemple en notant que

$$R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta')\ , \tag{2.1}$$

$$R(\theta)^{-1} = R(-\theta) \text{ et donc } R(\theta)R(\theta_0)R(\theta)^{-1} = R(\theta_0).$$

En revanche, la classe de θ dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ N' est PAS invariante par conjugaison par des éléments de $O(2)$. En effet,

$$S(\phi)R(\theta)S(\phi) = R(-\theta). \tag{2.2}$$

La relation (2.1) montre que $SO(2)$ est commutatif.

Exercice 35 *Expliciter un isomorphisme entre $SO(2)$ et $U(1)$.*

Preuve : L'application $\theta \in \mathbb{R} \mapsto R(\theta) \in SO(2)$ est un morphisme (par (2.1)), surjectif et de noyau $2\pi\mathbb{Z}$, d'où un isomorphisme entre $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $SO(2)$. Par ailleurs, la proposition 8 donne un isomorphisme de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sur $U(1)$, ce qui permet de conclure.

$\square$

Etude de SO(E) On suppose que l'espace euclidien E est de dimension 2.

Une rotation de E est par définition un élément de $SO(E)$.

On fixe une base orthonormée de E. On obtient ainsi un isomorphisme de groupe entre $O(E)$ et $O(2)$. La matrice de $u \in SO(E)$ est de la forme $R(\theta)$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. Le nombre $\cos\theta$ ne dépend pas de la base orthonormée choisie. En effet, la trace de la matrice de u ne dépend pas du choix de la base où on écrit cette matrice. Or $\cos\theta$ est la moitié de la trace et ne dépend donc pas non plus du choix de la base. Ce n'est pas le cas de $\sin\theta$ à cause de (2.2).

Mais, si l'espace euclidien E est orienté, la matrice de u dans n'importe quelle base orthonormée *directe* est la même et égale à un certain $R(\theta)$ (comme on se restreint à des bases directes, les matrices de passage sont seulement les éléments de $SO(2)$).

Définition 16 *Dans un espace euclidien orienté, la mesure de l'angle de la rotation u est l'élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ dont tout représentant $\theta \in \mathbb{R}$ est tel que $R(\theta)$ est la matrice représentant u dans n'importe quelle base orthonormée directe de E.*

2.2.3 Angles dans un plan euclidien

Dans ce paragraphe, on définit *l'angle orienté de deux vecteurs non nuls* et *l'angle orienté de deux droites vectorielles.*

Lemme 3 *Soient x, y deux vecteurs unitaires de E. Il existe une unique rotation qui envoie x sur y.*

Preuve : On complète x en une base orthonormée (x, x') et on décompose y sur cette base : $y = ax+bx'$. On a $a^2 + b^2 = 1$. Alors l'unique rotation qui envoie x sur y est celle dont la matrice dans la base (x, x') est $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

□

On définit une relation d'équivalence sur les couples de vecteurs unitaires par $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$ si et seulement s'il existe une rotation f telle que $f(x) = x'$ et $f(y) = y'$.

Définition 17 *La classe d'équivalence de (x, y) est appelée l'angle orienté de (x, y). Plus généralement, l'angle orienté de deux vecteurs non nuls est l'angle orienté des deux vecteurs unitaires associés.*

De manière équivalente, on peut définir l'angle orienté de (x, y) comme l'orbite du couple de vecteurs (x, y) sous l'action naturelle de $SO(E)$. On définit *l'angle plat* comme la classe d'équivalence du couple $(-x, x)$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

Proposition 10 *Soit $\hat{\mathcal{A}}$ l'ensemble des couples de vecteurs unitaires et $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles orientés. Soit $\hat{\Phi} : \hat{\mathcal{A}} \to SO(E)$ l'application qui à un couple de vecteurs unitaires associe la rotation envoyant le premier sur le second vecteur.*

1) *L'application $\hat{\Phi}$ passe au quotient en une bijection $\Phi : \mathcal{A} \to SO(E)$. Cette bijection induit une structure de groupe sur $\mathcal{A}$ de sorte que Φ est un isomorphisme. L'image de l'angle plat par Φ est $-Id$.*
2) *On a la relation de Chasles $(x, y) + (y, z) = (x, z)$.*
3) *Si s est une réflexion, l'angle $(s(x), s(y))$ est égal à l'angle (y, x).*

Preuve : 1) $\hat{\Phi}$ est surjective. Donc il suffit de montrer que deux angles orientés (x, y) et (x', y') sont égaux si et seulement si la rotation f qui envoie x sur y est égale à la rotation g qui envoie x' sur y'. Soit r la rotation qui envoie x sur x' et r' celle qui envoie y sur y'. Les angles (x, y) et (x', y') sont égaux si et seulement si $r = r'$. On a

$$r' \circ f(x) = y' = g \circ r(x)$$

donc $r' \circ f = g \circ r = r \circ g$. Donc $r = r'$ si et seulement si $f = g$. Donc $\hat{\Phi}$ passe au quotient en une bijection Φ qui permet de transporter la structure de groupe de $SO(E)$ vers $\mathcal{A}$. On pose ainsi

$$(x, y) + (x', y') := \Phi^{-1}(\Phi(x, y) \circ \Phi(x', y')).$$

On en déduit

$$-(x, y) = (y, x) = \Phi^{-1}(\Phi(x, y)^{-1}).$$

L'image par Φ de l'angle plat est $-Id$.

2) $(x, y) + (y, z) = \Phi^{-1}(\Phi(x, y) \circ \Phi(y, z)) = \Phi^{-1}(\Phi(x, z)) = (x, z)$.

3) Soit σ la réflexion qui envoie x sur y. Alors la rotation $r := \sigma \circ s$ envoie $s(x)$ sur y et $s(y)$ sur x donc $(s(x), s(y)) = (y, x)$.

□

Une demi-droite est un ensemble de vecteurs de la forme $\mathbb{R}^+ t$, où $t \in E \setminus \{0\}$. Si $\mathbb{R}^+ t_1$ et $\mathbb{R}^+ t_2$ sont deux demi-droites, leur angle est par définition l'angle (t_1, t_2). On vérifie que si $t'_1 = \lambda_1 t_1$, $t'_2 = \lambda_2 t_2$ avec $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, alors on a l'égalité des angles

$$(t'_1, t'_2) = (\frac{t'_1}{||t'_1||}, \frac{t'_2}{||t'_2||}) = (\frac{t_1}{||t_1||}, \frac{t_2}{||t_2||}) = (t_1, t_2)$$

ce qui montre que la définition est consistante.

Définition 18 *Soit D la droite dirigée par le vecteur u et D' la droite dirigée par le vecteur u'. On définit l'angle orienté (D, D') de D et D' comme la classe d'équivalence du couple (u, u') sous la relation d'équivalence $(u, u') \sim (v, v')$ si et seulement si les angles (u, u') et (v, v') sont égaux ou les angles (u, u') et $(-v, v')$ sont égaux.*

Alternativement, on peut définir l'angle orienté de deux droites D et D' comme l'orbite du couple (D, D') sous l'action (naturelle) du groupe $SO(E)/\{\pm Id\}$. Comme pour les angles orientés de vecteurs, on peut définir la somme de deux angles orientés de droites en montrant que l'ensemble des angles orientés de droites est en bijection avec le groupe commutatif $SO(E)/\{\pm Id\}$: si D, D' sont deux droites vectorielles, il existe exactement deux rotations $r, -r$ qui envoie D sur D'.

Exercice 36 *1) Soient u, u', v, v' quatre vecteurs unitaires. Alors l'égalité d'angles orientés de vecteurs $2(u, u') = 2(v, v')$ est équivalente à*

$$(u, u') = (v, v') \text{ ou } (u, u') = (-v, v').$$

2) En déduire que si D, D', Δ, Δ' ont pour vecteur directeur u, u', v, v', alors $2(u, u') = 2(v, v')$ si et seulement si les angles orientés de droite (D, D') et (Δ, Δ') sont égaux.

Preuve : 1) Soit r la rotation telle que $r(u) = u'$ et s celle telle que $s(v) = v'$. Alors

$$2(u, u') = 2(v, v') \iff r^2 = s^s \iff r = \pm s$$

$$\iff (u, u') = (v, v') \text{ ou } (u, u') = (-v, v').$$

2) Il suffit de revenir à la définition de l'angle orienté de deux droites.

□

Dans la suite, étant données deux droites D, D', on identifiera l'angle $2(D, D')$ à un angle orienté de vecteurs unitaires.

2.2.4 Mesures d'angles

Si on suppose de plus E orienté, la mesure de l'angle d'une rotation est bien définie comme un élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Définition 19 *Etant donnés deux vecteurs non nuls $x, y \in E$, la mesure de l'angle orienté (x, y) est la mesure de l'angle de la rotation qui envoie $x/||x||$ sur $y/||y||$.*

Remarque 5 *L'application qui à un angle orienté de vecteurs associe sa mesure est un isomorphisme (qui dépend de l'orientation choisie).*

Preuve : D'une part, $SO(E)$ est isomorphe à l'ensemble des angles orientés de vecteurs (voir Proposition 10). D'autre part, après choix d'une base orthonormée directe, $SO(E)$ est isomorphe à $SO(2)$, lui-même isomorphe à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (voir l'exercice 35). Ainsi, l'ensemble des angles orientés est isomorphe à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Ce isomorphisme donne la mesure le l'angle de la rotation $u \in SO(E)$.

□

Retenir que pour définir la notion d'angle orienté, on n'a pas besoin d'orienter E, alors que pour définir la *mesure* d'un angle orienté, on a besoin d'orienter E.

Pour mesurer l'angle orienté de deux droites, on prend la mesure de l'angle orienté de deux vecteurs directeurs dans $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$.

2.2.5 Angles non orientés ou géométriques

Ici, E est un espace euclidien qui n'est plus nécessairement orienté.

Définition 20 *L'angle non orienté d'un couple de deux vecteurs unitaires, de deux droites ou de deux demi-droites est défini comme l'orbite du couple sous l'action naturelle de $O(E)$. L'angle non orienté de deux vecteurs non nuls est l'angle non orienté des vecteurs unitaires correspondants.*

Heuristiquement, cela revient à confondre les angles orientés (x, y) et (y, x). Par définition, les isométries conservent les angles non orientés (comme les rotations préservaient les angles orientés).

Définition 21 *La mesure de l'angle non orienté entre deux vecteurs non nuls x et y est*

$$\arccos\left(\frac{\langle x, y\rangle}{||x||||y||}\right) \in [0, \pi].$$

La mesure de l'angle non orienté entre deux droites dirigées par les vecteurs x, y est

$$\arccos\left(\frac{|\langle x, y\rangle|}{||x||||y||}\right) \in [0, \pi/2].$$

2.2.6 Angles dans le plan affine euclidien

Dans le cadre d'un espace affine euclidien de dimension 2, on définit les notions d'angles de deux demi-droites de même sommet, d'angles de deux droites sécantes comme l'angle des demi-droites ou droites vectorielles qui les dirigent.

2.3 Isométries en dimension 2

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 2, d'espace directeur E.

Définition 22 *1 Une rotation affine ρ de centre O est une isométrie affine qui fixe O et dont la partie linéaire r est une rotation vectorielle. Lorsque E est orienté, on définit l'angle de ρ comme étant l'angle de r.*

2) Une symétrie glissée est le produit commutatif d'une symétrie affine orthogonale σ et d'une translation parallèle à l'axe de σ.

Proposition 11 *L'ensemble des déplacements est constitué des rotations et des translations. L'ensemble des antidéplacements est constitué des symétries glissées.*

Preuve : On applique le théorème 1 à ϕ : il existe une unique isométrie ψ ayant un point fixe et un unique vecteur t tels que

$$\phi(\cdot) = \psi(\cdot) + t = \psi(\cdot + t).$$

De plus, $t \in F := Ker(f - Id)$ où f est la partie linéaire de ϕ et ψ.

Si ϕ est un déplacement, alors f est une rotation vectorielle. Si $f = Id$, alors ϕ est la translation de vecteur t. Sinon, $F = 0$ et $\phi = \psi$ est une rotation.

Si ϕ est un antidéplacement, f est une réflexion et

$$\phi(\cdot) = s(\cdot) + t = s(\cdot + t).$$

Quelques groupes d'isométrie Le problème général est le suivant : étant donnée une partie $\mathcal{A}$ d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$, quelles sont les isométries qui préservent $\mathcal{A}$: $\phi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$?

Lemme 4 *1) L'ensemble des isométries G qui préservent $\mathcal{A}$ est un sous-groupe des isométries de $\mathcal{E}$.*

2) Si $\mathcal{A}$ est bornée (i.e. $\sup\{||\overrightarrow{MN}||, M, N \in \mathcal{A}\} < \infty$), alors G ne contient pas de translation.

3) Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ est un sous-ensemble fini stable par G, alors l'isobarycentre des points de $\mathcal{B}$ est fixé par tous les éléments de G.

4) L'ensemble des points extrémaux est stable par tous les éléments de G.

Preuve : On montre seulement le point 4. On rappelle que $A \in \mathcal{A}$ est un point extrémal de $\mathcal{A}$ si pour tout $B, C \in \mathcal{A}$, pour tout $\theta \in]0, 1[$,

$$\overrightarrow{0} = \theta\overrightarrow{AB} + (1 - \theta)\overrightarrow{AC} \Longrightarrow A = B = C.$$

Autrement dit, A n'appartient pas à l'intérieur d'un segment joignant deux points de $\mathcal{A}$.

Soit donc A un point extrémal de $\mathcal{A}$ et ϕ une isométrie qui préserve $\mathcal{A}$. On note f la partie linéaire de ϕ. Montrons que $\phi(A)$ est extrémal : soient $B, C \in \mathcal{A}$ et $\theta \in]0, 1[$ tels que $\overrightarrow{0} = \theta\overrightarrow{\phi(A)B} + (1 - \theta)\overrightarrow{\phi(A)C}$. Il existe $B', C' \in \mathcal{A}$ tels que $\phi(B') = B$ et $\phi(C') = C$. Alors

$$\overrightarrow{0} = \theta\overrightarrow{\phi(A)\phi(B')} + (1 - \theta)\overrightarrow{\phi(A)\phi(C')} = f(\theta\overrightarrow{AB'} + (1 - \theta)\overrightarrow{AC'})$$

donc $\theta\overrightarrow{AB'} + (1 - \theta)\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{0}$ (car f est une isométrie) ce qui implique $A = B' = C'$ puisque A est extrémal. Donc $\phi(A) = B = C$, ce qui montre que $\phi(A)$ est extrémal.

□

Le lemme précédent est valable en toute dimension. On se restreint désormais à la dimension 2. En identifiant le plan affine euclidien à $\mathbb{C}$, on considère l'enveloppe convexe $\mathcal{P}_N$ des points $e^{2i\pi a/N}$ pour $N \geq 2, a = 0, \ldots, N - 1$. On cherche le groupe des isométries préservant $\mathcal{P}_N$.

Exercice 37 *Montrer que c'est aussi le groupe préservant* $\{e^{2i\pi a/N}, a = 0, .., N-1\}$.

Preuve : Les $e^{2i\pi a/N}$ sont extrémaux donc une isométrie qui préserve $\mathcal{P}_N$ préserve aussi $\{e^{2i\pi a/N}, a = 0, .., N-1\}$. Réciproquement, si une isométrie préserve une partie de $\mathcal{E}$, elle préserve aussi l'enveloppe convexe de cette partie de $\mathcal{E}$.

$\square$

Notons G le groupe des isométries de $\mathcal{P}_N$ et D le sous-groupe des déplacements (D est donc constitué de rotations affines). Alors G et D préservent l'isobarycentre de $\{e^{2i\pi a/N} : a = 0, \ldots, N-1\}$: O. Pour tout $\rho \in D$, $\rho(1)$ est un point extrémal. On peut donc définir l'application

$$\Phi : \rho \in D \mapsto a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$$

définie par $\rho(1) = e^{2i\pi a/N}$. La seule rotation affine de centre O qui envoie le point d'affixe 1 sur le point d'affixe $e^{2i\pi a/N}$ est la rotation d'angle $2i\pi a/N$ (pour l'orientation habituelle de $\mathbb{R}^2$). Alors ρ admet comme écriture complexe $z \mapsto e^{2i\pi a/N} z$, d'où l'on déduit que Φ est un morphisme, et Φ est bijectif. Donc D est isomorphe à $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. En particulier, D est cyclique, engendré par la rotation $\rho_0 : z \mapsto e^{2i\pi/N} z$.

Pour déterminer G, on introduit la réflexions σ_0 par rapport à l'axe des abscisses. En écriture complexe, on a $\sigma_0 : z \mapsto \overline{z}$. Alors σ_0 préserve $\mathcal{P}_N$, i.e. $\sigma_0 \in G$. Donc $D\sigma_0 \subset G$. De plus, $D\sigma_0$ est en bijection avec D donc de cardinal N.

Le déterminant définit un morphisme surjectif de G sur $\{\pm 1\}$ (car $\det \sigma_0 = -1$) de noyau D. Donc D est d'indice 2 dans G et en particulier le cardinal de G est $2N$. Mais on a déjà énuméré $2N$ éléments dans G. Ainsi, $G = D \cup D\sigma_0$, et G est le groupe engendré par la rotation ρ_0 et la réflexion σ_0. Bien sûr, $D \cap D\sigma_0 = \{Id\}$. Donc tout élément de G s'écrit de manière unique $\rho_0^k \tau$ avec $k \in \{0, \ldots, N-1\}$, $\tau \in \{Id, \sigma_0\}$.

Ceci nous permet d'affirmer que la fonction suivante $\Psi : G \to \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est bien définie et bijective :

$$\Psi : \rho_0^k \tau \in G \mapsto \begin{cases} (k, 0) \text{ si } \tau = Id, \\ (k, 1) \text{ si } \tau = \sigma_0. \end{cases}$$

On a aussi la relation

$$\sigma_0 \rho_0 \sigma_0 = \rho_0^{-1}. \tag{2.3}$$

Ceci va nous permettre de montrer que G est isomorphe au groupe diédral dont on commence par rappeler la définition :

Définition 23 *Pour* $n \geq 2$, *le groupe diédral* D_{2n} *est le produit* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *muni de la loi de groupe*

$$(x, \alpha).(x', \alpha') = (x + \epsilon_\alpha x', \alpha + \alpha')$$

avec

$$\epsilon_\alpha = \begin{cases} 1 \text{ si } \alpha = 0 \\ -1 \text{ si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Exercice 38 *Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de groupe.*

Preuve :
- En utilisant que $\epsilon_\alpha \epsilon_{\alpha'} = \epsilon_{\alpha+\alpha'}$, on obtient que la loi est associative,
- le neutre est $(0, 0)$,
- l'inverse de (x, α) est $(-x, \alpha)$ si $\alpha = 0$ et (x, α) si $\alpha = 1$.

$\square$

On remarque que D_{2n} est engendré par deux éléments $(1,0)$ et $(0,1)$. De plus, $(0,1)$ est d'ordre 2. Enfin, on a la relation

$$(0,1).(1,0).(0,1) = (-1,0). \tag{2.4}$$

Etablissons à présent que G est isomorphe au groupe diédral d'ordre $2N$, en montrant que Ψ est un morphisme. Pour cela, observons que pour tout $k, k' \in \{0,\dots,N-1\}$, $\tau,\tau' \in \{Id,\sigma\}$,

$$\rho_0^k \tau \rho^{k'} \tau' = \begin{cases} \rho_0^{k+k'}\tau' \text{ si } \tau = Id \\ \rho_0^{k-k'}\tau' \text{ si } \tau = \sigma_0 \end{cases}$$

La deuxième ligne résulte de (2.3). En utilisant (2.4), on a les formules correspondantes dans D_{2N}, en remplaçant ρ_0 par $(1,0)$ et σ_0 par $(0,1)$. Ceci permet de conclure que Ψ est un morphisme.

Dans son rapport de 2005, le jury signale : "Un minimum est exigible sur les groupes diédraux (description, présentation en terme de générateurs et relations)."

Exercice 39 *Déterminer l'ensemble des sous-groupes finis de l'ensemble des isométries du plan affine euclidien.*

Remarque 6 *Je n'ai pas écrit les mots "polygone régulier" parce que je n'avais pas envie de les définir. Une définition un peu facile (et néanmoins recommandable à l'oral) consisterait à dire qu'un polygone régulier est une partie du plan semblable à $\mathcal{P}_N$ (c'est-à-dire qu'il existe une similitude entre $\mathcal{P}_N$ et cette partie). Une définition plus ambitieuse consisterait à dire que c'est un polygone (mais qu'est-ce qu'un polygone ?) convexe dont les côtés (mais qu'est-ce qu'un côté ?) sont isométriques et les angles au sommet (mais qu'est-ce qu'un angle au sommet ?) sont égaux...*

Similitudes

Définition 24 *Une application f d'un espace vectoriel euclidien dans lui-même est une similitude vectorielle s'il existe $k > 0$, appelé rapport de la similitude, tel que*

$$||f(x)|| = k||x||.$$

Proposition 12 *Soit f une similitude vectorielle de rapport k. Alors il existe une unique isométrie vectorielle u telle que $f = h_k \circ u$, où h_k est l'homothétie vectorielle de rapport k.*

Preuve : $u := h_{1/k} \circ f$.

$\square$

On parle de similitude directe ou indirecte selon que son déterminant est positif ou négatif.

Définition 25 *Une similitude affine est une application affine dont la partie linéaire est une similitude vectorielle.*

Si ϕ est une similitude affine de rapport k, alors pour tous points M, N d'image M', N' on a $d(M',N') = kd(M,N)$. La réciproque est vraie (voir exercice 53).

Proposition 13 *Une similitude affine qui n'est pas une isométrie a un unique point invariant, appelé centre de la similitude.*

Preuve : Comme la partie linéaire est une similitude vectorielle qui n'est pas une isométrie, elle n'a pas 1 comme valeur propre, donc la similitude affine a un unique point fixe.

$\square$

Tout ce qui précède est valable en toute dimension. Pour la suite de ce paragraphe, on se restreint à la dimension 2.

Proposition 14 *1) Toute similitude vectorielle directe est composée d'une homothétie de rapport positif et d'une rotation vectorielle. Toute similitude vectorielle indirecte est composée d'une homothétie de rapport positif et d'une réflexion.*

2) Une similitude affine directe qui n'est pas une isométrie est la composée d'une homothétie de centre O et de rapport k et d'une rotation de centre O.

3) Une similitude affine directe préserve les angles orientés.

Preuve : 1) est une conséquence de la Proposition 12. Pour 2), on sait par la Proposition 13 qu'il existe un unique point invariant et on est ainsi ramené au cas vectoriel 1). 3) découle de 2).

$\square$

Proposition 15 *Etant donnés deux couples de points (A, B) et (A', B'), il existe une unique similitude directe qui envoie A sur A' et B sur B'*

Preuve : Soit $k := \dfrac{||\overrightarrow{A'B'}||}{||\overrightarrow{AB}||}$. Alors l'unique similitude vectorielle envoyant $\overrightarrow{AB}$ sur $\overrightarrow{A'B'}$ est $h_k \circ u$, où u est la rotation envoyant $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{||\overrightarrow{AB}||}$ sur $\dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{||\overrightarrow{A'B'}||}$. D'où l'unicité de la partie linéaire de la similitude envoyant A sur A' et B sur B'. Mais ceci définit de manière unique la similitude puisqu'elle envoie par ailleurs A sur A'.

$\square$

Proposition 16 *Une application linéaire $f : E \to E$ qui conserve les angles orientés (resp. qui les renverse) est une similitude directe (resp. indirecte).*

Preuve : Fixons $x \neq 0$. On compose f avec une similitude directe et on peut supposer que $f(x) = x$. Comme f conserve les angles, on a l'égalité d'angles $(x, y) = (x, f(y))$ pour tout y et donc il existe $\lambda = \lambda(y) > 0$ tel que $f(y) = \lambda y$. Il est classique que λ ne dépend pas de y. f est donc une homothétie.

Si f renverse les angles, on commence par la composer avec une réflexion pour se ramener au cas précédent.

$\square$

2.4 Isométries en dimension 3

Soit $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une isométrie affine d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3. On peut l'écrire de manière unique sous la forme $\psi(\cdot) + t = \psi(\cdot + t)$ où ψ est une isométrie affine possédant (au moins) un point fixe, et $t \in E$. On sait de plus que $t \in F := Ker\,(f - Id)$ où f est la partie linéaire de ϕ et donc de ψ. Comme $f \in O(E)$, il existe une base orthonormée de E où la matrice de f est (voir au besoin l'exercice 44)

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

On parle de *rotation* dans le premier cas et d' *antirotation* dans le second. Lorsque $\theta = 0$, $f = Id$ en 1) tandis qu'en 2) f est une réflexion par rapport au plan engendré par les deux derniers vecteurs de base. Lorsque $\theta \neq 0$, on définit l'axe de la rotation ou de l'antirotation comme la droite engendrée par le premier vecteur de base. Pour donner une mesure de l'angle de la rotation ou de l'antirotation, on a besoin d'orienter le plan engendré par les deux derniers vecteurs de base. Cette orientation est définie de manière unique par l'orientation de l'espace et l'orientation de l'axe. Par exemple, si la base orthonormée dans laquelle la matrice a été écrite est directe et si l'orientation de l'axe est donnée par le premier vecteur de la base, alors la mesure de l'angle des rotations ou antirotations ci-dessus est donnée par θ. Si on prend l'orientation opposée sur l'axe, l'angle est aussi changé en son opposé.

Définition 26 *1) Une rotation affine est une isométrie affine qui a un point fixe et dont la partie linéaire est une rotation. Son axe est la droite affine passant par ledit point fixe et de direction l'axe de la partie linéaire.*

2) Un vissage est le produit commutatif d'une rotation affine et d'une translation parallèle à l'axe de cette rotation.

3) Une symétrie glissée est le produit commutatif d'une réflexion affine et d'une translation parallèle au plan de cette réflexion.

4) Une antirotation affine (ou isométrie négative à point fixe unique) est le produit commutatif d'une rotation affine et d'une réflexion par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe de la rotation affine.

Proposition 17 *Dans l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3,*

1) Les déplacements sont les vissages (parmi lesquels les translations et les rotations).

2) Les antidéplacements sont les symétries glissées et les antirotations.

Preuve : Pour 2), on distingue deux cas. Si la partie linéaire a 1 pour valeur propre (c'est la cas si et seulement si dans l'écriture matricielle ci-dessus $\theta = 0$), on reconnaît les symétries glissées (parmi lesquelles les réflexions). Si la partie linéaire n'a pas 1 pour valeur propre, l'antidéplacement ϕ a un unique point fixe donc $\phi = \psi$ et ϕ est nécessairement une antirotation.

$\square$

Groupes d'isométries de parties de l'espace On s'intéresse d'abord au groupe d'isométrie du tétraèdre régulier.

Définition 27 *Un tétraèdre est l'enveloppe convexe de 4 points affinement indépendants. Un tétraèdre régulier est un tétraèdre qui a ses 4 côtés isométriques.*

Il existe des tétraèdres réguliers : on se donne un triangle équilatéral ABC de côté 1 dans un plan et sur la droite orthogonale à ce plan en l'isobarycentre des points A, B, C, il y a deux points qui sont à distance 1 de A, B et C. On appelle D l'un de ces points. $ABCD$ est un tétraèdre régulier.

Il est facile de voir que deux tétraèdres réguliers sont semblables : avec une homothétie, on peut supposer que les deux tétraèdres ont des côtés de même longueur ; avec une translation, on se ramène au cas où ils ont un sommet commun ; avec une rotation autour de ce sommet commun, on se ramène au cas où ils ont un côté commun, puis après une rotation d'axe ce côté commun, au cas où ils ont deux arêtes communes, et donc une face commune. Il reste éventuellement à faire une réflexion par rapport au plan contenant cette face pour faire co&quot ;ıncider ces deux tétraèdres.

On fixe un tétraèdre régulier $A_1A_2A_3A_4$. On note O son centre. Si ϕ est une isométrie qui préserve $A_1A_2A_3A_4$, alors elle permute ses points extrémaux A_1, A_2, A_3, A_4 et son centre. Il existe donc une permutation $\sigma_\phi \in \Sigma_4$ telle que $\phi(A_i) = A_{\sigma_\phi(i)}$. On vérifie que $\phi \mapsto \sigma_\phi$ est un morphisme Φ du groupe des isométries G du tétraèdre vers Σ_4. Montrons que ce morphisme est surjectif.

La transposition (i, j) dans Σ_4 est l'image par Φ de la réflexion $s_{i,j}$ par rapport à l'hyperplan médiateur de $[A_i, A_j]$ (l'ensemble des points équidistants de A_i, A_j, soit encore le plan orthogonal au segment $[A_i, A_j]$ en son milieu). Comme les transpositions engendrent Σ_4, on en déduit que le morphisme est surjectif.

D'autre part, il est injectif (car les sommets du tétraèdre forment une base affine de l'espace). Donc le groupe d'isométrie du tétraèdre est isomorphe à Σ_4 (et engendré par les réflexions autour des hyperplans médiateurs des couples de sommets).

Déterminons le groupe D des déplacements du tétraèdre régulier. Comme les $s_{i,j}$ engendrent G, tout élément de D s'écrit comme le produit d'un nombre pair de $s_{i,j}$. Comme le groupe alterné A_4 est l'ensemble des produits d'un nombre pair de transpositions, il en résulte que D correspond par l'isomorphisme ci-dessus à A_4.

On peut faire la liste des déplacements :

a) l'identité,

b) 4 rotations d'angle $\pi/3$ et d'axe passant par un sommet et le centre de la face opposée, et 4 rotations d'angle $2\pi/3$ de même axe. Pour un axe donné, on obtient donc un sous-groupe à trois éléments, qui correspond par Φ au sous-groupe engendré par un cycle d'ordre 3. Il y bien 8 cycles d'ordre 3 dans Σ_4.

c) 3 rotations d'angle π (on parle aussi de retournement ou de demi-tour) par rapport à l'axe passant par le milieu de 2 arêtes opposées. Chaque retournement engendre un sous-groupe d'ordre 2. L'ensemble constitué de l'identité et de ces trois élements d'ordre 2 correspond par Φ à V_4, le sous-groupe engendré par les produits de deux transpositions à support disjoint.

Au sujet de la leçon *Sous-groupes distingués*, le rapport du jury 2007 précise “Il faut bien connaître le cas du groupe Σ_4, notamment $V_4 \hookrightarrow A_4 \hookrightarrow \Sigma_4$ et faire le lien avec le tétraèdre.”

Pour trouver les antidéplacements, on sait qu'il ne peut s'agir que d'isométries ayant un point fixe, donc des réflexions ou des antirotations. De plus, les antidéplacements correspondent par Φ aux éléments de $\Sigma \setminus A_4$, à savoir les 6 transpositions et les 6 4 cycles. Comme Φ est un isomorphisme (et préserve donc l'ordre des éléments), aux 6 transpositions correspondent des réflexions ou des antirotations d'angle π et aux 6 cycles d'ordre 4 correspondent 6 antirotations d'angle $\pi/2$. Il est facile de repérer 6 réflexions, un peu moins de déceler 6 antirotations. Les antidéplacements sont

a) les 6 réflexions par rapport aux plans médiateurs des 6 arêtes. Elles correspondent par Φ aux 6 transpositions de Σ_4.

b) les 6 antirotations de centre O, d'angle $\pi/2$, d'axe les droites joignant les milieux des côtés opposés. Ces antirotations correspondent par Φ aux cycles d'ordre 4 de Σ_4.

Pour voir comment trouver ces antirotations, cherchons par l'exemple l'antirotation correspondant au cycle (A_1, A_2, A_3, A_4), c'est-à-dire qui envoie A_1 sur A_2, etc... Alors le milieu I de $[A_1A_3]$ est envoyé sur le milieu J de $[A_2A_4]$ lui-même envoyé sur I. Donc la droite (IJ) est fixée par cette antirotation. Il s'agit donc de son axe : l'antidéplacement correspondant au cycle (A_1, A_2, A_3, A_4) est l'antirotation d'axe (IJ) et d'angle $\pi/2$.

Etudions à présent le groupe d'isométrie du cube. Définissons un cube comme l'image par une homothétie de l'enveloppe convexe des 8 points (appelés sommets dans la suite)

$$O + \epsilon_1 e_1 + \epsilon_2 e_2 + \epsilon_3 e_3 \ , \ \epsilon_i \in \{-1, +1\}$$

où (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ et O un point de $\mathcal{E}$. On appelle diagonale du cube une droite passant par le centre O du cube et un sommet et on note Δ l'ensemble des 4 diagonales. Si ϕ est une isométrie qui préserve le cube, alors elle préserve l'ensemble des sommets (puisque ce sont des points extrémaux) et l'isobarycentre de ces sommets O. En particulier, ϕ envoie une diagonale sur une diagonale et on peut faire agir le groupe des isométries G du cube sur Δ, ou de manière équivalente définir un morphisme Φ de G dans Σ_4 (le groupe de permutation des diagonales). Posons $\Delta := \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ et pour $\phi \in G$, on note $\sigma_\phi \in \Sigma_4$ telle que $\phi(F_i) = F_{\sigma(i)}$. Soit D le sous-groupe des déplacements dans G.

Soient F_i, F_j deux diagonales. Le plan qu'elles engendrent intersectent le cube selon exactement deux arêtes. Soit Γ_{ij} la droite passant par le milieu de ces deux arêtes. La rotation d'angle π par rapport à Γ_{ij} échangent F_i et F_j et laissent stables les 2 autres diagonales. Comme les permutations engendrent Σ_4, on voit que $\Phi_{|D}$ est surjective.

Montrons que $Ker\Phi = \{Id, -Id\}$. En effet, si $\phi \in\ Ker\Phi$, alors chaque $\overrightarrow{OA}$ (avec A un sommet du cube) est un vecteur propre de la partie linéaire f de ϕ. On en déduit que f est une involution orthogonale (car l'ensemble des $\{\overrightarrow{OA}\ :\ A$ sommet du cube$\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$). En particulier, l'ensemble des valeurs propres de f est contenu dans $\{-1, 1\}$. Supposons que -1 et 1 soient valeurs propres de f. Comme les diagonales sont contenues dans l'un ou l'autre des sous-espaces propres associés, et que les sous-espaces propres sont orthogonaux, on en déduit qu'il existe des diagonales orthogonales, ce qui est absurde. Donc -1 est la seule valeur propre ou 1 est la seule valeur propre. Autrement dit $f \in \{\pm Id\}$. Réciproquement, Id et $-Id$ sont dans $Ker\Phi$.

Comme $-Id$ n'est pas un déplacement, on en déduit que $\Phi_{|D}$ définit un isomorphisme de D sur Σ_4. Or D est un sous-groupe distingué de G d'indice 2 et donc le cardinal de G est 48.

Enfin, le morphisme de groupe

$$(s, \phi) \in \{\pm Id\} \times D \mapsto s\phi \in G$$

est clairement injectif, et donc surjectif (par cardinalité par exemple). Donc G est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \Sigma_4$.

Enumérons D :

- l'identité qui correspond à l'identité dans Σ_4,
- pour chaque axe passant par les centres de faces opposées, (il y a 3 couples de faces opposées), on a un groupe d'ordre 4 correspondant aux rotations autour de cet axe d'angle $\pi/2, \pi, 3\pi/2$. Ces groupes correspondent par Φ aux sous-groupes de Σ_4 engendrés par les cycles d'ordre 4 : les rotations d'angle $\pi/2$ et $3\pi/2$ (qui sont d'ordre 4) correspondent à des cycles d'ordre 4 tandis que les rotations d'angle π correspondent aux produits de 2 transpositions. On obtient ainsi les 6 cycles d'ordre 4 et les 3 produits de 2 transpositions.
- les rotations d'angle π autour des droites passant par le milieu des arêtes opposées sont d'ordre 2, fixent deux diagonales et échangent les deux autres. Elles correspondent aux 6 transpositions de Σ_4.
- pour chaque diagonale, la rotation d'axe cette diagonale et d'angle $2\pi/3$ engendre un sous-groupe d'ordre 3 qui correspond aux sous-groupes engendrés par un cycle d'ordre 3. Il y a 8 cycles d'ordre 3 dans Σ_4. Comme il y a 4 diagonales et 2 rotations par diagonale (celle d'angle $2\pi/3$ et celle d'angle $4\pi/3$), on a bien obtenu les huit cycles d'ordre 3.

Remarque 7 *Pour deviner ces rotations d'angle $2\pi/3$, il suffit d'observer qu' elles doivent correspondre aux 8 trois cycles de Σ_4. Ainsi, elles sont d'ordre 3, et donc d'angle $2\pi/3$ ou $4\pi/3$. Comme un 3 cycle fixe un point, ces rotations doivent fixer une diagonale, qui est nécessairement leur axe.*

2.5 Distance

Proposition 18 *Soit E un espace euclidien de dimension n et V un sous-espace vectoriel de E. On note $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de V. Soit $x \in E$. Alors la distance de x à V est donnée par*

$$d(x, V)^2 = \frac{G(e_1, \ldots, e_p, x)}{G(e_1, \ldots, e_p)},$$

où $G(f_1, \ldots, f_k)$ désigne le déterminant (de Gram) de la matrice $(\langle f_i, f_j\rangle)_{1\leq i,j\leq k}$.

Preuve : Si $x \in V$, x s'écrit $x = \sum \lambda_i e_i$ donc $\langle x, e_j\rangle = \sum \lambda_i \langle e_i, e_j\rangle$ donc $G(e_1, \ldots, e_p, x) = 0$. On peut donc supposer $x \notin V$. Soit $(f_i)_{1\leq i\leq p}$ une base orthonormée de V et P la matrice de passage de la base (f_i) à la base (e_i). Soit A la matrice du produit scalaire dans la base (e_i) et B sa matrice dans la base (f_i). Alors $A = P^T BP$ (formule de changement de base pour les formes quadratiques !).

Enfin, $B = Id$ (car (f_i) est une base orthonormée). Donc $A = P^T P$ et en particulier $G(e_1, \ldots, e_p) = det\, A = (det\, P)^2$. Noter que P est la matrice $(\langle e_i, f_j \rangle)_{i,j}$.

De même, en introduisant f_{p+1} tel que $(f_1, \ldots, f_{p+1})$ soit une base orthonormée de $Vect\,(e_1, \ldots, e_p, x)$, on a

$$G(e_1, \ldots, e_p, x) = (det\, Q)^2$$

où Q est la matrice $(\langle e_i, f_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq p+1}$ en notant $e_{p+1} := x$. Comme $\langle e_i, f_{p+1} \rangle = 0$ si $i \leq p$, la dernière colonne de Q a au plus un terme non nul : le dernier, qui est $\langle x, f_{p+1} \rangle$. En développant le déterminant de Q par rapport à la dernière colonne, on obtient

$$det\, Q = \langle x, f_{p+1} \rangle\, det\,(P).$$

D'où le résultat en notant que $d(x, V)^2 = \langle x, f_{p+1} \rangle^2$.

$\square$

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien d'espace directeur E et de dimension $n \geq 2$ et soit $\mathcal{V}$ un sous-espace affine de dimension $1 \leq p \leq n$. On note $d(M, \mathcal{V})$ la distance de M à $\mathcal{V}$. Soit $(A; e_1, \ldots, e_p)$ un repère affine de $\mathcal{V}$. Alors on a

$$d(M, \mathcal{V})^2 = \inf_{B \in \mathcal{V}} ||\overrightarrow{BM}||^2 = \inf_{B \in \mathcal{V}} ||\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}||^2$$

$$= \inf_{t \in V} ||\overrightarrow{AM} - t||^2 = d(\overrightarrow{AM}, V)^2 = \frac{G(e_1, \ldots, e_p, \overrightarrow{AM})}{G(e_1, \ldots, e_p)}$$

où G désigne le déterminant de Gram.

2.6 Produit vectoriel et calcul d'aires

Ici, E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

Définition 28 *Le produit vectoriel de deux vecteurs $u, v \in E$ est*
- *$u \wedge v = 0$ si u et v sont colinéaires.*
- *$u \wedge v$ est l'unique vecteur orthogonal à u et v, de norme $||u||||v||| sin\alpha|$ où α est une mesure de l'angle (u, v) (α dépend de l'orientation du plan engendré par u et v mais pas $|sin\alpha|$) et telle que $(u, v, u \wedge v)$ soit une base directe.*

Proposition 19 *L'application $(u, v) \mapsto u \wedge v$ est bilinéaire.*

Preuve : Fixons $u \in E$ non nul et montrons que l'application $f_u : v \mapsto u \wedge v$ est linéaire. Pour construire $u \wedge v$, on considère la projection $p(v)$ de v sur le plan $u^\perp$, puis l'image de $p(v)$ par la rotation d'angle $\pi/2$ (l'orientation de $u^\perp$ se fait conformément à l'orientation de l'axe $\mathbb{R}u$ par u). On obtient ainsi un vecteur $z = r \circ p(v)$ qui est orthogonal à u et à $p(v)$ donc aussi à v (car v est la somme d'une composante sur $\mathbb{R}p(v)$ et d'une composante sur $\mathbb{R}u$). De plus, la base (u, v, z) est directe. Pour obtenir $w = u \wedge v$, il suffit donc de le chercher sous la forme λz avec $\lambda > 0$ et

$$\lambda ||z|| = ||u||||v||| \sin \alpha|.$$

où α est une mesure de l'angle (u, v). On a

$$||z|| = ||p(v)|| = ||v - \langle v, u \rangle \frac{u}{||u||^2}|| = ||v|||| \frac{v}{||v||} - \cos\alpha \frac{u}{||u||}|| = ||v||| \sin \alpha|$$

donc $\lambda = ||u||$. Ainsi $f_u = ||u|| r \circ p$ est bien linéaire comme composée d'applications linéaires.

$\square$

Exercice 40 *Dans une base orthonormée directe, donner les coordonnées du produit vectoriel de deux vecteurs en fonction des coordonnées de chaque vecteur.*

Preuve : Par bilinéarité, il suffit de calculer les produits vectoriels des vecteurs de la base. Pour cela, on revient à la définition du produit vectoriel.

$\square$

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien orienté, sous-espace affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3. Il existe un unique vecteur unitaire u orthogonal à $\mathcal{P}$ tel qu'une base directe de $\mathcal{P}$ complétée par u (en troisième position disons) soit une base directe de E.

Soient A, B, C trois points de $\mathcal{P}$. Le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est orthogonal à $\mathcal{P}$, donc de la forme λu. Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). On a

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{HC}$$

donc $|\lambda| = AB \cdot HC$. On reconnaît ce qu'on appelle au CM2 le double de l'aire du triangle de sommet A, B, C.

Définition 29 *On appelle aire orientée d'un triangle ABC l'unique nombre réel $\mathcal{A}(ABC)$ tel que*

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \mathcal{A}(ABC)u.$$

$\mathcal{A}(ABC)$ est positive si et seulement si la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est directe.

Exercice 41 *Soit ABC un triangle non plat. Les coordonnées barycentriques d'un point M dans le repère affine (A, B, C) sont proportionnelles aux aires orientées des triangles MBC, MCA, MAB.*

Preuve : On écrit

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = 0$$

et on fait le produit vectoriel avec $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}$. On obtient un système de trois équations à trois inconnues que l'on peut réécrire sous la forme

$$(\mathcal{A}(MBC), \mathcal{A}(MCA), \mathcal{A}(MAB)) \wedge (\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

ce qui prouve la colinéarité des deux vecteurs en jeu.

$\square$

2.7 Cercles et sphères

Dans le programme de l'agrégation, je n'ai pas vu les mots *cercle* ou *sphère*. Je suppose que vous pouvez donc oublier ce qu'est un cercle... En même temps, dans le rapport du jury 2006, on lit “Il faut savoir construire un cercle tangent à deux autres cercles ou caractériser les points de Fermat.”

2.8 Exercices supplémentaires

Exercice 42 *On considère un triangle ABC. On note a, b, c, R les mesures des côtés BC, AC, AB et du rayon du cercle circonscrit. On note α, β, γ les mesures des angles non orientés en A, B, C respectivement.*

1) Montrer que

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

2) *Montrer que*

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Exercice 43 *Montrer que si une application $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ préserve les distances, alors elle est affine. (Suggestion : Si A, B, C sont trois points de $\mathcal{E}$, alors $\langle \overrightarrow{\phi(A)\phi(B)}, \overrightarrow{\phi(A)\phi(C)} \rangle = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$. Pour le voir, on peut utiliser l'exercice 42 2)).*

Exercice 44 *Soient F un espace euclidien et $u \in O(F)$. Alors F est somme directe orthogonale*

$$F = V \oplus W \oplus P_1 \oplus \cdots \oplus P_k,$$

où V, W et les P_i sont stables par u, $u_{|V} = Id_V$, $u_{|W} = -Id_W$ et chaque P_i est un plan sur lequel u est une rotation.

Au sujet des angles

Exercice 45 *Dans le plan euclidien orienté, montrer que la base (u, v) est directe ssi l'angle (u, v) a une mesure dans $]0, \pi[$.*

Exercice 46 *On appelle bissectrice de deux demi-droites (D_1, D_2) une demi-droite Δ telle que l'angle (D_1, Δ) soit égal à l'angle (Δ, D_2). Montrer que tout couple de demi-droites possède exactement deux bissectrices, qui sont opposées.*

Exercice 47 1) *Deux angles non orientés sont égaux si et seulement si leurs mesures sont égales.*

2) *Montrer que la somme des mesures des angles non orientés d'un triangle est égale à π. Montrer que les angles non orientés à la base d'un triangle isocèle ont même mesure.*

3) *Rappeler le théorème des angles inscrits dans un cercle et le démontrer.*

4) *Si $\mathcal{D}$ est la tangente en B au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et si A est un point de $\mathcal{C}$ distinct de B, on a*

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(AB, \mathcal{D})$$

5) *Montrer que les angles de droite (CA, CB) et (DA, DB) sont égaux si et seulement si les quatre points A, B, C et D sont cocycliques ou alignés.*

Exercice 48 1) *Montrer que dans un triangle ABC, les bissectrices intérieures sont concourantes en un point I équidistants des 3 côtés du triangle et donc centre d'un cercle tangent aux 3 côtés du triangle, le cercle inscrit.*

2) *Montrer que la bissectrice intérieure de l'angle en A et les 2 bissectrices extérieures des angles en B et C sont concourantes en un point J équidistant des 3 côtés du triangle et donc centre d'un cercle tangent aux 3 côtés du triangle, le cercle exinscrit dans l'angle A.*

Exercice 49 1) *Soit f une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$. On s'intéresse au cône isotrope de f :*

$$\mathcal{G} := \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) = 0\}.$$

Montrer qu'il existe une base $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mathcal{G} := \{x = x_1e_1 + x_2e_2 : \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 0\}.$$

2) *Discuter la nature de l'ensemble $\mathcal{G}$ en fonction du signe de $\lambda_1\lambda_2$. On montrera en particulier que si $\lambda_1\lambda_2 < 0$, $\mathcal{G}$ est l'union de deux droites vectorielles D_1 et D_2 dont on donnera l'équation.*

3) *On se place désormais dans le cas $\lambda_1\lambda_2 < 0$. Quelles sont les bissectrices de (D_1, D_2) ?*

4) *Donner la valeur de l'angle géométrique θ entre D_1 et D_2 en fonction de $\lambda_1 + \lambda_2$ et $\lambda_1\lambda_2$ (on pourra commencer par calculer $\tan\theta/2$ puis $\sin\theta$).*

5) *Application : Soient $f(x) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ avec $b^2 - ac \geq 0$. L'ensemble $f(x) = 0$ définit deux droites D_1, D_1'. Calculer l'angle géométrique formé par D_1, D_1' et donner une équation des bissectrices de D_1, D_1' sous la forme $g(x) = 0$, avec g forme quadratique.*

Exercice 50 *Soient V et V' deux droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$ et un entier $n \geq 2$. On cherche les droites vectorielles W telles que*

$$n(V, W) = (V, V')$$

où (V, V') désigne la mesure de l'angle orienté de V et V' (c'est donc un élément de $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$).

1) *Soit $\alpha \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$. Donner l'ensemble des $\theta \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ tels que $n\theta = \alpha$ mod π.*

2) *Conclure.*

Exercice 51 *Soient D, D' et D'' trois droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$. Soient u, u' et u'' des vecteurs directeurs unitaires choisis de telle sorte que*

$$\langle u', u''\rangle = \cos a\ ,\ \langle u'', u\rangle = \cos b,$$

où a, b désignent les angles géométriques de D', D'' d'une part et D'', D d'autre part.

Soit H l'hyperplan vectoriel $D''^{\perp}$ et x, x' les projections orthogonales de u et u' sur H. On pose enfin $v = \dfrac{x}{||x||}$ et $v' = \dfrac{x'}{||x'||}$ et α désigne l'angle géométrique des vecteurs v et v'. Montrer que

$$\langle u, u'\rangle = \cos a \cos b + \langle v, v'\rangle \sin a \sin b = \cos a \cos b + \cos\alpha \sin a \sin b.$$

En déduire que l'angle géométrique définit une distance sur l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$.

Isométries du plan

Exercice 52 *Expliciter le Théorème 3 dans le plan affine $\mathcal{E}$: écrire explicitement une translation, une rotation, une symétrie glissée comme composée de réflexions. En déduire un moyen de déterminer le centre de la composée de deux rotations affines.*

Exercice 53 *Montrer qu'une application $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une similitude affine s'il existe $k > 0$ tels que pour tous points M, N d'image M', N' on ait*

$$d(M', N') = kd(M, N).$$

Exercice 54 *Montrer que si un polygone inscrit dans un cercle a tous ses angles égaux et a un nombre impair de côtés, tous ses côtés ont même longueur.*

Utilisation des nombres complexes Un repère orthonormé d'un plan affine euclidien orienté permet de l'identifier à $\mathbb{C}$ par l'isomorphisme d'espaces affines qui envoie un point $M \in \mathcal{E}$ de coordonnées (x, y) sur $z := x + iy \in \mathbb{C}$, appelé l'affixe de M.

Exercice 55 a) *Si R désigne la réflexion d'angle θ et de centre A, donner l'affixe d'un point $M' = R(M)$ en fonction de l'affixe de M.*

b) *Donner de même l'écriture en nombre complexe d'une réflexion, puis d'une symétrie glissée.*

c) *Pour $a \in U(1)$, quelle est l'isométrie qui s'écrit $z \mapsto a\overline{z} + b$?*

Exercice 56 *Montrer que les similitudes directes sont les applications de la forme $z \mapsto \alpha z + \beta$. Le rapport de la similitude est $|a|$ et (la mesure de) son angle est un argument de a.*

Isométries dans l'espace

Exercice 57 *Soient u_1, u_2, v_1 v_2 des vecteurs unitaires dans $\mathbb{R}^3$ tels que $||u_1 - u_2|| = ||v_1 - v_2||$. Montrer qu'il existe une rotation f telle que $f(u_1) = v_1$ et $f(u_2) = v_2$.*

Exercice 58 *Pour qu'une translation et une rotation commutent, il faut et il suffit que le vecteur de la translation dirige l'axe de la rotation.*

Exercice 59 *Etudier la composition de deux rotations affines dans l'espace affine euclidien de dimension 3. On pourra montrer que si ρ_1 et ρ_2 désignent ces deux rotations et $\rho = \rho_1 \circ \rho_2$, alors*

1) *Si ρ est une translation, alors $r_1 = r_2^{-1}$, en notant r_1, r_2 les parties linéaires de ρ_1 et ρ_2 respectivement. En déduire que ρ_1 et ρ_2 ont des axes parallèles.*
2) *Si ρ_1 et ρ_2 ont des axes coplanaires, alors ρ est une translation ou une rotation (décomposer chaque réflexion par rapport à des plans bien choisis).*
3) *Si les axes de ρ_1 et ρ_2 ne sont pas coplanaires, alors ρ est un vissage dont la translation est non triviale (noter que si ρ est une rotation, alors elle a un point fixe O et l'axe de ρ_1 et l'axe de ρ_2 sont contenus dans le plan médiateur du segement $[O, \rho_2(O)]$).*

Exercice 60 *Soient ϕ et ψ deux rotations affines dans l'espace euclidien de dimension 3. Quand l'angle de $\psi \circ \phi$ est-il la somme des angles de f et g ?*

Exercice 61 *Quelle est la composée de 3 réflexions de plans parallèles ?*

Exercice 62 *Décrire la composée de 3 réflexions de plans orthogonaux deux à deux.*

Exercice 63 *Dans $\mathbb{R}^3$ orienté, on note s_P la réflexion vectorielle de plan P.*

1) *Montrer que l'application linéaire $-s_P$ est un demi-tour (par rapport à quelle droite ?)*
2) *Que peut-on dire de la composée de deux demi-tours ? Quand la composée de deux demi-tours est-elle un demi-tour ?*
3) *Montrer que $SO(3)$ est engendré par les demi-tours et que tous les demi-tours sont conjugués dans $SO(3)$.*

Exercice 64 *On veut montrer que $SO(3)$ est simple, i.e. ses seuls sous-groupes distingués sont les sous-groupes triviaux $SO(3)$ et $\{Id\}$. Soit donc N un sous-groupe distingué de $SO(3)$. On suppose $N \neq \{Id\}$ et on veut montrer que $SO(3) = N$.*

1) *Vérifier qu'il suffit de montrer que N contient un demi-tour.*
2) *Montrer qu'on peut supposer que N contient une rotation d'angle $\theta \in]0, \pi[$. Soient a un vecteur unitaire dirigeant l'axe de f, x un vecteur unitaire orthogonal à a et $y = f(x)$. Soit $d = ||x - y||$. Montrer que $\forall m \in [0, d]$, il existe x_1 unitaire tel que $||f(x_1) - x_1|| = m$. On note $x_2 = f(x_1)$.*
3) *Fixons $m \in [0, d]$. Soient y_1, y_2 unitaires tels que $||y_1 - y_2|| = m$. Montrer qu'il existe une rotation r telle que $r(x_1) = y_1$, $r(x_2) = y_2$. En déduire qu'il existe $g \in N$ tel que $g(y_1) = y_2$.*
4) *Soit $n \in \mathbb{N}$ et ρ_n la rotation d'axe a et d'angle π/n, avec n assez grand pour que $||x - \rho_n(x)|| \leq d$. Soient $x_0 = x$, $x_1 = \rho_n(x)$, $\ldots$, $x_{i+1} = \rho_n(x_i)$, $\ldots$ Que vaut x_n ? Montrer qu'il existe une rotation $u_i \in N$ telle que $u_i(x_i) = x_{i+1}$. Soit $\nu = u_{n-1} \circ \ldots \circ u_1 \circ u_0$. Que vaut $\nu(x)$? Montrer que ν est un demi-tour et conclure.*

Autour du tétraèdre

Exercice 65 *Montrer que dans un tétraèdre régulier, 2 arêtes opposées sont orthogonales et que leur perpendiculaire commune passe par leur milieu.*

Exercice 66 *Soit G un sous-groupe d'ordre 3 du groupe alterné $\mathcal{A}_4$. Construire un tétraèdre dont le groupe des déplacements soit isomorphe à G. Quel est son groupe d'isométrie ?*

Exercice 67 *Par définition, un tétraèdre régulier est un tétraèdre dont les côtés sont isométriques (autrement dit, c'est l'enveloppe convexe de quatre points A_1, ..., A_4 tels qu'il existe $a > 0$ vérifiant : pour tout $i \neq j$, $||\overrightarrow{A_iA_j}|| = a$).*

Le jury a posé en 2008 la question suivante : est-ce qu'un tétraèdre dont les 4 faces ont la même aire est nécessairement régulier ?

1) Dans un plan de $\mathbb{R}^3$, on considère un triangle ABC isocèle en C tel que $CA(= CB) > AB$. Montrer qu'il existe un point D vérifiant

$$DA = DB = CA = CB \text{ et } DC = AB.$$

2) Répondre au jury.

Dans l'exemple précédent, les 4 faces sont isométriques. On se propose de montrer que c'est un fait général : si un tétraèdre a ses 4 faces de même aire, alors ses 4 faces sont isométriques.

1) Soient I, J les pieds sur (AB) et (CD) de la perpendiculaire commune à (AB) et (CD). Montrer que

$$||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||^2 = ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{IJ}||^2 + ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{JC}||^2,$$

$$||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}||^2 = ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{IJ}||^2 + ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{JD}||^2.$$

2) Montrer que les faces du tétraèdre sont isométriques (on pourra considérer le retournement autour de la droite (IJ)).

Problèmes de distance

Exercice 68 *Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ deux droites non coplanaires.*

1) Montrer qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

2) Si M_1 et M_2 sont les deux points d'intersection de Δ avec $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, montrer que M_1M_2 est la distance entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Exercice 69 *Soient A, B deux points distincts du plan et $k > 0$. Déterminer les trois ensembles*

$$\mathcal{E} := \left\{ M : \frac{MA}{MB} = k \right\} \ , \ \mathcal{E}_+ := \left\{ M : \frac{MA}{MB} > k \right\} \ , \ \mathcal{E}_- := \left\{ M : \frac{MA}{MB} < k \right\}$$

Exercice 70 *Soit $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction affine et $\mathcal{H} := \Psi^{-1}(0)$ le plan affine qu'elle définit. Comment calculer la distance d'un point A de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{H}$?*

Exercice 71 *Dans $\mathbb{R}^3$, on considère une droite affine $\mathcal{D}$ définie comme l'intersection de deux plans non parallèles d'équation respective*

$$ux + vy + wz + h = 0 \ , \ u'x + v'y + w'z + h' = 0.$$

On veut donner une expression explicite de la distance de l'origine O à la droite $\mathcal{D}$.

1) Soit A un point de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ le plan perpendiculaire à $\mathcal{D}$ en A. Montrer que

$$||\overrightarrow{OA}||^2 = d(O, \mathcal{D})^2 + d(O, \mathcal{P})^2.$$

2) Montrer que les vecteurs ν et ν' de coordonnées (u, v, w) et (u', v', w') forment une base du sous-espace vectoriel qui dirige $\mathcal{P}$. Montrer que

$$d(O, \mathcal{P})^2 = \frac{G(\nu, \nu', \overrightarrow{AO})}{G(\nu, \nu')}$$

où $G(e_1, ..., e_k)$ désigne le déterminant de Gram des vecteurs $e_1, ..., e_k$:

$$G(e_1, ..., e_k) = \mathit{det}\,(\langle e_i, e_j \rangle).$$

3) Montrer que $\langle \nu, \overrightarrow{AO} \rangle = h$ et $\langle \nu', \overrightarrow{AO} \rangle = h'$.

4) En déduire une expression de $d(O, \mathcal{D})$ en fonction de ν, ν', h et h' (mais pas de A !).

5) Généraliser ce calcul à celui de la distance d'un point à une intersection de p hyperplans dans $\mathbb{R}^n$, avec $1 \leq p \leq n$, lorsque les formes affines associées à ces hyperplans ont des parties linéaires linéairement indépendantes.

Problèmes d'extremum

Exercice 72 *Dans $\mathbb{R}^3$, on se donne un plan $\mathcal{P}$ et deux points A et B dans un même demi-espace délimité par $\mathcal{P}$. Trouver un point M sur $\mathcal{P}$ tel que $AM + BM$ soit minimum.*

Exercice 73 *Dans $\mathbb{R}^3$, on se donne deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ et deux points A et B. Trouver P_1 sur $\mathcal{P}_1$ et P_2 sur $\mathcal{P}_2$ pour que $AP_1 + P_1P_2 + P_2B$ soit minimal.*

Exercice 74 *Soit ABC un triangle dont tous les angles au sommet sont aigus. On cherche $P \in [BC]$, $Q \in [AB]$ et $R \in [AC]$ pour que le périmètre du triangle PQR soit minimal.*

1) Montrer qu'une solution existe.

2) On fixe $P \in [BC]$. Déterminer $Q \in [AB]$ et $R \in [AC]$ pour que le périmètre du triangle PQR soit minimal. On pourra faire intervenir les symétriques P', P'' de P par rapport à $[AC]$ et $[AB]$.

3) Montrer que la mesure de l'angle géométrique $P'AP''$ ne dépend pas de P. En déduire que la distance $P'P''$ est atteinte lorsque P est le pied de la hauteur issue de A.

4) Conclure.

Exercice 75 *Soit T un triangle d'un plan affine euclidien. Etant donné un point M intérieur à T, on appelle p, q, r les distances de M aux trois côtés de T. Trouver M pour que le produit soit maximum. (Indication : donner les coordonnées barycentriques de M en fonction des aires des petits triangles MAB, MBC et MAC et se ramener à un problème d'optimisation sous contrainte.)*

2.9 Indications ou solutions des exercices

Solution 31 Le fait que d soit une distance découle des propriétés de la norme $|| \cdot ||$. On étudie le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire :

$$||\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|| = ||\overrightarrow{AB}|| + ||\overrightarrow{BC}||$$

$$\Leftrightarrow ||\overrightarrow{AB}||^2 + ||\overrightarrow{BC}||^2 + 2\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \rangle = ||\overrightarrow{AB}||^2 + ||\overrightarrow{BC}||^2 + 2||\overrightarrow{AB}||||\overrightarrow{BC}||$$

$$\Leftrightarrow ||\overrightarrow{AB}||||\overrightarrow{BC}|| = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \rangle$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \text{ sont positivement colinéaires } \Leftrightarrow B \in [AC].$$

Solution 32 Soit ϕ une application affine dont la partie linéaire notée f est une isométrie vectorielle. Alors pour tout $A, B \in \mathcal{E}$,

$$d(\phi(A), \phi(B)) = ||\overrightarrow{\phi(A)\phi(B)}|| = ||f(\overrightarrow{AB})|| = ||\overrightarrow{AB}|| = d(A, B)$$

donc ϕ est une isométrie affine.

Réciproquement, si ϕ est une isométrie affine de partie linéaire f, montrons que f est une isométrie vectorielle. Fixons $O \in \mathcal{E}$. Pour tout vecteur $t \in E$,

$$||f(t)|| = d(\phi(O), \phi(O + t)) = d(O, O + t) = ||t||.$$

Solution 42

1) On peut calculer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle de trois manières différentes, par exemple avec le produit vectoriel :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|| = \frac{1}{2}||\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}|| = \frac{1}{2}||\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{CA}||$$

ce qui implique

$$bc \sin \alpha = ca \sin \beta = ab \sin \gamma. \tag{2.5}$$

Par ailleurs, si on note O le centre du centre circonscrit et δ l'angle en O dans le triangle OBC, alors par le théorème des angles inscrits, on a $\delta = 2\alpha$. Soit I le milieu de $[BC]$. En considérant le triangle OBI rectangle en I, on obtient

$$\sin \alpha = \sin \frac{\delta}{2} = \frac{a}{2R}. \tag{2.6}$$

Les égalités (2.5) et (2.6) permettent de conclure.

2) On calcule $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$ de trois manières différentes. On a d'abord

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = bc \cos \alpha. \tag{2.7}$$

Par la relation de Chasles,

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \langle \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC} \rangle = b^2 + \langle \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC} \rangle.$$

De même,

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \rangle = c^2 + \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \rangle.$$

En sommant ces deux dernières égalités, on obtient

$$2\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = b^2 + c^2 - a^2$$

et on peut conclure par (2.7).

Solution 43 On fixe $O \in \mathcal{E}$. Soit

$$f : t \in E \mapsto \overrightarrow{\phi(O)\phi(O + t)}.$$

On a $||f(t)|| = ||t||$. Montrons que f préserve le produit scalaire. Soient A, B, C trois points de $\mathcal{E}$. Soit $A' = \phi(A)$, $B' = \phi(B)$ et $C' = \phi(C)$. On a $A'B' = AB$, $A'C' = AC$ et $B'C' = BC$. Par l'exercice 42 2), le cosinus de l'angle géométrique α' en A' dans le triangle $A'B'C'$ est égal au cosinus de l'angle α en A dans le triangle ABC. Or $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = d(A, B)d(A, C) \cos \alpha$ et de même pour $\langle \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'} \rangle$. Donc $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \langle \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'} \rangle$, i.e. $\langle f(\overrightarrow{AB}), f(\overrightarrow{AC}) \rangle = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$.

Ainsi f préserve le produit scalaire. Montrons que cela implique que f est une isométrie *linéaire*.

$$\begin{aligned}
&||f(\lambda t+s)-\lambda f(t)-f(s)||^2\\
&\qquad = ||f(\lambda t+s)||^2+\lambda^2||f(t)||^2+||f(s)||^2+2\lambda\langle f(t),f(s)\rangle\\
&\qquad\quad -2\lambda\langle f(\lambda t+s),f(t)\rangle-2\langle f(\lambda t+s),f(s)\rangle\\
&\qquad = ||\lambda t+s||^2+\lambda^2||t||^2+||s||^2+2\lambda\langle t,s\rangle-2\lambda\langle\lambda t+s,t\rangle-2\langle\lambda t+s,s\rangle\\
&\qquad = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi $f(\lambda t+s)=\lambda f(t)+f(s)$, ce qui prouve que f est linéaire. Alors $\phi=\phi(O)+f(\cdot-O)$ est bien une application affine.

Solution 44 On procède par récurrence sur la dimension n de F. L'assertion est vraie pour $n=1$. On l'a vérifiée pour $n=2$ lors de l'étude de $SO(E)$ avec E de dimension 2. Pour passer de n à $n+1$, il suffit de trouver un sous-espace stable propre pour u, car alors on applique l'hypothèse de récurrence à ce sous-espace stable et à son orthogonal. Tout sous-espace propre convient, donc il suffit de considérer le cas où toutes les valeurs propres de u sont complexes. Soit e une base de F et A le matrice de u dans e. Il suffit de montrer qu'il existe un plan stable par A. Soit $\lambda\in\mathbb{C}$ une valeur propre de A associé au vecteur propre X. Alors $\bar\lambda$ est aussi valeur propre associée au vecteur propre $\bar X$ (car A est à coefficients réels). Alors les vecteurs

$$Y_1:=\frac{X+\bar X}{2}\ ,\ Y_2:=\frac{X-\bar X}{2i}$$

sont linéairement indépendants, et leurs coordonnées dans la base e sont réelles. Le sous-espace vectoriel engendré sur $\mathbb{C}$ par X et $\bar X$ est stable par A. Donc le sous-espace vectoriel engendré sur $\mathbb{C}$ par Y_1,Y_2 est stable par A. Donc le sous-espace vectoriel engendré sur $\mathbb{R}$ par Y_1,Y_2 est stable par A (car Y_1,Y_2 et A sont à coefficients réels).

Solution 45 Soit (u,e_2) une b.o.n. directe. Soit θ la mesure de l'angle (u,v). Par définition, v est l'image de u par la rotation qui a pour matrice $R(\theta)$ dans une bon directe. Donc $v=\cos\theta u+\sin\theta e_2$. Donc la matrice de passage de la base (u,e_2) à la base (u,v) est

$$P:=\begin{pmatrix}1&\cos\theta\\0&\sin\theta\end{pmatrix}.$$

Donc (u,v) est directe ssi $det\,P>0$ ssi $\theta\in]0,\pi[$.

Solution 46 Notons $D_1=\mathbb{R}^+t_1$, $D_2=\mathbb{R}^+t_2$. Le problème est équivalent à chercher les vecteurs unitaires t tels que $(t_1,t)=(t,t_2)$ ou encore les rotations qui envoient t_1 sur t et t sur t_2. Soit r la rotation qui envoie t_1 sur t_2. On cherche donc les rotations r' telles que $r'^2=r$ (et on posera alors $t=r'(t_1)$). On fixe une base (e_1,e_2). Il existe $\theta,\phi\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tels que $r=R(\theta)$, $r'=R(\phi)$. On a

$$r'^2=r\iff R(2\phi)=R(\theta)\iff 2\phi=\theta\ [2\pi]\iff\phi=\frac{1}{2}\theta\ [\pi].$$

Donc $t=R(\theta/2)t_1$ ou $t=R(\pi+\frac{1}{2}\theta)t_1$ définissent les deux bissectrices de (D_1,D_2). Comme $R(\pi+\theta/2)=-R(\theta/2)$, ces deux bissectrices sont effectivement opposées.

Solution 47

1) Soient deux couples de vecteurs non nuls (x, y) et (x', y'). Ils définissent des angles non orientés égaux si et seulement si il existe $u \in O(E)$ tel que

$$u(\frac{x}{||x||}) = \frac{x'}{||x'||}\ ,\ u(\frac{y}{||y||}) = \frac{y'}{||y'||} \tag{2.8}$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{\langle x, y\rangle}{||x||||y||} = \frac{\langle x', y'\rangle}{||x'||||y'||}. \tag{2.9}$$

En effet, l'implication (2.8) $\Longrightarrow$ (2.9) est claire. Pour voir que (2.9) $\Longrightarrow$ (2.8), on procède comme suit : si (x, y) est une base de E, soit u l'application linéaire telle que

$$u(\frac{x}{||x||}) = \frac{x'}{||x'||}\ ,\ u(\frac{y}{||y||}) = \frac{y'}{||y'||}.$$

Montrons que $u \in O(E)$. Soit $z \in E$. Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $z = \alpha x + \beta y$. Alors en utilisant (2.9), on vérifie que $||u(z)||^2 = ||z||^2$, ce qui montre que $u \in O(E)$. On procède de même si (x', y') est une base de E. Il reste à étudier le cas où $y = \lambda x$, $y' = \lambda' x'$, pour $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$. De (2.9), on déduit que λ et λ' ont même signe. Soit u une isométrie qui envoie $x/||x||$ sur $x'/||x'||$. Alors

$$u(\frac{y}{||y||}) = \frac{y'}{||y'||}.$$

L'implication (2.9) $\Longrightarrow$ (2.8) est donc montrée dans tous les cas. Pour conclure la preuve de 1), il suffit de voir que (2.9) est équivalent à

$$\arccos\frac{\langle x, y\rangle}{||x||||y||} = \arccos\frac{\langle x', y'\rangle}{||x'||||y'||},$$

c'est-à-dire l'égalité des mesures des angles géométriques.

2) Soit ABC un triangle dans le plan affine euclidien. Alors par la relation de Chasles, on a (pour les angles orientés)

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}).$$

Comme $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB})$ sont deux angles plats, leur somme est l'angle nul. Donc

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}).$$

On se donne une orientation du plan telle que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ soit directe et en utilisant l'isomorphisme qui à un angle orienté associe sa mesure (voir Remarque 5), on obtient

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi\ \ [2\pi]$$

où θ_1 (respectivement θ_2, θ_3) est la mesure de $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$, (respectivement $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$, $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$). On utilise ensuite la remarque suivante : si $\theta \in [0, \pi]$ est (un représentant de) la mesure d'un angle orienté (x, y) alors θ est aussi la mesure de l'angle géométrique correspondant (si $\theta \in [-\pi, 0]$, on prend $-\theta$ pour l'angle géométrique). Ici, la base $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ est directe, donc les bases $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ et $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$ le sont aussi, donc $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \geq 0$. Comme $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$, on en déduit que $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in [0, \pi]$. Donc ce sont aussi les mesures des angles géométriques correspondants.
Pour la deuxième partie de la question, soit ABC un triangle isocèle de sommet A. Soit I le milieu de $[BC]$ et σ la symétrie orthogonale par rapport à (AI). Alors

$$\sigma(A) = A\ ,\ \sigma(B) = C\ ,\ \sigma(C) = B.$$

On conclut avec la Proposition 10 3).

3) Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O. Soient A, B, C trois distincts de $\mathcal{C}$. Alors
$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}).$$
En effet,
$$\begin{aligned}(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CO}) + (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB})\\ +(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO}) + (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BC}).\end{aligned}$$
(on a utilisé $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}) = 0$). En utilisant l'égalité des angles orientés à la base dans les triangles isocèles OAB, OAC, OCB, on a
$$(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO}) \ , \ (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO}) \ , \ (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO})$$
d'où il vient
$$\begin{aligned}(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BC}) &= 2(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CO}) + 2(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO})\\ &= 2(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO}).\end{aligned}$$
Comme dans le triangle AOB,
$$(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OA}),$$
on obtient
$$(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BC}) = 2(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OA})$$
soit
$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AO}) = 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}).$$
4) Soit $I \in \mathcal{D}$ un point distinct de B. Comme $\mathcal{D}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{OB}$, on a
$$2(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BI}) = (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OB}).$$
La relation de Chasles permet d'établir comme précédemment que
$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO}) + (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OB}).$$
Ainsi, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BI}) = 2(AB, \mathcal{D})$.

5) Si A, B, C, D sont alignés, alors les angles de droite (CA, CB) et (DA, DB) sont égaux. Si A, B, C, D sont cocycliques sur un cercle de centre O, alors
$$2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$$
donc on a l'égalité des angles de droites $(CA, CB) = (DA, DB)$.
Réciproquement, si A, B, C sont 3 points non alignés et les angles de droite (CA, CB) et (DA, DB) sont égaux, notons $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit à ABC et $\mathcal{C}'$ celui à ABD. Soient O le centre de $\mathcal{C}$ et O' celui de $\mathcal{C}'$. (A, B, D ne sont pas alignés car sinon, par l'égalité d'angles, A, B, C seraient alignés).
Soient $\mathcal{D}$ la tangente à $\mathcal{C}$ en B et $\mathcal{D}'$ la tangente à $\mathcal{C}'$ en B.
On a $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(AB, \mathcal{D})$ et $(\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'B}) = 2(AB, \mathcal{D}')$ et
$$2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'B})$$
donc $2(AB, \mathcal{D}) = 2(AB, \mathcal{D}')$, ce qui implique
$$(AB, \mathcal{D}) = (AB, \mathcal{D}')$$
d'où $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$. On en déduit que $O = O'$ (point d'intersection de la médiatrice de $[AB]$ et de la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ en B). Donc $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$, ce qui montre que $D \in \mathcal{C}$: les quatre points A, B, C, D sont cocycliques.

Solution 48

1) Soit I l'intersection de la bissectrice intérieure en A et de la bissectrice intérieure en B. Alors
   - I est dans l'enveloppe convexe des demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ et $d(I,(AB)) = d(I,(AC))$,
   - I est dans l'enveloppe convexe des demi-droites $[BC)$ et $[BA)$ et $d(I,(BC)) = d(I,(BA))$.

   Donc I est dans l'enveloppe convexe de A, B et C et $d(I,(BC)) = d(I,(AC))$. Donc I est sur la bissectrice intérieure de l'angle en C.
2) Même raisonnement sauf que J appartient à d'autres enveloppes convexes...

Solution 49 Comme f est une forme quadratique, il existe une base orthonormée (pour le produit scalaire usuel) $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ orthogonale pour f : la matrice de f dans cette base est diagonale, et on note λ_1 et λ_2 les éléments diagonaux.

1. Si $\lambda_1\lambda_2 > 0$ alors $\mathcal{G} = \{0\}$.
2. Si $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ alors $\mathcal{G} = \mathbb{R}e_1$ tandis que si $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$ alors $\mathcal{G} = \mathbb{R}e_2$.
3. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, alors $\mathcal{G} = \mathbb{R}^2$.
4. Si $\lambda_1\lambda_2 < 0$, alors $\mathcal{G}$ est la réunion des deux droites d'équation $\sqrt{|\lambda_1|}x_1 = \pm\sqrt{|\lambda_2|}x_2$.

On suppose désormais $\lambda_1\lambda_2 < 0$. Les deux droites d'équation $x_2 = \pm\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$ sont symétriques par rapport aux axes $\mathbb{R}e_1$ et $\mathbb{R}e_2$. Donc leurs bissectrices sont les axes $\mathbb{R}e_1$ et $\mathbb{R}e_2$. On a $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{-\lambda_1}{\lambda_2}}$. Comme $\sin\theta = 2u/(1+u^2)$ avec $u = \tan(\theta/2)$, il vient

$$\sin\theta = \frac{2\sqrt{-\lambda_1\lambda_2}}{\lambda_2 - \lambda_1} \Longrightarrow \sin^2\theta = \frac{-4\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2 - 4\lambda_1\lambda_2}$$

donc

$$\theta = \arcsin\left(2\sqrt{\frac{\lambda_1\lambda_2}{4\lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1+\lambda_2)^2}}\right).$$

Noter que $\theta = \pi/2$ ssi $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Noter également que $\lambda_1 + \lambda_2$ est la trace et $\lambda_1\lambda_2$ le déterminant de la matrice de f dans la base canonique (on a pris une matrice de changement de base *orthogonale*).
Dans l'application, l'angle entre D_1 et D_1' est

$$\arcsin\left(2\sqrt{\frac{ac-b^2}{4(ac-b^2)-(a+c)^2}}\right).$$

Notons u l'endomorphisme associé à la matrice de f dans la base canonique. Les directions propres associées à f (les bissectrices de D_1 et D_1') sont les droites dirigées par les $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tels que

$$0 = \det\left((x,y), u(x,y)\right) = \begin{vmatrix} x & ax+by \\ y & bx+cy \end{vmatrix} = bx^2 + (c-a)xy - by^2.$$

Solution 50

1) On a $\theta = \alpha/n + k\pi/n \ \ mod\, \pi, 0 \leq k \leq n-1$.
2) On pose $\alpha = (V, V')$ et il s'agit de trouver les droites W telles que $\theta = (V,W)$ vérifie $n\theta = \alpha \ \ mod\, \pi$. Par la question précédente, on obtient toutes ces droites W comme images de la droite V par les rotations d'angle $\alpha/n + k\pi/n, 0 \leq k \leq n-1$.

Solution 51 On a $u = x + \cos bu''$ et $u' = x' + \cos au''$. Comme $1 = ||u||^2 = ||x||^2 + \cos^2 b$, on a $||x|| = \sin b$. De même, $||x'|| = \sin a$. Ainsi $x = \sin bv$ et $x' = \sin av'$. Donc

$$u = \sin bv + \cos bu'' \ \ , \ \ u' = \sin av' + \cos au''.$$

D'où l'égalité demandée, en tenant compte de fait que v et v' sont orthogonaux à u''.

En notant $\theta \in [0, \pi/2]$ l'angle géométrique entre D et D', on a

$$\cos\theta = \cos a \cos b + \cos\alpha \sin a \sin b \geq \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

(comme $a, b \in [0, \pi/2]$, $\sin a \sin b \geq 0$). D'où $\cos\theta \geq \cos(a + b)$ ce qui implique $\theta \leq a + b$. L'angle géométrique vérifie donc l'inégalité triangulaire. Les deux autres axiomes des distances étant vérifiés, on en déduit que l'angle géométrique est bien une distance sur l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$.

Solution 52

1) Soit τ la translation de vecteur t. Soit Δ_1 une droite orthogonale à t et $\Delta_2 := \Delta_1 + t/2$. On note σ_{Δ_i} la symétrie orthogonale par rapport à Δ_i, $i = 1, 2$. Comme Δ_1 et Δ_2 sont parallèles, les parties linéaires de σ_{Δ_1} et σ_{Δ_2} sont égales, donc la partie linéaire de $\sigma_{\Delta_1} \circ \sigma_{\Delta_2}$ est l'identité (puisqu'une symétrie est une involution). Soit $A \in \Delta_1$. Alors le point A' défini par $A' := \sigma_{\Delta_2} \circ \sigma_{\Delta_1}(A)$ vérifie $\overrightarrow{AA'} = t$. Ainsi τ et $\sigma_{\Delta_2} \circ \sigma_{\Delta_1}$ ont même partie linéaire et co"ıncident en un point. Donc $\tau = \sigma_{\Delta_2} \circ \sigma_{\Delta_1}$.

2) Soit r une rotation de centre O. Après orientation de E, on peut définir la mesure de son angle $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Soit Δ_1 une droite passant par O et Δ_2 l'image de Δ_1 par la rotation d'angle $\theta/2$. On prétend que $r = \sigma_{\Delta_2} \circ \sigma_{\Delta_1}$. En effet, ces deux applications sont égales en O. Il suffit donc de montrer qu'elles ont même partie linéaire. Soit (e_1, e_2) une base orthonormée directe de E, telle que e_1 dirige Δ_1. Alors les matrices de σ_{Δ_1} et σ_{Δ_2} sont dans cette base

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Pour trouver la matrice de σ_{Δ_2}, on peut faire intervenir la matrice de passage de la base (e_1, e_2) à la bon directe (ϵ_1, ϵ_2) telle que ϵ_1 est l'image de e_1 par la rotation d'angle $\theta/2$: ϵ_1 dirige Δ_2 et on trouve

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}.$$

De (2.10), on déduit l'égalité des parties linéaires de r et $\sigma_{\Delta_2} \circ \sigma_{\Delta_1}$. Donc

$$r = \sigma_{\Delta_2} \circ \sigma_{\Delta_1}.$$

3) Une symétrie glissée est le produit commutatif d'une symétrie et d'une translation. On peut donc conclure grâce à 1.

4) Soient maintenant deux rotations ρ_1 et ρ_2 de centre O_1 et O_2 respectivement. On écrit

$$\rho_1 = \sigma_{D_1} \circ \sigma_{D_2} \ , \rho_2 = \sigma_{\Delta_1} \circ \sigma_{\Delta_2}$$

et d'après la preuve de 2), il est loisible de prendre $\Delta_2 = D_1$. On obtient donc $\rho_2 \circ \rho_1 = \sigma_{\Delta_1} \circ \sigma_{D_2}$. La partie linéaire de $\sigma_{\Delta_1} \circ \sigma_{D_2}$ est de déterminant > 0, c'est donc une rotation vectorielle. Si Δ_1 et D_2 sont sécantes en un point O, alors $\sigma_{\Delta_1} \circ \sigma_{D_2}$ fixe O et $\rho_2 \circ \rho_1$ est donc la rotation de centre O (d'où un moyen de construire le centre de la composée de deux rotations). Si Δ_1 et D sont parallèles, $\sigma_{\Delta_1} \circ \sigma_{D_2}$ est une translation de vecteur orthogonal à leur direction commune. (La composée de deux rotations n'est donc pas toujours une rotation ; c'est une translation si et seulement si les deux rotations sont d'angle opposé).

Solution 53 Soit $O \in \mathcal{E}$ et h l'homothétie de centre O et de rapport $1/k$. Alors

$$d(h \circ \phi(M), h \circ \phi(N)) = \frac{1}{k} d(\phi(M), \phi(N)) = d(M, N).$$

Donc $h \circ \phi$ est une isométrie affine (on utilise ici l'exercice 43). Donc $\phi = h^{-1} \circ h \circ \phi$ est une similitude.

Indication 54 Soient $A_1, \ldots, A_n$ les sommets du polygone (on conviendra que $A_j = A_k$ si $j - k \in n\mathbb{Z}$) et O son centre. Soient α_j l'angle au sommet en A_j dans le triangle $A_{j-1}A_jA_{j+1}$, β_j l'angle au sommet en A_j dans le triangle $A_{j-1}A_jO$, et γ_j l'angle en A_j dans le triangle OA_jA_{j+1}. Alors $\alpha_j = \beta_j + \gamma_j$, $\beta_j = \gamma_{j-1}$ d'où $\beta_j = \gamma_{j-1} = \beta_{j-2}$. En déduire que

$$\beta_1 = \ldots = \beta_n = \gamma_1 = \ldots = \gamma_n.$$

Conclure.

Solution 55

a) Notons r la partie linéaire de R. C'est la rotation vectorielle d'angle θ. On a

$$\overrightarrow{AM'} = r(\overrightarrow{AM})$$

Les coordonnées (X, Y) du vecteur $r(\overrightarrow{AM})$ vérifient

$$X = (x - a_1)\cos\theta - (y - a_2)\sin\theta \ , \ Y = (x - a_1)\sin\theta + (y - a_2)\cos\theta,$$

où (x, y) sont les coordonnées de M et (a_1, a_2) celles de A. De manière équivalente $X + iY = e^{i\theta}(z - a)$, où z est l'affixe de M et a celle de A. On en déduit

$$z' = a + e^{i\theta}(z - a).$$

b) La réflexion par rapport à l'axe des abscisses Δ_0 s'écrit $\sigma_0 : z \mapsto \overline{z}$. Soit Δ_θ la droite passant par O formant un angle $\theta \in [0, \pi/2]$ avec Δ_0. On introduit la rotation ρ qui envoie Δ_θ sur Δ_0. Alors $\rho^{-1}\sigma_0\rho$ est une réflexion qui stabilise Δ_θ. On en déduit que la réflexion σ_θ par rapport à Δ_θ est $\rho^{-1}\sigma_0\rho$. Donc $\sigma_\theta(z) = e^{2i\theta}\overline{z}$. Si maintenant on considère une réflexion σ par rapport à un axe passant par un point O' d'affixe z_0 et parallèle à Δ_θ, alors $\sigma = \tau\sigma_\theta\tau^{-1}$ où τ est la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$. Ainsi, $\sigma(z) = e^{2i\theta}\overline{z} + (z_0 - e^{2i\theta}\overline{z_0})$. On peut le réécrire $\sigma(z) = a\overline{z} + b$ avec (a, b) tels que $|a| = 1$ et $a\overline{b} + b = 0$.
Considérons maintenant le cas d'une symétrie glissée. Elle est de la forme $\delta \circ \sigma = \sigma \circ \delta$ où σ est une réflexion par rapport à un axe et δ une translation parallèle à cet axe. Si on caractérise l'axe avec son angle θ par rapport à l'axe horizontal et passant par un point O' d'affixe z_0, on sait que σ s'écrit $\sigma(z) = e^{2i\theta}\overline{z} + (z_0 - e^{2i\theta}\overline{z_0})$. Par ailleurs, δ est de la forme $\delta(z) = z + re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}$. D'où $\delta \circ \sigma(z) = e^{2i\theta}\overline{z} + (z_0 - e^{2i\theta}\overline{z_0}) + re^{i\theta}$. On en déduit qu'une symétrie glissée (où la translation est non triviale) s'écrit toujours $z \mapsto a'\overline{z} + b'$ avec $|a'| = 1$ et $a'\overline{b'} + b' \neq 0$.

c) L'application ω qui s'écrit en nombres complexes $z \mapsto a\overline{z} + b$ est une application affine de partie linéaire $z \mapsto a\overline{z}$. Comme $|a| = 1$, il s'agit d'une isométrie. Dans la base $(1, i)$, elle admet pour matrice (en notant $a = e^{i\phi}$)

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix},$$

qui est de déterminant -1. Donc ω est un antidéplacement, une réflexion ou une symétrie glissée. Dans les deux cas, l'axe fait un angle $\phi/2$ avec l'axe horizontal. C'est une réflexion ssi $\omega^2 = Id$ ssi $a\overline{b} + b = 0$. Si $a\overline{b} + b = 0$, pour trouver l'axe de la rotation (on connaît déjà sa direction), il

suffit de déterminer un point fixe, c'est-à-dire une solution de l'équation $a\overline{z} + b = z$. En posant $Z = z - b/2$ et en utilisant $b/2 = -a\overline{b}/2$, on est ramené à l'équation $Z = e^{i\phi}\overline{Z}$ qu'on sait résoudre (on a une droite de solutions, comme attendu).
Si $a\overline{b} + b \neq 0$, ω n'a pas de point fixe et est donc une antiréflexion. Dans ce cas, pour déterminer le vecteur de la translation associée , on remarque qu' en notant z_1 l'affixe dudit vecteur, on a $2z_1 = \omega \circ \omega(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. On trouve $z_1 = (b + a\overline{b})/2$. Alors $\omega(\cdot) - z_1$ est une réflexion dont on peut trouver un point fixe comme précédemment. Les éléments de ω (axe de la réflexion et vecteur de translation) sont donc entièrement déterminés.

Solution 56 Une homothétie de centre A et de rapport $k \in \mathbb{R} \notin \{0, 1\}$ a pour écriture $z \mapsto k(z-a)+a$, où a est l'affixe du point A.

Les similitudes directes qui ne sont pas des isométries sont des rotations de centre un certain point A composées avec des homothéties de même centre. Une similitude directe qui n'est pas une isométrie admet donc pour écriture

$$z \mapsto a + ke^{i\theta}(z - a),$$

où θ est une mesure de l'angle de la rotation. C'est bien de la forme $\alpha z + \beta$ avec $\alpha := ke^{i\theta}$ et $\beta = a(1 - ke^{i\theta})$. Si la similitude directe est une isométrie directe, c'est une translation $z \mapsto z + \beta$ ou une rotation $z \mapsto e^{i\theta}(z - a) + a$, auquel cas on pose $\alpha = e^{i\theta}$ et $\beta = a(1 - e^{i\theta})$.

Réciproquement, si $z' = \alpha z + \beta$, on cherche un point fixe : l'équation $z = \alpha z + \beta$ admet pour unique solution $z_0 = \dfrac{\beta}{1 - \alpha}$ si $\alpha \neq 1$. Alors, on peut écrire pour tout $z' = \alpha z + \beta$

$$z' - z_0 = |\alpha|e^{i\theta}(z - z_0)$$

où θ est un argument de α. On reconnaît la composée de la rotation $z \mapsto z_0 + e^{i\theta}(z - z_0)$ de centre z_0 et d'angle θ et de l'homothétie $z \mapsto z_0 + |\alpha|(z - z_0)$ de centre z_0 et de rapport α. Enfin si $\alpha = 1$, $z \mapsto z + \beta$ est la translation du vecteur t d'affixe β.

Solution 57 Il existe une rotation f_1 telle que $f_1(u_1) = v_1$. On se ramène ainsi au cas $v_1 = u_1$, ce qu'on suppose désormais. La rotation f cherchée devient alors la rotation d'axe dirigé par u_1 et qui envoie u_2 sur v_2.

Solution 58 Il suffit d'observer que si ϕ est une application affine de partie linéaire f et τ une translation de vecteur t, alors $\phi \circ \tau \circ \phi^{-1}$ est une translation de vecteur $f(t)$.

Solution 59

1) Il suffit de considérer la partie linéaire de ρ qui est la composée des parties linéaires de ρ_1 et ρ_2.
2) Soit P un plan contenant les deux axes Δ_1 et Δ_2 de ρ_1 et ρ_2 (P est défini de manière unique si les deux axes ne sont pas confondus). Notons σ_P la réflexion par rapport à P. Il existe deux plans P_1 et P_2 tels que
$$\rho_1 = \sigma_{P_1} \circ \sigma_P\ ,\ \rho_2 = \sigma_P \circ \sigma_{P_2}.$$
Alors $\rho = \sigma_{P_1} \circ \sigma_{P_2}$. Si P_1 et P_2 sont parallèles, alors ρ est une translation (éventuellement l'identité si $P_1 = P_2$). Si P_1 et P_2 sont sécants, ρ est une rotation d'axe leur droite d'intersection.
3) L'axe Δ_2 est contenu dans le plan médiateur de $[O\rho_2(O)]$. Si $O = \rho(O)$, alors $O = \rho_1(\rho_2(O))$ donc Δ_1 est dans le plan médiateur de $[O, \rho_2(O)]$. Ainsi les deux axes sont coplanaires.
On a ainsi montré que ρ est une translation ou une rotation si et seulement si les deux axes sont coplanaires.

Solution 60 On note f et g les parties linéaires de ϕ et ψ respectivement. On suppose que l'angle γ de $g \circ f$ est égal à $\alpha + \beta$, avec α l'angle de f et β l'angle de g. Soit ψ_1 la rotation affine de même angle que ψ et de même axe orienté que ϕ. On veut montrer que $\psi_1 = \psi$. On note g_1 la partie linéaire de ψ_1. L'angle de $\psi_1 \circ \phi$ est $\alpha + \beta$.

Soit u un vecteur unitaire, $v = f(u)$, $w = g(v)$. Soit w_1 la projection orthogonale de w sur le sous-espace engendré par u et v. Soit $k = g_1 \circ f(u)$. On a

$$\langle w_1, u \rangle = \langle w, u \rangle = \cos\gamma = \cos(\alpha + \beta) = \langle k, u \rangle \ ,$$

et de même $\langle w_1, v \rangle = \langle k, v \rangle = \cos\beta$. On peut de plus choisir u pour que u et v soient linéairement indépendants et donc $w_1 = k$. Comme $||k|| = 1$, on a $w_1 = w$. Donc f et g ont même axe (avec la même orientation). Donc ϕ et ψ ont des axes parallèles.

Réciproquement, si ϕ et ψ ont des axes parallèles avec même orientation et $\alpha + \beta \neq 0$, alors $\psi \circ \phi$ est une rotation affine de partie linéaire $g \circ f$, qui est une rotation vectorielle d'angle $\alpha + \beta$. Lorsque $\alpha + \beta = 0$, $\phi \circ \psi$ est une translation.

Solution 61 Soient π_1, π_2, π_3 les réflexions par rapport aux plans parallèles P_1, P_2, et P_3 de direction le plan vectoriel L. Soit (e_1, e_2) une base orthonormée de L et e_3 un vecteur orthonormal à L. On note f_i la partie linéaire de P_i, $1 \leq i \leq 3$. Alors la matrice des f_i dans la base (e_1, e_2, e_3) est

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est donc aussi la matrice de $f_1 \circ f_2 \circ f_3$. Donc $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3$ est une symétrie glissée par rapport à un plan P de direction L. Déterminons le vecteur t de la translation associée à cette symétrie glissée. On a $t \in L$. Soit Δ une droite orthogonale à P_1. Alors $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3(\Delta) = \Delta = \Delta + t$. Donc t est orthogonal à L. Finalement, $t = 0$. Ainsi, $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3$ est une réflexion par rapport à P. Pour déterminer P, on peut introduire sur Δ un repère (O, ϵ) tel que P_1 soit d'abscisse L_1, P_2 d'abscisse L_2 et P_3 d'abscisse 0. Soit M le point de Δ d'abscisse $-L_2$. Alors $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3(M)$ est le point d'abscisse $2L_1 - L_2$. Donc P est le plan orthogonal à Δ d'abscisse $L_1 - L_2$.

Solution 62 On note r_1, r_2 et r_3 les parties linéaires des 3 réflexions. Il existe une base dans laquelle les matrices de r_1, r_2 et r_3 sont respectivement

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de $r_1 \circ r_2 \circ r_3$ est donc $-Id$. Comme 1 n'est pas valeur propre, la composée de 3 réflexions par rapport à des plans orthogonaux deux à deux est une symétrie centrale, de centre l'intersection des 3 plans.

Solution 63

a) Il suffit d'écrire la matrice de s_P dans une base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = P \oplus P^\perp$ pour observer que $-s_P$ est le demi-tour autour de $P^\perp$.

b) Soient r_1, r_2 deux demi-tours par rapport à des axes dirigés par u_1, u_2 repsectivement. Alors $r_2 \circ r_1$ est un élément de $SO(3)$. En calculant $r_2 \circ r_1(u_1)$, on voit que l'axe de $r_2 \circ r_1$ est dirigé par $u_1 \wedge u_2$ et l'angle (relativement à l'orientation induite par l'axe orienté par $u_1 \wedge u_2$) est $2(u_1, u_2)$. La composée de deux demi-tours est donc un demi-tour ssi les axes de r_1 et r_2 sont orthogonaux.

c) Si ρ est la rotation d'axe D et d'angle θ, et $f \in SO(3)$, alors $f \circ \rho \circ f^{-1}$ est la rotation d'axe $f(D)$ (dont l'orientation est déduite de celle de D par f) et d'angle θ. De plus, l'action naturelle de $SO(3)$ sur l'ensemble des droites vectorielles est transitive. On en déduit que tous les demi-tours dont conjugués entre eux et en utilisant la question précédente que les demi-tours engendrent $SO(3)$.

Solution 64

1) Par l'exercice 63, les demi-tours sont conjugués entre eux. Donc si N contient un demi-tour, il les contient tous. De plus, les demi-tours engendrent $SO(3)$. Donc $N = SO(3)$.
2) Soit $r \in N \setminus \{Id\}$. Alors r ou r^{-1} est une rotation d'angle $]0, \pi]$ (et si la valeur π est prise, on a un demi-tour et on peut conlure). Pour x_1, on le cherche sous la forme $x_1 = \lambda x + \mu a$. Alors

$$||f(x_1) - x_1|| = ||(\lambda y + \mu a) - (\lambda x + \mu a)|| = |\lambda|||y - x|| = |\lambda|d.$$

Il suffit donc de prendre $\lambda = d/m$ si $m \neq 0$ et $\lambda = 0$ si $m = 0$.
3) L'existence de r est une conséquence de l'exercice 57. Notons $g = r \circ f \circ r^{-1}$. Comme N est distingué, $g \in N$. De plus, $g(y_1) = y_2$.
4) $x_n = -x$. Comme $||x_{i+1} - x_i|| \in [0, d]$, par la question précédente, il existe $u_i \in N$ tel que $u_i(x_i) = x_{i+1}$. On a $\nu(x) = x_n = -x$. Ainsi ν est un demi-tour dans N.

Solution 65 Soient A, B, C, D les sommets d'un tétraèdre régulier. Comme $AB = AC$, A est dans le plan médiateur de $[BC]$. De même pour D. Donc la droite (AD) est contenue dans ce plan médiateur. Donc (AD) est perpendiculaire à (BC).

Par ailleurs, soit I le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[AD]$. Alors $AI = ID$, donc le triangle AID est isocèle en I. Or J est le milieu de $[AD]$ donc la droite (IJ) est la médiane du triangle isocèle AID. On en déduit que les droites (IJ) et (AD) sont perpendiculaires. Il en va de même des droites (IJ) et (BC).

Solution 66 Soit ABC un triangle équilatéral de centre Ω et D un point situé sur la perpendiculaire au plan ABC passant par Ω de sorte que $ABCD$ ne soit pas régulier. Le groupe des déplacements contient l'identité et les rotations d'axe (ΩD) et d'angle $2\pi/3$, $4\pi/3$. Montrons que ce sont les seules. On introduit le morphisme naturel Φ de l'ensemble des isométries de $ABCD$ vers Σ_4.

Si r est une rotation qui préserve $\{A, B, C, D\}$,

1) si r préserve $\{A, B, C\}$, elle préserve Ω et le plan contenant A, B, C donc aussi son orthogonal en Ω. L'axe de r est donc (ΩD). Alors r est une des rotations précédentes,
2) si r préserve $\{A, B, D\}$, pour les mêmes raisons, son axe est la droite orthogonale au plan contenant A, B, D et passant par l'isobarycentre du triangle ABD. Mais cet axe ne contient pas C car le tétraèdre n'est par régulier. Cette situation ne peut donc avoir lieu.
3) le dernier cas à envisager est celui où r permute les 4 sommets et cette permutation n'a aucun point fixe : il correspond donc par Φ à un produit de 2 transpositions à support disjoint ou d'un cycle d'ordre 4, donc d'ordre 2 ou d'ordre 4, c'est-à-dire r est une rotation d'angle π ou $\pi/2$. Si r est un demi-tour, r transforme par exemple A en B et C en D donc l'axe de r passe par le milieu de $[AB]$ et de $[CD]$. Mais la droite passant par le milieu de 2 côtés opposés ne passe pas par le centre du tétraèdre puisqu'il n'est pas régulier. Donc le centre du tétraèdre ne serait pas stabilisé, ce qui est impossible. Si r est une rotation d'angle $\pi/2$, alors r^2 est un demi-tour et on vient de voir qu'il n'en existait pas !

En conclusion, les seuls déplacements préservant ce tétraèdre sont l'identité et les rotations d'axe (Ω, D) et d'angle $2\pi/3$ et $4\pi/3$. Toujours grâce au déterminant, on sait que le sous-groupe des déplacements G est d'indice 2 dans le groupe des isométries H qui préservent le tétraèdre. Ce-dernier contient donc

6 éléments : outre les 3 déplacements précédents, les 3 réflexions par rapport aux plans passant par une arête longue et le milieu de l'arête courte opposée. Soit σ l'une de ces réflexions. Alors $H = G \cup \sigma G$ est isomorphe à un produit semi-direct $G \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, i.e. au groupe diédral d'ordre 6 (car il existe une section de la projection canonique $H \to G/H$, comme dans le cas des polygones réguliers, et les rotations ne commutent pas avec σ).

Solution 67 On considère le cercle de centre le milieu de $[AB]$, contenu dans le plan médiateur de $[AB]$ et passant par C. Tout point M de ce cercle vérifie $MA = MB = CA = CB$.Le diamètre de ce cercle est $2\sqrt{AC^2 - AB^2/4} > AB$. Donc (par exemple par le théorème des valeurs intermédiaires), il existe un point D sur ce cercle tel que $CD = AB$. Le tétraèdre $ABCD$ a des faces qui sont des triangles isocèles isométriques (et donc de même aire) mais qui ne sont pas équilatéraux.

Soit $ABCD$ un tétraèdre qui a ses 4 faces de même aire. Comme $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC}$, on a

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{JC},$$

car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires. De plus, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{IJ}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IJ}$. Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{JC}$ est colinéaire à $\overrightarrow{IJ}$. Donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{JC}$ sonc orthogonaux. On en déduit la première égalité demandée par le théorème de Pythagore. La deuxième égalité se démontre de manière analogue.

Comme les faces ont même aire, $||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|| = ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}||$ et donc par les égalités précédentes, on a $JC = JD$. Ainsi J est le milieu de CD. De même, I est le milieu de AB. Comme (IJ) est aussi perpendiculaire à (AB) et (CD), on en déduit que le retournement autour de la droite (IJ) envoie A sur B et C sur D, et donc envoie le triangle ABC sur le triangle BAD. Donc les faces ABC et BAD sont isométriques. On peut reproduire cette preuve pour tout couple de faces du tétraèdre. Finalement, toutes ses faces sont isométriques.

Solution 68 Fixons $\Omega_1 \in \mathcal{D}_1$, $\Omega_2 \in \mathcal{D}_2$ et e_1, e_2 des vecteurs unitaires dirigeant $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ respectivement. Alors

$$(t_1, t_2) \mapsto d(\Omega_1 + t_1 e_1, \Omega_2 + t_2 e_2)^2$$

est une forme quadratique uniformément convexe (le vérifier !) donc elle admet un unique minimum en $(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$, ce qui définit deux points $M_i = \Omega_i + \bar{t}_i e_i$, $1 \leq i \leq 2$.

Nécessairement, M_2 est la projection orthogonale de M_1 sur $\mathcal{D}_2$ (car M_2 rend minimale $d(\cdot, M_1)$ sur $\mathcal{D}_2$). Donc la droite (M_1M_2) est perpendiculaire à $\mathcal{D}_2$. De même elle est perpendiculaire à $\mathcal{D}_1$.

Enfin, si $A_1 \in \mathcal{D}_1$, $A_2 \in \mathcal{D}_2$ sont tels que la droite (AB) est perpendiculaire à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, alors en écrivant $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2B}$, on obtient

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle = \langle \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{AB} \rangle \leq ||\overrightarrow{M_1M_2}||||\overrightarrow{AB}||$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. D'où $||\overrightarrow{AB}|| \leq ||\overrightarrow{M_1M_2}||$.
Comme $||\overrightarrow{M_1M_2}||$ est minimum, $||\overrightarrow{AB}|| = ||\overrightarrow{M_1M_2}||$. Par cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M_1M_2}$, donc aussi $\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{BM_2}$. Comme les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèles, c'est que $A = M_1$ et $B = M_2$. On aurait pu aussi utiliser l'unicité du minimum de la forme quadratique uniformément convexe.

Solution 69 Si $k = 1$, alors $\mathcal{E}$ est la médiatrice de $[AB]$, $\mathcal{E}_+$ le demi-plan contenant B et $\mathcal{E}_-$ le demi-plan contenant A.

On suppose maintenant $k \neq 1$. Soient G_1 le barycentre de $\{(A,1),(B,-k)\}$ et G_2 le barycentre de $\{(A,1),(B,k)\}$. Alors

$$M \in \mathcal{E} \iff MA^2 - k^2 MB^2 = 0 \iff \langle \overrightarrow{Ma} - k\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} \rangle = 0$$

$$\iff \langle \overrightarrow{MG_1}, \overrightarrow{MG_2} \rangle = 0.$$

Introduisons un repère de centre le milieu de $[G_1G_2]$ et dont le premier axe est la droite (G_1G_2). En notant a l'abscisse de G_1, l'égalité précédente se réécrit

$$M \in \mathcal{E} \iff x^2 + y^2 = a^2.$$

Ainsi, $\mathcal{E}$ est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$. De même, $\mathcal{E}_+$ est l'extérieur du disque et $\mathcal{E}_-$ est l'intérieur du disque (pourquoi ?).

Solution 70 Notons $\Psi(x, y, z) = ax + by + cz + d$. Soit H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{H}$. Alors le vecteur $\overrightarrow{HA}$ est colinéaire à (a, b, c) : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{HA} = \lambda(a, b, c).$$

En écrivant $0 = \Psi(H)$, il vient

$$\lambda = \frac{\Psi(A)}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Ainsi $||\overrightarrow{HA}|| = |\Psi(A)|/||(a, b, c)||$.

Chapitre 3

Convexité

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et de dimension $n \geq 1$.

3.1 Topologie et calcul différentiel dans un espace affine

Si E est muni d'une norme, alors $\mathcal{E}$ est naturellement muni de la distance

$$d(A,B) = ||\overrightarrow{AB}||$$

qui fait de $\mathcal{E}$ un espace métrique. On parlera d'espace affine métrique. C'est automatiquement le cas si $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien. Mais la notion de projection sur un convexe fermé apparaît dans le programme de l'agrégation sous le chapitre affine (d'où ce cadre un peu plus général).

Exercice 76 *1) Montrer que $U \subset E$ est ouvert si et seulement si $O + U \subset \mathcal{E}$ est ouvert pour tout $O \in \mathcal{E}$.*
2) Montrer qu'une application affine est continue.
3) Montrer qu'une bijection affine (respectivement une fonction affine non constante) est ouverte.
4) Deviner une définition de la différentiabilité d'une fonction définie sur un ouvert d'un espace affine (à valeurs dans un Banach).

3.2 Définition et propriétés élémentaires

Etant donnés deux points A, B de $\mathcal{E}$, le segment $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\theta\overrightarrow{MA} + (1-\theta)\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$ pour un $\theta \in [0,1]$.

Définition 30 *Une partie de $\mathcal{C}$ est dite convexe si pour tout $A, B \in \mathcal{C}$, le segment $[AB]$ est contenu dans $\mathcal{C}$.*

On pourrait formuler une définition analogue dans un espace vectoriel.

L'ensemble vide, un point, un segment, un sous-espace affine sont des convexes. Une boule dans un espace affine métrique est convexe.

Exercice 77 *1) Une intersection de convexes est convexe.*
2) L'image de tout convexe par une application affine est convexe.
3) L'image réciproque de tout convexe par une application affine est convexe.
4) Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.

Preuve : 2) L'image par une application affine ϕ d'un segment $[AB]$ est le segment $[\phi(A)\phi(B)]$ (et même plus précisément, l'image du barycentre de $\{(A,\theta)(B,1-\theta)\}$ est le barycentre de $\{(\phi(A),\theta),(\phi(B),1-\theta)\}$).

3) Soient $A, B \in \phi^{-1}(\mathcal{C})$. Comme $\phi([AB]) = [\phi(A)\phi(B)] \subset \mathcal{C}$, on a $[AB] \subset \phi^{-1}(\mathcal{C})$.

4) Soit $I \subset \mathbb{R}$ convexe et $a := \inf I$, $b := \sup I$. Alors $\forall c \in]a,b[$, il existe $a_1, b_1 \in I$ tels que $a_1 < c < b_1$. Donc $c \in [a_1, b_1] \subset I$ (car I convexe). Ainsi $]a,b[\subset I$. Or $I \subset [a,b]$. Donc I est bien un intervalle.

□

Définition 31 *L'intersection de tous les convexes contenant la partie $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ est une partie convexe de $\mathcal{E}$ appelée l'enveloppe convexe de $\mathcal{E}$.*

Proposition 20 *L'enveloppe convexe de $\mathcal{S}$ est l'ensemble des barycentres de points de $\mathcal{S}$ affectés de coefficients positifs.*

Preuve : Appelons combinaison convexe de points $M_1, ..., M_k$ un barycentre de $M_1, ..., M_k$ affectés de coefficients positifs. Soit $\mathcal{A}$ l'enveloppe convexe de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{B}$ l'ensemble des combinaisons convexes de points de $\mathcal{S}$.

Lemme 5 *$\mathcal{B}$ est convexe.*

Preuve : Soient A le barycentre de $\{(M_1,\alpha_1), ..., (M_k,\alpha_k)\}$ et B le barycentre de $\{(M_{k+1},\alpha_{k+1}), \ldots, (M_l,\alpha_l)\}$ avec

$$M_i \in \mathcal{S}\ ,\ \alpha_i > 0\ ,\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1\ ,\ \sum_{i=k+1}^{l} \alpha_i = 1.$$

Soit $\theta \in [0,1]$. Alors le barycentre de $\{(A,\theta),(B,(1-\theta))\}$ est le barycentre de

$$\{(M_i,\beta_i)\}\ ,\ \text{avec } \beta_i = \theta\alpha_i \text{ si } i \leq k \text{ et } \beta_i = (1-\theta)\alpha_i \text{ sinon}$$

(associativité du barycentre). Donc le segment $[AB]$ est contenu dans $\mathcal{B}$, ce qui prouve le lemme.

□

On déduit de ce lemme que $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$.

Lemme 6 *Si $\mathcal{C}$ est un convexe, alors $\mathcal{C}$ contient toutes les combinaisons convexes de points de $\mathcal{C}$*

Preuve : On montre par récurrence sur k que si A est combinaison convexe de k points de $\mathcal{C}$ alors $A \in \mathcal{C}$. La proposition est évidente pour $k = 1$ et vraie pour $k = 2$ par définition. Supposons la vraie pour k et montrons-la pour $k+1$. Soit A le barycentre de $\{(M_1,\alpha_1), ..., (M_{k+1},\alpha_{k+1})\}$ avec $\alpha_i > 0$. Soit B le barycentre de $\{(M_1,\alpha_1), ..., (M_k,\alpha_k)\}$. Par hypothèse de récurrence, $B \in \mathcal{C}$. Alors le point A est barycentre de $\{(B, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i), (M_{k+1},\alpha_{k+1})\}$. Donc $A \in \mathcal{C}$ car la propriété est vraie pour $k = 2$. Donc la propriété est vraie pour tout k ce qui montre le lemme.

□

On déduit de ce lemme que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, ce qui achève la preuve de la proposition.

□

3.3 Convexes et topologie

Exercice 78 *Montrer que l'enveloppe convexe d'un fermé n'est pas nécessairement fermée.*

Preuve : Considérer l'enveloppe convexe de l'ensemble $\mathcal{S} := \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 : xy = 1\}$.

□

Théorème 4 Théorème de Carathéodory *Soit $\mathcal{S}$ une partie de $\mathcal{E}$. Tout élément de l'enveloppe convexe de $\mathcal{S}$ est combinaison convexe d'au plus $n+1$ points de $\mathcal{S}$ (où $n = \ dim\, E$). En particulier, l'enveloppe convexe d'un compact est compacte.*

Preuve : Pour montrer la première assertion, il suffit de montrer que si M est combinaison convexe de k points de $\mathcal{S}$ avec $k > n+1$, alors on peut écrire M comme combinaison convexe de $k-1$ points de $\mathcal{S}$. Ainsi, fixons $O \in \mathcal{E}$ et écrivons

$$M = O + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}\ ,\ k > n+1\ ,\ A_i \in \mathcal{S}\ ,\ \alpha_i > 0\ ,\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1.$$

Considérons l'application

$$(\mu_1, ..., \mu_k) \in \mathbb{R}^k \mapsto (\sum_{i=1}^{k} \mu_i \overrightarrow{OA_i}, \sum_{i=1}^{k} \mu_i) \in E \times \mathbb{R}.$$

Cette application est non injective pour raison de dimension. Prenons $(\mu_1, ..., \mu_k) \neq 0$ dans son noyau. Alors pour tout $t > 0$,

$$M = O + \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i + t\mu_i) \overrightarrow{OA_i}.$$

On a encore $\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i + t\mu_i) = 1$. Il suffit donc de trouver $t \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha_i + t\mu_i \geq 0$ pour tout i et $\alpha_i + t\mu_i = 0$ pour au moins un i. On prend

$$t := \inf_{i:\mu_i<0} (-\alpha_i/\mu_i) > 0.$$

Pour montrer la deuxième assertion, on considère l'application

$$\Phi : (A_i)_{1\leq i\leq n+1} \times (\alpha_i)_{1\leq i\leq n+1} \in \mathcal{S}^{n+1} \times [0,1]^{n+1} \mapsto O + \sum \alpha_i \overrightarrow{OA_i} \in \mathcal{S}$$

qui est surjective par ce qui précède, continue (car $\Phi - O$ est une application bilinéaire en dimension finie, donc continue) sur un compact (comme produit de deux compacts). D'où le résultat.

$\square$

Proposition 21 *1) Si $\mathcal{C}$ est convexe, alors $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$ et $\overline{\mathcal{C}}$ le sont aussi.*

2) Soient $A \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$ et $D \in \overline{\mathcal{C}}$. Alors $[AD[\subset \overset{\circ}{\mathcal{C}}$.

3) Lorsque $\overset{\circ}{\mathcal{C}} \neq \emptyset$, on a $\overline{\overset{\circ}{\mathcal{C}}} = \overline{\mathcal{C}}$ et $\overset{\circ}{\overline{\mathcal{C}}} = \overset{\circ}{\mathcal{C}}$ et cette deuxième égalité reste vraie si $\overset{\circ}{\mathcal{C}} = \emptyset$.

Preuve : Fixons $O \in \mathcal{E}$.

1) Pour tout $\theta \in [0,1]$, l'application

$$\Phi(M,N) \mapsto O + \theta\overrightarrow{OM} + (1-\theta)\overrightarrow{ON}$$

est continue, donc $\Phi(\overline{\mathcal{C} \times \mathcal{C}}) \subset \overline{\Phi(\mathcal{C} \times \mathcal{C})}$. Comme $\mathcal{C}$ est convexe, on a $\Phi(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$. On conclut en notant que $\overline{\mathcal{C} \times \mathcal{C}} = \overline{\mathcal{C}} \times \overline{\mathcal{C}}$.

L'assertion concernant l'intérieur est une conséquence de 2).

2) Il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(A,r)$ soit contenue dans $\mathcal{C}$. Soit $\theta \in]0,1[$ et $M = D + \theta\overrightarrow{DA}$. Soit $D' \in \mathcal{C} \cap B(D, \dfrac{\theta}{1-\theta} r)$ et

$$\mathcal{O} := \{D' + \theta\overrightarrow{D'A'} : A' \in B(A,r)\}.$$

Alors $\mathcal{O}$ est ouvert (car l'application $A' \mapsto D' + \theta\overrightarrow{D'A'}$ est ouverte comme toutes les bijections affines). Or M s'écrit $D' + \theta\overrightarrow{D'A'}$ avec A' défini par $\overrightarrow{AA'} = \dfrac{1-\theta}{\theta}\overrightarrow{D'D}$ et $||\overrightarrow{DD'}|| < \dfrac{\theta}{1-\theta}r$ d'où $||\overrightarrow{AA'}|| < r$. Donc $M \in \mathcal{O} \subset \mathcal{C}$ et donc $M \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$ ce qui montre que $[AD[\subset \overset{\circ}{\mathcal{C}}$.

3) On a toujours $\overset{\circ}{\overline{\mathcal{C}}} \subset \overline{\mathcal{C}}$ et $\overset{\circ}{\mathcal{C}} \subset \overline{\overset{\circ}{\mathcal{C}}}$. Pour les inclusions réciproques, on considère deux cas :

a) Supposons $\overset{\circ}{\mathcal{C}} \neq \emptyset$. Soit alors $A \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$.

Montrons que $\overline{\overset{\circ}{\mathcal{C}}} \supset \overline{\mathcal{C}}$. Soit $B \in \mathcal{C}$. Par 2), on a $B \in \overline{[A,B[} \subset \overline{\overset{\circ}{\mathcal{C}}}$. Ainsi $\mathcal{C} \subset \overline{\overset{\circ}{\mathcal{C}}}$ d'où l'on déduit $\overline{\mathcal{C}} \subset \overline{\overset{\circ}{\mathcal{C}}}$.

Montrons à présent que $\overset{\circ}{\overline{\mathcal{C}}} \subset \overset{\circ}{\mathcal{C}}$. Soit $D \in \overset{\circ}{\overline{\mathcal{C}}}$. Alors il existe $r > 0$ tel que $B(D,r) \subset \overline{\mathcal{C}}$. Notons $\mathcal{G} = \{A + \theta\overrightarrow{AM} : M \in B(D,r), \theta \in [0,1[\}$. Alors par 2)

$$\mathcal{G} \subset \overset{\circ}{\mathcal{C}}. \tag{3.1}$$

De plus, $\mathcal{G} \supset B(D,r/2)$. En effet, si $N \in B(D,r/2)$, soient M et θ tels que $N = A + \theta\overrightarrow{AM}$. On a alors

$$\overrightarrow{DM} = \frac{1-\theta}{\theta}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{\theta}\overrightarrow{DN}$$

et donc

$$||\overrightarrow{DM}|| \leq \frac{1-\theta}{\theta}||\overrightarrow{AD}|| + \frac{1}{\theta}||\overrightarrow{DN}|| \leq \frac{1-\theta}{\theta}||\overrightarrow{AD}|| + \frac{1}{\theta}\frac{r}{2}.$$

Ainsi, pour θ assez proche de 1, $||\overrightarrow{DM}|| < r$.

b) Supposons $\overset{\circ}{\mathcal{C}} = \emptyset$. Alors

Lemme 7 *Aff $(\mathcal{C})$ est contenu dans un hyperplan.*

Preuve du lemme : Sinon, Aff $(\mathcal{C}) = \mathcal{E}$. Donc il existe $A_0, ..., A_n \in \mathcal{C}$ tel que $(\overrightarrow{A_0A_i})_{1\leq i\leq n}$ est une base de E. Alors l'enveloppe convexe des points $A_0, ..., A_n$ est homéomorphe au simplexe standard

$$S := \{(t_1, ..., t_n) : 0 \leq t_i, \sum_{i=1}^{n} t_i \leq 1\}$$

par l'application $(t_1, ..., t_n) \mapsto A_0 + \sum t_i\overrightarrow{A_0A_i}$. Or le simplexe standard est d'intérieur non vide (il contient l'ouvert obtenu en remplaçant dans la définition de S les inégalités larges par des inégalités strictes). On en déduit que $\mathcal{C}$ est d'intérieur non vide, ce qui contredit l'hypothèse et achève la preuve du lemme.

Le lemme implique que $\overline{\mathcal{C}}$ est contenu dans l'adhérence d'un hyperplan, donc dans cet hyperplan lui-même, qui est d'intérieur vide, donc

$$\overset{\circ}{\overline{\mathcal{C}}} = \emptyset = \overset{\circ}{\mathcal{C}}.$$

$\square$

3.4 Projection sur un convexe fermé et séparation

3.4.1 Demi-espaces

Soit $\phi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ une fonction affine non constante, définissant l'hyperplan affine $\mathcal{V} := \phi^{-1}(0)$. Comme ϕ est continue (quelle que soit la topologie de $\mathcal{E}$ définie par une norme de E), les ensembles

$\phi^{-1}(\mathbb{R}^+)$ et $\phi^{-1}(\mathbb{R}^-)$ sont fermés dans $\mathcal{E}$, tandis que les ensembles $\phi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ et $\phi^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$ sont ouverts dans $\mathcal{E}$. Ce sont les demi-espaces fermés (resp. ouverts) délimités par $\mathcal{V}$. Ce sont des convexes (comme images réciproques de convexes).

Les demi-espaces ne dépendent pas de ϕ au sens où si ψ est une autre fonction affine telle que $\psi^{-1}(0) = \mathcal{V}$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\psi = \lambda\phi$.

Si E est muni d'une structure euclidienne, alors on peut définir un hyperplan vectoriel H par la donnée d'un vecteur non nul $\nu \in E$ par $H := \nu^\perp$. Alors pour tout point $A \in \mathcal{E}$, on peut définir l'hyperplan affine passant par A de direction H par

$$\mathcal{H} := A + H = \{M \in \mathcal{E} : \langle \overrightarrow{AM}, \nu\rangle = 0\}.$$

On a $\mathcal{H} := \phi^{-1}(0)$ où ϕ est la fonction affine $\phi(M) = \langle \overrightarrow{AM}, \nu\rangle$. Les deux demi-espaces fermés sont alors donnés par

$$\{M : \langle \overrightarrow{AM}, \nu\rangle \geq \text{ (resp } \leq \text{) } 0\}$$

(et on obtient les demi-espaces ouverts en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes).

3.4.2 Projection sur un convexe fermé

Lemme 8 *Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide fermée de $\mathcal{E}$ et $M \in \mathcal{E}$. Alors il existe $N \in \mathcal{A}$ tel que $d(M,N) = d(M,\mathcal{A})$ où $d(M,\mathcal{A}) := \inf_{N' \in \mathcal{A}} d(M,N')$.*

Preuve : Soit $N_0 \in \mathcal{A}$ et

$$\mathcal{A}_0 := \{A \in \mathcal{A} : d(M,A) \leq d(M,N_0)\}.$$

Alors $d(M,\mathcal{A}) = d(M,\mathcal{A}_0)$ et $\mathcal{A}_0$ est fermé, borné donc compact. Autrement dit, on s'est ramené au cas où $\mathcal{A}$ est compact, ce que l'on suppose désormais. La fonction $N \in \mathcal{A} \mapsto d(M,N)$ est continue (elle est même 1 lipschitzienne, par l'inégalité triangulaire) donc atteint son minimum sur le compact $\mathcal{A}$ en un point N qui répond à l'énoncé.

□

Dans la suite de ce paragraphe, on suppose E muni d'une structure euclidienne.

Théorème 5 *Soit $\mathcal{C}$ un convexe non vide fermé. Alors pour tout $M \in \mathcal{E}$, il existe un unique point $p(M) \in \mathcal{C}$ tel que $d(M,\mathcal{C}) = ||\overrightarrow{p(M)M}||$. On l'appelle la projection de M sur $\mathcal{C}$. De plus, le point $p(M)$ est caractérisé par*

$$\forall A \in \mathcal{C}\ ,\ \langle \overrightarrow{p(M)M}, \overrightarrow{p(M)A}\rangle \leq 0. \tag{3.2}$$

L'application $M \mapsto p(M)$ est 1 lipschitzienne.

Preuve : La projection existe par le lemme précédent. Montrons l'unicité de la projection. Soient $N_1, N_2 \in \mathcal{C}$ tels que

$$||\overrightarrow{N_1M}|| = ||\overrightarrow{N_2M}|| = d(M,\mathcal{C}).$$

Considérons le milieu de $[N_1N_2]$ que l'on note N. Alors $N \in \mathcal{C}$ car $\mathcal{C}$ est convexe et

$$||\overrightarrow{NM}||^2 = ||\frac{1}{2}\overrightarrow{N_1M} + \frac{1}{2}\overrightarrow{N_2M}||^2 = \frac{1}{4}(||\overrightarrow{N_1M}||^2 + ||\overrightarrow{N_2M}||^2 + 2\langle \overrightarrow{N_1M}, \overrightarrow{N_2M}\rangle)$$

$$= \frac{1}{2}(d(M,\mathcal{C})^2 + \langle \overrightarrow{N_1M}, \overrightarrow{N_2M}\rangle)$$

$$||\overrightarrow{N_2N_1}||^2 = ||\overrightarrow{MN_1} - \overrightarrow{MN_2}||^2 = ||\overrightarrow{N_1M}||^2 + ||\overrightarrow{N_2M}||^2 - 2\langle \overrightarrow{MN_1}, \overrightarrow{MN_2}\rangle$$

$$= 2(d(M,\mathcal{C})^2 - \langle \overrightarrow{N_1M}, \overrightarrow{N_2M}\rangle)$$

d'où

$$||\overrightarrow{NM}||^2 + \frac{1}{4}||\overrightarrow{N_2N_1}||^2 = d(M,\mathcal{C})^2$$

(on vient juste de redémontrer la formule du parallélogramme $||(x+y)/2||^2 + ||(x-y)/2||^2 = ||x||^2/2 + ||y||^2/2$). Comme $N \in \mathcal{C}$, on a $||\overrightarrow{MN}||^2 \geq d(M,\mathcal{C})^2$ et donc

$$d(M,\mathcal{C})^2 + \frac{1}{4}||\overrightarrow{N_2N_1}||^2 \leq d(M,\mathcal{C})^2$$

ce qui implique $N_1 = N_2$. D'où l'unicité.

Montrons (3.2). Soit $M \in \mathcal{E}$. Pour tout $N \in \mathcal{C}$, on a

$$N = p(M) \Longleftrightarrow \forall N' \in \mathcal{C}, ||\overrightarrow{NM}|| \leq ||\overrightarrow{N'M}||$$

$$\Longleftrightarrow \forall N' \in \mathcal{C}, \forall t \in [0,1], ||\overrightarrow{NM}|| \leq ||\overrightarrow{NM} - t\overrightarrow{NN'}||$$

car le point $N_t := N + t\overrightarrow{NN'}$ est dans $[NN'] \subset \mathcal{C}$. Donc

$$N = p(M) \Longleftrightarrow \forall N' \in \mathcal{C}, \forall t \in [0,1], ||\overrightarrow{NM}||^2 \leq ||\overrightarrow{NM} - t\overrightarrow{NN'}||^2$$

$$= t^2||\overrightarrow{NN'}||^2 - 2t\langle\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NN'}\rangle + ||\overrightarrow{NM}||^2$$

$$N = p(M) \Longleftrightarrow \forall N' \in \mathcal{C}, \forall t \in [0,1], t^2||\overrightarrow{NN'}||^2 \geq 2t\langle\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NN'}\rangle.$$

En divisant par t puis en faisant $t \to 0^+$, on obtient le résultat.

Montrons enfin que p est 1 lipschitzienne. Soit $M, M' \in \mathcal{E}$. En sommant les deux inégalités

$$\langle\overrightarrow{p(M)M}, \overrightarrow{p(M)p(M')}\rangle \leq 0 \ , \ \langle\overrightarrow{p(M')M'}, \overrightarrow{p(M')p(M)}\rangle \leq 0,$$

et en réarrangeant, il vient

$$||\overrightarrow{p(M)p(M')}||^2 \leq \langle\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{p(M)p(M')}\rangle$$

d'où le résultat en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le membre de droite.

□

Pour tout $A \in \mathcal{C}$, $p(A) = A$ (puisque $d(A, p(A)) = 0$ et qu'on ne peut pas faire mieux !)

Définition 32 *Soit $\mathcal{C}$ un convexe et $A \in \mathcal{C}$. On dit que $\nu \in E \setminus \{0\}$ est un vecteur normal à $\mathcal{C}$ en A si*

$$\langle \nu, \overrightarrow{AM}\rangle \leq 0 \ \text{ pour tout } M \in \mathcal{C}.$$

On remarque que si $\mathcal{C}$ est un convexe non vide fermé et $M \notin \mathcal{C}$, alors grâce à (3.2), le vecteur $(\overrightarrow{p(M)M})$ est un vecteur normal à $\mathcal{C}$ en $p(M)$. En particulier, $\mathcal{C}$ est contenu dans le demi-espace fermé

$$\{N \in \mathcal{E} : \langle\overrightarrow{p(M)M}, \overrightarrow{p(M)N}\rangle \leq 0\}.$$

Proposition 22 *Soit $\mathcal{C}$ un convexe non vide et $A \in \partial\mathcal{C}$. Alors il existe un vecteur non nul normal à $\mathcal{C}$ en A.*

Preuve : On note $p(M)$ la projection d'un point M sur l'adhérence de $\mathcal{C}$ notée $\bar{\mathcal{C}}$.

Soit (M_n) une suite dans $\mathcal{E} \setminus \bar{\mathcal{C}}$ qui converge vers A. (La suite (M_n) existe car $A \notin \overset{\circ}{\mathcal{C}} = \overset{\circ}{\bar{\mathcal{C}}}$.) Soit

$$\nu_n := \frac{\overrightarrow{p(M_n)M_n}}{||\overrightarrow{p(M_n)M_n}||}.$$

C'est une suite de vecteurs unitaires. Après extraction, on peut supposer que la suite ν_n converge vers un vecteur unitaire ν. On prétend que ν est un vecteur normal à $\mathcal{C}$ en A. Fixons $B \in \mathcal{C}$. Il suffit de montrer que

$$\langle \nu, \overrightarrow{AB} \rangle \leq 0.$$

Or, pour tout n en utilisant (3.2) avec M_n,

$$\langle \nu_n, \overrightarrow{p(M_n)B} \rangle \leq 0.$$

Comme (M_n) converge vers A, la suite $(p(M_n))$ converge vers $p(A) = A$ (car p est 1 lipschitzienne). Comme le produit scalaire est une application bilinéaire continue, on a

$$\langle \nu, \overrightarrow{AB} \rangle \leq 0.$$

□

3.4.3 Théorème de Hahn-Banach

Définition 33 *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des parties de $\mathcal{E}$. On dit qu'un hyperplan $\mathcal{H}$ sépare (resp. sépare strictement) $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ si $\mathcal{A}$ est contenu dans l'un et $\mathcal{B}$ est contenu dans l'autre des deux demi-espaces fermés (resp. ouverts) déterminés par $\mathcal{H}$.*

Définition 34 *Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{E}$ et x dans la frontière de $\mathcal{A}$. Un hyperplan d'appui de $\mathcal{A}$ en x est un hyperplan contenant x et séparant $\mathcal{A}$ et x.*

Proposition 23 *Si $\mathcal{C}$ est convexe, alors tout point de la frontière de $\mathcal{C}$ appartient à au moins un hyperplan d'appui de $\mathcal{A}$.*

Preuve : On munit $\mathcal{E}$ d'une structure euclidienne. Soit ν un vecteur normal à $\mathcal{C}$ en un point A de la frontière. Alors l'hyperplan

$$\mathcal{H} := A + \nu^{\perp} = \{M : \langle \nu, \overrightarrow{AM} \rangle = 0\}.$$

convient car pour tout $M \in \mathcal{C}$, $\langle \nu, \overrightarrow{AM} \rangle \leq 0$.

□

Théorème 6 *Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des convexes non vides et disjoints, on peut les séparer. Si de plus ils sont tous les deux ouverts, ou si l'un est compact et l'autre fermé, alors on peut les séparer strictement.*

Preuve : On munit $\mathcal{E}$ d'une structure euclidienne et on fixe $O \in \mathcal{E}$. On se ramène au cas vectoriel en posant

$$X := \{\overrightarrow{OA} : A \in \mathcal{A}\} \ , \ Y := \{\overrightarrow{OB} : B \in \mathcal{B}\}.$$

Alors X et Y sont 2 convexes non vides disjoints de la direction E de $\mathcal{E}$ (ouvert, fermé ou compact si le convexe affine correspondant l'est). On va montrer qu'il existe $\nu \in E \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\forall (x, y) \in X \times Y$,

$$\langle \nu, x \rangle \leq \alpha \leq \langle \nu, y \rangle \tag{3.3}$$

avec inégalité stricte si les 2 convexes sont ouverts ou si l'un est fermé et l'autre compact.

Le résultat de séparation pour les convexes affines s'en déduit aussitôt : $\forall A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$,

$$\langle \nu, \overrightarrow{OA} \rangle \leq \alpha \leq \langle \nu, \overrightarrow{OB} \rangle.$$

On pose $\mathcal{H} = \{M : \langle \nu, \overrightarrow{OM} \rangle = \alpha\}$. Alors $\mathcal{H}$ sépare $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ (et la séparation est stricte lorsque $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont ouverts ou lorsque $\mathcal{A}$ est fermé et $\mathcal{B}$ est compact).

Montrons donc (3.3).

1) On commence par considérer le cas où Y est un point $\{y\}$. Ainsi $y \notin X$. On distingue deux cas :

a) Le point y n'appartient pas à l'adhérence de X. On note p la projection sur le convexe fermé $\overline{X}$. On a $\forall x \in X$, $\langle y - p(y), x - p(y) \rangle \leq 0$. En posant $\nu := \overrightarrow{p(y)y}$, on en déduit

$$\langle \nu, x \rangle \leq \langle \nu, p(y) \rangle = \langle \nu, y \rangle + \langle \nu, p(y) - y \rangle = \langle \nu, y \rangle - |y - p(y)|^2$$

et dans ce cas, on peut poser $\alpha = \langle \nu, p(y) \rangle + |y - p(y)|^2/2$ pour avoir (3.3), et de plus l'inégalité est stricte.

b) Le point y appartient à l'adhérence de X et donc nécessairement à la frontière de X. On prend ν un vecteur normal à X en y. On a alors $\forall x \in X$, $\langle \nu, x - y \rangle \leq 0$ et donc

$$\langle \nu, x \rangle \leq \langle \nu, y \rangle.$$

On pose $\alpha = \langle \nu, y \rangle$ pour avoir (3.3).

2) Dans le cas général, on pose $C := X - Y := \{x - y, x \in X, y \in Y\}$. C'est un convexe non vide de E qui ne contient pas 0. Par le cas précédent, il existe $\nu \in E \setminus \{0\}$ et $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall (x, y) \in X \times Y$,

$$\langle \nu, x - y \rangle \leq \alpha_0 \leq \langle \nu, 0 \rangle = 0 \tag{3.4}$$

(avec inégalité stricte si $0 \notin \overline{C}$). On en déduit

$$\langle \nu, x \rangle \leq \alpha_0 + \langle \nu, y \rangle \leq \langle \nu, y \rangle \tag{3.5}$$

et donc

$$\sup_{x \in X} \langle \nu, x \rangle \leq \alpha_0 + \inf_{y \in Y} \langle \nu, y \rangle \leq \inf_{y \in Y} \langle \nu, y \rangle. \tag{3.6}$$

On peut donc poser $\alpha = \alpha_0 + \inf_{y \in Y} \langle \nu, y \rangle$ pour avoir (3.3).

Montrons que la séparation est stricte lorsqu'on dispose des hypothèses topologiques supplémentaires. Si X est fermé et Y est compact, alors $X - Y$ est fermé (comme on le vérifie facilement par un critère séquentiel). Alors $\overline{C} = C$. Donc $0 \notin \overline{C}$ et on a des inégalités strictes dans (3.4) : $\alpha_0 < 0$, ce qui implique

$$\sup_{x \in X} \langle \nu, x \rangle < \frac{\alpha_0}{2} + \inf_{y \in Y} \langle \nu, y \rangle < \inf_{y \in Y} \langle \nu, y \rangle.$$

On peut poser $\alpha = \alpha_0/2 + \inf_{y \in Y} \langle \nu, y \rangle$ pour avoir inégalité stricte dans (3.3).

Enfin, si X et Y sont ouverts, alors $\{\langle \nu, x \rangle : x \in X\}$ et $\{\langle \nu, y \rangle : y \in Y\}$ sont des intervalles ouverts (voir Exercice 76), ce qui implique que pour tout $x \in X$, $\langle \nu, x \rangle < \sup_{x' \in X} \langle \nu, x' \rangle$ et de même pour Y. On peut donc à nouveau conclure par (3.6).

$\square$

On insiste sur le fait que les énoncés ne font intervenir aucune structure euclidienne. On utilise les outils de la géométrie euclidienne uniquement dans les preuves.

3.5 Points extrémaux et Théorème de Krein-Milman

Définition 35 *Soit $\mathcal{C}$ un convexe de $\mathcal{E}$. On dit que $M \in \mathcal{C}$ est extrémal (dans $\mathcal{C}$) si pour tout $A, B \in \mathcal{C}$, si M est combinaison convexe de $\{(A,\theta),(B,1-\theta)\}$ pour un certain $\theta \in]0,1[$, alors $M = A$ ou $M = B$.*

Exercice 79 *Déterminer les points extrémaux d'une boule, d'un triangle.*

Théorème 7 *Tout convexe non vide compact est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.*

Preuve : On procède par récurrence sur $n = \dim \mathcal{E}$. Le résultat est vrai pour $n = 1$. Supposons-le vrai pour n et montrons le pour $n+1$. On commence par vérifier le

Lemme 9 *Un convexe compact est l'enveloppe convexe de sa frontière.*

Preuve du lemme : La frontière d'un convexe compact $\mathcal{C}$ étant contenue dans ce convexe, l'enveloppe convexe de la frontière l'est également. Réciproquement, soit $M \in \mathcal{C}$. Soit Δ une droite passant par M. Alors $\Delta \cap \mathcal{C}$ est une partie convexe fermée bornée de Δ donc de la forme $[AB]$ où A, B sont deux points de Δ. Nécessairement, A et B appartiennent à la frontière de $\mathcal{C}$ (sinon, ils seraient le centre de boules contenues dans $\mathcal{C}$ et l'intersection de $\mathcal{C}$ avec Δ contiendrait strictement $[AB]$). Donc M est bien combinaison convexe de points de la frontière de $\mathcal{C}$.

□

D'après le lemme, il suffit de montrer que la frontière est contenue dans l'enveloppe convexe des points extrémaux. Soient x dans la frontière et $\mathcal{H}$ un hyperplan d'appui de $\mathcal{C}$ en x. Soit $\mathcal{D}$ le demi-espace ouvert délimité par $\mathcal{H}$ contenant $\mathcal{C}$. L'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{C}$ contenus dans $\mathcal{H}$ sont des points extrémaux de $\mathcal{C} \cap \mathcal{H}$. Et la réciproque est vraie : soit u un point extrémal de $\mathcal{C} \cap \mathcal{H}$ et montrons que c'est un point extrémal de $\mathcal{C}$. Soient $y, z \in \mathcal{C}$ et $0 < t < 1$ tels que u soit le barycentre de $\{(y,t),(z,1-t)\}$. On a $y, z \notin \mathcal{D}$ (sinon $u \in \mathcal{D}$) donc $y, z \in \mathcal{C} \cap \mathcal{H}$ donc $u = y$ ou $u = z$, ce qui montre que u est un point extrémal de $\mathcal{C}$.

Par hypothèse de récurrence ($\mathcal{C} \cap \mathcal{H}$ étant un convexe de l'espace affine $\mathcal{H}$ de dimension n), l'enveloppe convexe des points extrémaux de $\mathcal{C}\cap\mathcal{H}$ est égale à $\mathcal{C}\cap\mathcal{H}$. Donc x qui appartient à $\mathcal{C}\cap\mathcal{H}$ appartient à l'enveloppe convexe des points extrémaux de $\mathcal{C}\cap\mathcal{H}$ donc à l'enveloppe convexe des points extrémaux de $\mathcal{C}$ contenus dans $\mathcal{H}$ (d'après ce qu'on vient de montrer). Cette-dernière est contenue dans l'enveloppe convexe des points extrémaux de $\mathcal{C}$. Donc x appartient à l'enveloppe convexe des points extrémaux de $\mathcal{C}$. Comme x est un point quelconque de la frontière de $\mathcal{C}$, cela conclut la preuve du théorème.

□

Exercice 80 *Peut-on remplacer compact par fermé dans l'énoncé du théorème ?*

Les théorèmes de Hahn-Banach et de Krein-Milman permettent de donner une définition rigoureuse des polyhèdres, de leurs faces et de leurs sommets...

3.6 Exercices supplémentaires

Exercice 81 *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $k \geq 2$. Montrer que toutes les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.*

Projection sur un fermé

Exercice 82 *1) Soit $\mathcal{C}$ une partie non vide d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$. Soit $d_{\mathcal{C}}(\cdot)$ la distance à $\mathcal{C}$. Montrer que $d_{\mathcal{C}}(\cdot) = d_{\overline{\mathcal{C}}}(\cdot)$.*

2) On suppose que $\mathcal{C}$ est convexe. On munit $\mathcal{E}$ d'une structure euclidienne. On note désormais $d = d_{\mathcal{C}}$. Soient $M, M' \in \mathcal{E}$.

a) Montrer que $d(M')^2 \leq ||\overrightarrow{p(M)M'}||^2$ où p désigne la projection sur $\mathcal{C}$. En déduire que

$$d(M')^2 \leq d(M)^2 + 2\langle \overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{p(M)M} \rangle + O(||\overrightarrow{MM'}||^2).$$

b) En écrivant $\overrightarrow{p(M')M'} = \overrightarrow{p(M')p(M)} + \overrightarrow{p(M)M} + \overrightarrow{MM'}$, montrer que

$$d(M')^2 \geq d(M)^2 + 2\langle \overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{p(M)M} \rangle + O(||\overrightarrow{MM'}||^2).$$

(On pourra remarquer que $\langle \overrightarrow{p(M)M}, \overrightarrow{p(M')p(M)} \rangle \geq 0$).

c) En déduire que d^2 est différentiable sur $\mathcal{E}$ et que d est différentiable sur $\mathcal{E} \setminus \overline{\mathcal{C}}$, de gradient

$$\frac{\overrightarrow{p(M)M}}{||\overrightarrow{p(M)M}||}.$$

3) On ne suppose plus $\mathcal{C}$ convexe mais on suppose que d est différentiable sur $\mathcal{E} \setminus \overline{\mathcal{C}}$.

a) Soit $M \notin \overline{\mathcal{C}}$. Soit $N \in \overline{\mathcal{C}}$ tel que $||\overrightarrow{MN}|| = d(M)$. Pour $t \in [0,1]$, on pose $M_t = N + t\overrightarrow{NM}$. Calculer $d(M_t)$ et en déduire que

$$\frac{d(M_t) - d(M)}{||\overrightarrow{MM_t}||} = -1$$

puis que

$$\langle \nabla d(M), \frac{\overrightarrow{MN}}{||\overrightarrow{MN}||} \rangle = -1.$$

b) En utilisant le fait que d est 1 lipschitzienne et le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\nabla d(M) = \frac{\overrightarrow{NM}}{||\overrightarrow{NM}||}.$$

c) En déduire qu'il existe un unique point $N \in \overline{C}$ tel que $||\overrightarrow{MN}|| = d(M)$.

4) On se propose de montrer ici que si $\mathcal{C}$ est une partie non vide fermée de $\mathcal{E}$ telle que la fonction distance à $\mathcal{C}$ est différentiable sur $\mathcal{E} \setminus \mathcal{C}$ alors $\mathcal{C}$ est convexe. Après choix d'un repère, on identifie $\mathcal{E}$ à $\mathbb{R}^n$.

a) On considère le champ de vecteurs $X : x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{C} \to \nabla d(x) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $||X(x)|| = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{C}$ et que X est continu.

b) D'après le théorème de Cauchy-Peano, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{C}$, il existe une trajectoire $\gamma_x : I_x \to \mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall t \in I_x, \dot{\gamma}_x(t) = X(\gamma_x(t))\ ,\ \gamma_x(0) = x, \tag{3.7}$$

où I_x est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0. Montrer que $||\gamma_x(t) - \gamma_x(s)|| \leq |t - s|$.

c) Montrer que

$$\frac{d}{dt} d(\gamma_x(t)) = 1.$$

En déduire que $d(\gamma_x(t)) - d(\gamma_x(s)) = t - s$ pour tout $s, t \in I_x$.

d) En utilisant b) et c), montrer que $||\gamma_x(t) - \gamma_x(s)|| = |t - s|$ pour tout $s, t \in I_x$, que γ_x décrit un intervalle de droite, puis que γ_x est l'unique solution de (3.7) (au sens où si γ_x et δ_x sont deux trajectoires partant de x définies sur I_x et J_x respectivement, alors $\gamma_x = \delta_x$ sur $I_x \cap J_x$). Montrer enfin qu'on peut supposer $I_x =]-d(x), +\infty[$. Que vaut $\lim_{t \to -d(x)} \gamma_x(t)$?

e) Soit H_x l'hyperplan orthogonal à la droite contenant $\gamma_x([-d(x),+\infty[)$ en $\gamma_x(-d(x))$. Soit E_x le demi-espace fermé de frontière H_x ne contenant pas $\gamma_x(]-d(x),+\infty[)$.

i) Montrer que $\forall x \notin \mathcal{C}, \mathcal{C} \subset E_x$. (On pourra observer que tous les points de la trajectoire de γ_x ont la même projection $p(x)$ sur $\mathcal{C}$).

ii) Montrer que $\mathcal{C} = \cap_{x\notin\mathcal{C}} E_x$ et conclure.

Théorème de séparation

Exercice 83 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.*

1) Montrer que l'épigraphe de f $\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t \geq f(x)\}$ est un ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour tout $t < f(x)$, il existe une fonction affine $g : y \mapsto \langle a, y\rangle + b$ telle que $g \leq f$ et $g(x) = t$ (on pourra séparer $\{(x,t)\}$ de l'épigraphe de f)

3) Montrer que f peut s'écrire comme le supremum d'une famille de fonctions affines.

4) Utiliser ce résultat pour montrer le Théorème de Jensen : si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de probabilité et $u \in L^1(X, \mathbb{R}^n)$, alors pour toute fonction convexe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$$f\left(\int_X u(t)\,d\mu(t)\right) \leq \int_X f(u(t))\,d\mu(t).$$

Exercice 84 *Soient f,$f_1, \ldots, f_m$ $m+1$ formes linéaires sur le $\mathbb{R}$ espace vectoriel X. On suppose que $\forall x \in X$,*

$$f_1(x) = \ldots = f_m(x) = 0 \Longrightarrow f(x) = 0.$$

Montrer que $f \in Vect\,(f_1, \ldots, f_m)$.

(Indication : considérer $F : x \in X \mapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x), f(x))$ et observer que $(0, \ldots, 0, 1)$ n'est pas dans l'image de F).

Exercice 85 *[Théorème du minimax de Ky Fan] Soit U une partie convexe compact dans $\mathbb{R}^m$, et soit V une partie convexe dans $\mathbb{R}^n$ (U et V non vides). On se donne une fonction $f : U \times V \to \mathbb{R}$ telle que $u \mapsto f(u,v)$ est convexe et continue et $v \mapsto f(u,v)$ est concave. Alors l'objet de l'exercice est de montrer que*

$$\min_u \sup_v f(u,v) = \sup_v \min_u f(u,v).$$

où $+\infty = +\infty$ est admis.

1) Pourquoi peut-on écrire $\min$? Dans le membre de droite, on pourra démontrer et utiliser le fait que si $u_n \to u$, alors

$$\liminf_{n\to+\infty} (\sup_v f(u_n, v)) \geq \sup_v f(u,v).$$

On pose $\alpha =$ le sup min, et $\beta =$ le min sup.

2) Prouver que $-\infty < \alpha \leq \beta$. On peut donc supposer $\alpha < +\infty$.

3) On supposera par la suite $\alpha < \beta$ afin d'obtenir une contradiction. Montrer alors que les ensembles $U(v) := \{u \in U : f(u,v) \leq \alpha\}$ sont tels que

$$\cap_{v\in V} U(v) = \emptyset.$$

4) En déduire l'existence de $v_1, ..., v_n \in V$ tels que

$$\cap_{i=1,\ldots,n} U(v_i) = \emptyset.$$

5) En déduire que le point $(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha) \in \mathbb{R}^n$ n'est pas dans l'ensemble

$$E := \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = f(u, v_i) + r_i, r_i \geq 0, u \in U\}.$$

Prouver que E est fermé et convexe.

6) En déduire l'existence de $v \in V$ tel que

$$\alpha < \min_{u \in U} f(u, v)$$

ce qui donne une contradiction.

7) Application : Soit S un ensemble convexe fermé dans $\mathbb{R}^n$, et Σ un ensemble convexe fermé borné dans $\mathbb{R}^n$ (les deux non vides). Alors

$$\max_{y \in \Sigma} \inf_{x \in S} \langle y, x \rangle = \inf_{x \in S} \max_{y \in \Sigma} \langle y, x \rangle.$$

Points extrémaux

Exercice 86 *Un tétraèdre est défini comme l'enveloppe convexe de 4 points non coplanaires. Montrer que ces 4 points sont les points extrémaux du tétraèdre (on les appelle les sommets du tétraèdre).*

Exercice 87 *1) Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques. Montrer que*

$$(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto tr\,(AB)$$

est un produit scalaire.

2) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une b.o.n. $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et une famille de réels $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ tels que

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i e_i^T.$$

3) Montrer que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 ssi il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $A = xx^T$ (comme d'habitude, on identifie des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ à des vecteurs colonnes).

4) On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensembles des matrices symétriques positives. Soit $\Omega_1 := \{M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) : tr\, M = 1\}$.

a) Montrer que Ω_1 est un convexe compact de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\Omega_1 = co\,\{xx^T : ||x|| = 1\}$.

c) Montrer que les points extrémaux de Ω_1 sont les matrices xx^T, $||x|| = 1$.

3.7 Solutions ou indications des exercices

Solution 76 1) Supposons $U \subset E$ ouvert. Soit $O \in \mathcal{E}$. Alors $\forall A \in O + U$, on a $\overrightarrow{OA} \in U$ donc il existe $r > 0$ tel que $B_{||\cdot||}(\overrightarrow{OA}, r) \subset U$. Donc $B_d(A, r) \subset O + U$. Donc $O + U$ est un ouvert de $\mathcal{E}$.

Réciproquement, s'il existe $O \in \mathcal{E}$ tel que $O + U$ est ouvert, alors $\forall x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B_d(O + x, r) \subset O + U$. Donc $B_{||\cdot||}(x, r) \subset U$. Donc U est ouvert.

2) Soit ϕ une application affine et f sa partie linéaire. Comme $\dim E < \infty$, f est continue. Alors pour tout $M, N \in \mathcal{E}$, $d(\phi(M), \phi(N)) = ||f(\overrightarrow{NM})|| \leq ||f||d(N, M)$. Ainsi, ϕ est lipschitzienne et en particulier continue.

3) On rappelle qu'un isomorphisme linéaire (en dimension finie) est un homéomorphisme (pour n'importe quelle norme sur l'espace) (car une application linéaire est continue et que l'inverse d'une application linéaire est linéaire, donc continue).

Soit $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une bijection affine. On note f sa partie linéaire. C'est un isomorphisme, donc un homéomorphisme. On fixe $O \in \mathcal{E}$. Si $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathcal{E}$, alors $\phi(\mathcal{U}) = \phi(O) + f(\mathcal{U} - O)$ est un ouvert. Donc ϕ est ouverte.

Soit $\psi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ une fonction affine non constante. Alors (par le théorème de la base incomplète dans E^* appliqué à la partie linéaire de ψ), il existe $\phi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^n$ une bijection affine de la forme

$$\phi(M) = (\psi(M), \psi_2(M), ..., \psi_n(M)).$$

Alors $\psi = \pi \circ \phi$ où $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est la projection sur la première coordonnée. Comme π est ouverte, on en déduit par composition que $\psi = \pi \circ \phi$ est ouverte.

3) On dit que $\theta : \mathcal{E} \to F$ est différentiable en M s'il existe $f \in \mathcal{L}(E, F)$ (automatiquement continue car E de dimension finie) telle que

$$\theta(N) = \theta(M) + f(\overrightarrow{MN}) + o(||\overrightarrow{MN}||).$$

Solution 80 Contrexemple : $[0, +\infty[$ est un convexe fermé de $\mathbb{R}$ dont le seul point extrémal est $\{0\}$.

Solution 81 On factorise P sous la forme $P(X) = a\prod_{i=1}^{n}(X - a_i)^{\alpha_i}$. On calcule $\dfrac{P'(X)}{P(X)} = \sum \dfrac{\alpha_i}{(X - a_i)}$ et on évalue en une racine β de P' qui n'est pas une racine de P :

$$0 = \sum \frac{\alpha_i}{(\beta - a_i)}$$

soit encore

$$0 = \sum \frac{\alpha_i\overline{(\beta - a_i)}}{|\beta - a_i|^2}.$$

On en déduit (en prenant le conjugué) :

$$0 = \sum \frac{\alpha_i(\beta - a_i)}{|\beta - a_i|^2}.$$

Ainsi, β est un barycentre des a_i affectés de coefficients positifs, donc appartient à l'enveloppe convexe des a_i.

Solution 83 1) Comme $\mathcal{C} \subset \overline{\mathcal{C}}$, on a $d_{\overline{\mathcal{C}}} \leq d_{\mathcal{C}}$. Soit $M \in \mathcal{E}$ et montrons que $d_{\mathcal{C}}(M) \leq d_{\overline{\mathcal{C}}}(M)$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \overline{\mathcal{C}}$ tel que $d_{\overline{\mathcal{C}}}(M) = d(M, N)$. Il existe $N_\epsilon \in \mathcal{C}$ tel que $d(N_\epsilon, N) \leq \epsilon$. Donc

$$d_{\mathcal{C}}(M) \leq d(M, N_\epsilon) \leq d(M, N) + d(N, N_\epsilon) \leq d_{\overline{\mathcal{C}}}(M) + \epsilon.$$

Comme ceci est vrai pour tout ϵ, on en déduit $d_{\mathcal{C}}(M) \leq d_{\overline{\mathcal{C}}}(M)$.

2) a) Comme $p(M) \in \mathcal{C}$, $d(M') \leq ||\overrightarrow{p(M)M'}||$. On en déduit

$$d(M')^2 \leq ||\overrightarrow{p(M)M'}||^2 = ||\overrightarrow{MM'}||^2 + ||\overrightarrow{p(M)M}||^2 + 2\langle\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{p(M)M}\rangle$$

$$\leq d(M)^2 + 2\langle\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{p(M)M}\rangle + ||\overrightarrow{MM'}||^2.$$

b) On a

$$d(M')^2 = ||\overrightarrow{p(M')M'}||^2 = ||\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{p(M)M} + \overrightarrow{p(M')p(M)}||^2$$

$$= ||\overrightarrow{p(M')p(M)}||^2 + ||\overrightarrow{p(M)M}||^2 + ||\overrightarrow{MM'}||^2 + 2\langle\overrightarrow{p(M)M}, \overrightarrow{MM'}\rangle$$

$$+2\langle \overrightarrow{p(M')p(M)}, \overrightarrow{p(M)M}\rangle + 2\langle \overrightarrow{p(M')p(M)}, \overrightarrow{MM'}\rangle.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que p est 1 lipschitzienne, on a

$$|\langle \overrightarrow{p(M')p(M)}, \overrightarrow{MM'}\rangle| \leq ||\overrightarrow{MM'}||^2.$$

En utilisant les minorations $||\overrightarrow{p(M')p(M)}||^2 \geq 0$ et $\langle \overrightarrow{p(M')p(M)}, \overrightarrow{p(M)M}\rangle \geq 0$, on obtient

$$d(M')^2 \geq ||\overrightarrow{p(M)M}||^2 + 2\langle \overrightarrow{p(M)M}, \overrightarrow{MM'}\rangle - ||\overrightarrow{MM'}||^2.$$

c) On a donc par a) et b)

$$d(M')^2 - d(M)^2 - 2\langle \overrightarrow{p(M)M}, \overrightarrow{MM'}\rangle = O(||\overrightarrow{MM'}||^2).$$

Donc d^2 est différentiable sur $\mathcal{E}$, de gradient $2\overrightarrow{p(M)M}$. Donc $d = \sqrt{d^2}$ est différentiable sur $\mathcal{E} \setminus \overline{\mathcal{C}}$ car $\overline{\mathcal{C}}$ est le lieu d'annulation de d, et de gradient

$$\frac{\overrightarrow{p(M)M}}{d(M)}.$$

3) a) Montrons que $d(M_t) = d(M_t, N)$. Il suffit de voir que $d(M_t) \geq d(M_t, N)$. Sinon, il existe $N' \in \overline{\mathcal{C}}$ tel que $d(M_t, N') < d(M_t, N)$ d'où

$$d(M, N') \leq d(M, M_t) + d(M_t, N') < d(M, M_t) + d(M_t, N) = d(M, N).$$

Cette contradiction montre que $d(M_t) = d(M_t, N)$. Donc $d(M_t) = td(M)$. D'où

$$\frac{d(M_t) - d(M)}{||\overrightarrow{MM_t}||} = \frac{(t-1)d(M)}{(1-t)d(M)} = -1.$$

En faisant tendre t vers 1, on en déduit que

$$\langle \nabla d(M), \frac{\overrightarrow{MN}}{||\overrightarrow{MN}||}\rangle = -1.$$

b) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\langle \nabla d(M), \frac{\overrightarrow{MN}}{||\overrightarrow{MN}||}\rangle| \leq |\nabla d(M)|$. Comme d est 1 lipschitzienne, $|\nabla d(M)| \leq 1$. On est donc dans le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ainsi,

$$\nabla d(M) = \frac{\overrightarrow{NM}}{||\overrightarrow{NM}||}.$$

c) S'il existe deux tels points N_1 et N_2, alors par b)

$$\nabla d(M) = \frac{\overrightarrow{N_1M}}{d(M)} = \frac{\overrightarrow{N_2M}}{d(M)}.$$

Donc $N_1 = N_2$...

4) a) La question 3) a montré que pour tout $x \notin \mathcal{C}$, il existe un unique élément $p(x) \in \mathcal{C}$ tel que $d(x) = ||\overrightarrow{p(x)x}||$. De plus, $\nabla d(x) = \dfrac{\overrightarrow{p(x)x}}{d(x)}$. Donc $||X(x)|| = 1$. Pour montrer que X est continu, il suffit de voir que p est continu. On utilise un critère séquentiel : soit (x_n) une suite convergeant vers

$x \notin \mathcal{C}$. Montrons que la suite $(p(x_n))$ converge vers $p(x)$. D'abord, la suite $(p(x_n))$ est bornée. En effet, fixons $y \in \mathcal{C}$. Alors, pour tout $n \geq 1$,$||x_n - p(x_n)|| \leq ||x_n - y||$. Donc

$$||p(x_n)|| \leq ||x_n - y|| + ||x_n|| \leq 2||x_n|| + ||y||.$$

Comme la suite (x_n) converge, elle est bornée. Donc la suite $(p(x_n))$ est bornée. Soit alors z une valeur d'adhérence de la suite $(p(x_n))$. Comme $\mathcal{C}$ est fermé, on a $z \in \mathcal{C}$. De plus, pour tout $n \geq 1$, $d(x_n) = ||x_n - p(x_n)||$. A la limite, $d(x) = ||x - z||$, ce qui montre que $z = p(x)$. Donc p est continu, et par suite, X est continu.

b) Par 4) a), $||\dot{\gamma}_x(t)|| = 1$ donc par le théorème des accroissements finis, γ_x est une fonction 1 lipschitzienne.

c) Par la règle de composition des dérivées,

$$\frac{d}{dt}d(\gamma_x(t)) = \langle \nabla d(\gamma_x(t)), \dot{\gamma}_x(t)\rangle$$

$$= \langle X(\gamma_x(t)), X(\gamma_x(t))\rangle = ||X(\gamma_x(t))||^2 = 1.$$

Donc par intégration de la fonction continue $t \mapsto \dfrac{d}{dt}d(\gamma_x(t))$, on en déduit

$$d(\gamma_x(t)) - d(\gamma_x(s)) = t - s.$$

d) Par c), $|t-s| = |d(\gamma_x(t)) - d(\gamma_x(s))|$. Comme d est 1 lipschitzienne, $|d(\gamma_x(t)) - d(\gamma_x(s))| \leq ||\gamma_x(t) - \gamma_x(s)||$. Enfin, par b), $||\gamma_x(t) - \gamma_x(s)|| \leq |t-s|$. Ainsi, $||\gamma_x(t) - \gamma_x(s)|| = |t-s|$ pour tout $s, t \in I_x$ et l'égalité a lieu dans b). Soit $I = [a, b]$ un intevalle contenu dans I_x. On pose $e = \dfrac{\gamma_x(b) - \gamma_x(a)}{||\gamma_x(b) - \gamma_x(a)||}$. Alors

$$\int_a^b \langle \dot{\gamma}_x(t), e\rangle \, dt = \langle \int_a^b \dot{\gamma}_x(t)\, dt, e\rangle = \langle \gamma_x(b) - \gamma_x(a), e\rangle$$

$$= ||\gamma_x(b) - \gamma_x(a)|| = |b - a| = \int_a^b 1\, dt.$$

On en déduit

$$\int_a^b (\langle \dot{\gamma}_x(t), e\rangle - 1)\, dt = 0.$$

Comme l'intégrande est ≤ 0 (par l'inégalité de Cauchy-Schwarz), on obtient que $\langle \dot{\gamma}_x(t), e\rangle = 1$ pour tout $t \in [a, b]$. On est donc dans le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-schwarz : $\dot{\gamma}_x(t) = e$. Ainsi,γ_x décrit un intervalle de droite sur $[a, b]$ et comme a et b sont arbitraires, on en déduit que γ_x décrit un intervalle de droite sur I_x. L'unicité en découle, puisque cette droite est *la* droite passant par x et dirigée par $X(0)$ (=$\dot{\gamma}_x(0)$).

La fonction $f : t \mapsto x + tX(x)$ co"incide avec γ_x sur I_x et est bien définie sur $\mathbb{R}^n$. De plus, comme $X(x) = \nabla d(x) = \overrightarrow{p(x)x}/d(x)$ (où $p(x)$ est l'unique point de $\mathcal{C}$ tel que $d(x, p(x)) = d(x)$), on en déduit $f(]-d(x), +\infty[) \subset \mathbb{R}^n \backslash \mathcal{C}$ et $f(-d(x)) = p(x) \in \mathcal{C}$. Donc on peut prendre $I_x =]-d(x), +\infty[$ et $\lim_{t \to -d(x)} \gamma_x(t) = p(x)$.

e) i) Montrons que $\forall x \notin \mathcal{C}, \mathcal{C} \subset E_x$. Soit $x \notin \mathcal{C}$. Soit y dans la trajectoire de γ_x. Alors par unicité de la trajectoire passant en y, on a $\gamma_x = \gamma_y$. Donc $p(x) = p(y)$ (car c'est le point où la trajectoire de γ_x, qui est aussi celle de γ_y, rencontre $\mathcal{C}$). Soit $\nu := \overrightarrow{p(x)x}$. On définit pour $t > 0$, $y_t := x + t\nu$. Alors pour tout $t > 0$, $p(y_t) = p(x)$ ce qui se réécrit $B(y_t, d(y_t)) \cap \mathcal{C} = \emptyset$. Donc $\mathcal{C} \subset (\cup_{t>0} B(y_t, d(y_t)))^c = E_x$.

ii) Soit $x \notin \mathcal{C}$. Alors $x \notin E_x$. On a donc l'égalité $\mathcal{C} = \cap_{x \notin \mathcal{C}} E_x$. Ainsi, $\mathcal{C}$ est une intersection de demi-espaces, et donc convexe.

Solution 83 1) Soient (x, t), (x', t') dans l'épigraphe de f et $\theta \in [0, 1]$. Par définition de l'épigraphe, on a $t \geq f(x)$ et $t' \geq f(x')$. Par convexité de f, on a $f(\theta x + (1-\theta)x') \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(x')$. D'où

$$f(\theta x + (1-\theta)x') \leq \theta t + (1-\theta)t',$$

ce qui se réécrit $(\theta x + (1-\theta)x', \theta t + (1-\theta)t') = \theta(x, t) + (1-\theta)(x', t')$ est dans l'épigraphe de f. Celui-ci est donc convexe. De plus, il est fermé comme on peut le voir en utilisant un critère séquentiel et le fait qu'une fonction convexe sur $\mathbb{R}^n$ est localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$.

2) Soit (x, t) tel que $t < f(x)$. Donc le convexe compact $\{(x, t)\}$ est disjoint du convexe fermé qu'est l'épigraphe de f. Par le théorème de séparation, il existe $\nu \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout (y, s) vérifiant $s \geq f(y)$, on a

$$\langle \nu, (y, s) \rangle < \alpha < \langle \nu, (x, t) \rangle.$$

Notons $\nu = (a, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. D'où

$$\langle a, y \rangle + cs < \alpha < \langle a, x \rangle + ct. \tag{3.8}$$

On fixe $y \in \mathbb{R}^n$. Comme la double inégalité précédente doit être vraie pour tout $s \geq f(y)$, on obtient (en faisant $s \to +\infty$) que nécessairement $c \leq 0$. Supposons par l'absurde que $c = 0$. Alors on a pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $\langle a, y \rangle < \alpha < \langle a, x \rangle$, ce qui amène à une contradiction si on prend $y = \lambda a$ et qu'on fait $\lambda \to +\infty$ (noter que $a \neq 0$ car $\nu \neq 0$). Donc $c < 0$. Quitte à diviser (3.8) par $-c$, on peut supposer que $c = -1$, d'où

$$\langle a, y \rangle - f(y) < \langle a, x \rangle - t, \;\; \forall y \in \mathbb{R}^n$$

soit encore $g(y) < f(y)$ en posant $g(y) = \langle a, y - x \rangle + t$ qui est bien une fonction affine telle que $g(x) = t$.

3) Notons $g_{(x,t)}$ la fonction définie précédemment puis

$$h := \sup_{\{(x,t): t < f(x)\}} g_{x,t}.$$

Montrons que $h = f$. Comme $g_{x,t} \leq f$ pour tout x, t, on a $h \leq f$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Si $h(x) < f(x)$, alors il existe $t \in]h(x), f(x)[$ et on peut définir $g_{x,t}$. On a $g_{x,t}(x) = t > h(x)$ ce qui contredit la définition de h. Donc $h(x) = f(x)$. Finalement, $f = h$ s'écrit bien comme le supremum d'une famille de fonctions affines.

4) Commençons par observer que l'inégalité de Jensen est une égalité lorsque f est une fonction affine (par linéarité de l'intégrale et le fait que $\mu(X) = 1$). Ensuite, comme on peut écrire $f = \sup_i f_i$ où les f_i sont affines, on a pour tout i, $f_i \leq f$, d'où

$$f_i \left(\int_X u(t)\, d\mu(t) \right) = \int_X f_i(u(t))\, d\mu(t) \leq \int_X f(u(t))\, d\mu(t)$$

(par monotonie de l'intégrale). Le résultat s'en déduit en prenant le $\sup_i$ dans le membre de gauche.

Solution 84 L'image de F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{m+1}$ et donc en particulier un convexe fermé. On peut le séparer du convexe compact $\{(0, \ldots, 0, 1)\}$: il existe $(a_1, \ldots, a_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{m} a_i f_i(x) + a_{m+1} f(x) < \alpha < a_{m+1} \;\; \forall x \in X. \tag{3.9}$$

Ceci montre que l'image de F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ majoré et donc réduit à $\{0\}$: ainsi,

$$\sum_{i=1}^{m} a_i f_i(x) + a_{m+1} f(x) = 0,$$

ce qui implique (par (3.9)) que $a_{m+1} > 0$. Donc f est bien une combinaison linéaire des f_i.

Solution 85 1) On commence par montrer que si $u_n \to u$, alors

$$\liminf_{n\to+\infty}(\sup_v f(u_n,v)) \geq \sup_v f(u,v).$$

Soit $a < \sup_v f(u,v)$. Il existe $v \in V$ tel que $f(u,v) > a$. Comme $f(\cdot,v)$ est continue, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $f(u_n,v) \geq a$. D'où $\sup_v f(u_n,v) \geq a$. On en déduit

$$\liminf_{n\to+\infty}(\sup_v f(u_n,v)) \geq a.$$

Comme ceci est vrai pour tout $a < \sup_v f(u,v)$, on a bien

$$\liminf_{n\to+\infty}(\sup_v f(u_n,v)) \geq \sup_v f(u,v).$$

On utilise ce résultat pour montrer que l'inf de $\inf_u \sup_v f(u,v)$ est atteint. Soit (u_n) une suite minimisante, c'est-à-dire telle que $\sup_v f(u_n,v) \to \inf_u \sup_v f(u,v)$. Comme U est compact, quitte à extraire une sous-suite (ce qu'on ne note pas), on peut supposer que (u_n) converge vers un élément $u_0 \in U$. D'après le résultat montré précédemment, $\liminf_{n\to+\infty} \sup_v f(u_n,v) \geq \sup_v f(u_0,v)$. Or $\liminf_{n\to+\infty} \sup_v f(u_n,v) = \inf_u \sup_v f(u,v)$. On en déduit

$$\inf_u \sup_v f(u,v) \geq \sup_v f(u_0,v) \geq \inf_u \sup_v f(u,v)$$

et donc

$$\sup_v f(u_0,v) = \inf_u \sup_v f(u,v),$$

ce qui montre bien que l'inf est atteint.

Enfin, dans le membre de droite, pour tout v, $u \mapsto f(u,v)$ est une fonction continue sur le compact U, et atteint donc son minimum.

2) On a pour tout $u_0 \in U, v \in V$, $-\infty < \min_u f(u,v) \leq f(u_0,v)$. On prend le sup sur V. Il vient $-\infty < \sup_v \min_u f(u,v) \leq \sup_v f(u_0,v)$. On prend le min sur $u_0 \in U$. Il vient

$$-\infty < \sup_v \min_u f(u,v) \leq \min_{u_0} \sup_v f(u_0,v),$$

ce qui est le résultat attendu.

3) Supposons par l'absurde qu'il existe $u_0 \in \cap_v U(v)$. Alors pour tout $v \in V$, on a $f(u_0,v) \leq \alpha$. Donc $\sup_v f(u_0,v) \leq \alpha$. Donc $\min_u \sup_v f(u,v) \leq \sup_v f(u_0,v) \leq \alpha$, c'est-à-dire $\beta \leq \alpha$, ce qui contredit notre hypothèse. Donc $\cap_v U(v) = \emptyset$.

4) Les $U(v)$ sont des fermés du compact U, ils sont donc compact. On sait que de toute intersection vide de compact, on peut extraire une intersection finie vide de ces compacts : il existe $v_1,\dots,v_n$ tels que $\cap_{i=1}^n U(v_i) = \emptyset$.

5) D'après 4), on a pour tout $u \in U$, il existe $i \in \{1,\dots,n\}$ tel que $u \notin U(v_i)$, c'est-à-dire $f(u,v_i) > \alpha$. Comme $E = \{x | \exists u \in U : \forall i, x_i \geq f(u,v_i)\}$, on voit que $(\alpha,\dots,\alpha) \notin E$. On vérifie que E est fermé par un critère séquentiel en utilisant la continuité de $f(\cdot,v_i)$ pour tout i et la compacité de U. La convexité de E résulte de la convexité de $f(\cdot,v_i)$ pour tout i.

6) On sépare le convexe fermé E du convexe compact $(\alpha,\dots,\alpha)$: il existe $(a_1,\dots,a_n)$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha \sum_i a_i < a < \sum a_i x_i \ \ \forall x \in E.$$

En utilisant la définition de E, on a donc : pour tout $u \in U$, pour tout $r_i \geq 0$,

$$\alpha \sum_i a_i < a < \sum a_i f(u,v_i) + \sum a_i r_i.$$

En faisant tendre successivement chaque $r_i \to +\infty$, on voit que nécessairement, on a $a_i \geq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Ensuite, si $\sum a_i = 0$, c'est donc que chaque $a_i = 0$: cela contredit les inégalités strictes. Donc $\sum a_i > 0$ et quitte à diviser chaque membre de l'inégalité par $\sum a_i$, on peut supposer que $\sum a_i = 1$. En utilisant la concavité de $f(u, \cdot)$, on a $\sum a_i f(u, v_i) \leq f(u, \sum a_i v_i)$. Finalement, on a (en prenant tous les $r_i = 0$)

$$\alpha < a < f(u, \sum a_i v_i).$$

Comme ceci est vrai pour tout u, on a (en notant $v := \sum a_i v_i$)

$$\alpha < a < \min_u f(u, v).$$

Ceci contredit la définition de α.

7) On applique ce qui précède à $U = \Sigma$, $V = S$, $f(u, v) = -\langle u, v\rangle$.

Solution 86 Soient A, B, C, D 4 points non coplanaires. Un point extrémal de l'enveloppe convexe co (A, B, C, D) appartient nécessairement à A, B, C, D (par définition de l'extrémalité). Soit S l'ensemble des points extrémaux. On a donc $S \subset \{A, B, C, D\}$. Or par le théorème de Krein-Milman,

$$\text{co}\,(A, B, C, D) = \text{co}\,(S).$$

Comme co $(A, B, C) \not\supset$ co (A, B, C, D) (et non inclusions analogues obtenues par permutation circulaire des points A, B, C, D), on obtient $S = \{A, B, C, D\}$.

Solution 87 1) L'application est bilinéaire symétrique. Pour voir qu'elle est définie positive, on peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale, P orthogonale. On en déduit $tr\, A^2 = tr\, D^2 = \sum \lambda_i^2$, en notant λ_i les valeurs propres de A, ce qui montre que $tr\, A^2 \geq 0$ avec égalité ssi $A = 0$.

2) Soit (e_i) une b.o.n de vecteurs propres pour A associés aux valeurs propres (λ_i). On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$Ax = \sum_i \lambda_i \langle x, e_i\rangle e_i = \sum_i \lambda_i e_i e_i^T x. \tag{3.10}$$

3) S'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $A = xx^T$, alors les vecteurs colonnes de A sont tous proportionnels à x, donc A est de rang 1. Réciproquement, si A est une matrice diagonalisable de rang 1, alors elle a une seule valeur propre non nulle, qui est de multiplicité 1. En particulier, si elles est symétrique, dans l'écriture (3.10), tous les λ_i sont nuls sauf 1 et on a bien $A = \lambda ee^T = (\sqrt{\lambda}e)(\sqrt{\lambda}e)^T$.

4) a) L'ensemble Ω_1 est l'intersection du cône convexe fermé $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et de l'espace affine $\{M : tr\, M = 1\}$. C'est donc un convexe fermé. De plus, la norme euclidienne de $M \in \Omega_1$ (pour le produit scalaire de 1)) est $\sqrt{tr\, M^2}$. Or $tr\, M^2 = \sum \lambda_i^2$ où on a noté λ_i les valeurs propres de M. Comme elles sont positives et que leur somme vaut 1, on en déduit $\lambda_i \in [0, 1]$, donc $\lambda_i^2 \leq \lambda_i$ et finalement

$$\sum \lambda_i^2 \leq \sum \lambda_i = 1. \tag{3.11}$$

Donc Ω_1 est aussi borné. C'est bien un convexe compact.

b) Si $M \in \Omega_1$, alors on peut écrire comme en (3.10) $M = \sum \lambda_i e_i e_i^T$ avec de plus $\lambda_i \in [0, 1]$ d'après 4) a). Donc M apparaît bien comme une combinaison convexe de matrices de la forme $e_i e_i^T$, où les e_i sont unitaires.

c) Par b), tous les points extrémaux sont de la forme xx^T avec $||x|| = 1$. Réciproquement, si $||x|| = 1$, montrons que xx^T est extrémal dans Ω_1. Soit $\alpha \in]0, 1[$ tel que $xx^T = \alpha M + (1 - \alpha)N$, où M et N appartiennent à Ω_1. En notant $|| \cdot ||$ la norme euclidienne associée au produit scalaire défini en 1), on vérifie que $||xx^T|| = 1$. En utilisant (3.11), on a $||M|| \leq 1$ et $||N|| \leq 1$. En utilisant l'inégalité triangulaire dans $xx^T = \alpha M + (1 - \alpha)N$, on voit qu'en fait $||M|| = 1$ et $||N|| = 1$, ce qui implique toujours par (3.11) que $\lambda_i^2(M) = \lambda_i(M)$ pour tout i, et donc $\lambda_i(M) \in \{0, 1\}$. On en déduit qu'une seule valeur propre (avec multiplicité 1) vaut 1 et que toutes les autres sont nulles. Ainsi M est de rang 1 et donc de la forme yy^T, avec $||y|| = 1$ (car $||M|| = 1$). De même N est de rang 1 et de la forme zz^T avec $||z|| = 1$. On a $yy^T x = \langle y, x\rangle y$ et $zz^T x = \langle z, x\rangle z$. Alors

$$x = \langle x, x\rangle x = xx^T x = \alpha yy^T x + (1-\alpha)zz^T x = \alpha\langle y, x\rangle y + (1-\alpha)\langle z, x\rangle z.$$

Comme $||x|| = ||y|| = ||z|| = 1$, on en déduit que $x = y = z$ d'où $xx^T = M = N$. (On aurait pu aussi utiliser que dans *tout* espace euclidien, les points extrémaux de la boule unité sont les points de la sphère unité et appliquer ce résultat à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ avec le produit scalaire de la question 1).

Chapitre 4

Coniques et quadriques

Dans toute le suite $\mathcal{E}$ désigne un espace affine de direction E et de dimension $n \in \{2, 3\}$.

4.1 Définitions

Définition 36 *Une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est un polynôme de degré 2 s'il existe un point $O \in \mathcal{E}$, une forme quadratique non nulle $q : E \to \mathbb{R}$, une forme linéaire $L_O : E \to \mathbb{R}$ et une constante c_O tels que*

$$f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + L_O(\overrightarrow{OM}) + c_O.$$

Exercice 88 *1) Montrer que si f est un polynôme de degré 2, alors pour tout $\Omega \in \mathcal{E}$, il existe une forme quadratique non nulle q, une forme linéaire L_Ω et une constante c_Ω tels que*

$$f(M) = q(\overrightarrow{\Omega M}) + L_\Omega(\overrightarrow{\Omega M}) + c_\Omega. \tag{4.1}$$

Montrer que q ne dépend pas de Ω.

2) Calculer la différentielle de f en un point M_O de $\mathcal{E}$.

Preuve :

1) On a $f(M) = q(\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega M})+L_O(\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega M})+c_O$. En notant B la forme bilinéaire symétrique associée à q, on a

$$q(\overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}) = q(\overrightarrow{O\Omega}) + q(\overrightarrow{\Omega M}) + 2B(\overrightarrow{O\Omega}, \overrightarrow{\Omega M})$$

et

$$L_O(\overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}) = L_O(\overrightarrow{O\Omega}) + L_O(\overrightarrow{\Omega M}).$$

On peut donc poser

$$L_\Omega(t) = L_O(t) + 2B(\overrightarrow{O\Omega}, t)\ ,\ c_\Omega = c_O + q(\overrightarrow{O\Omega}) + L_O(\overrightarrow{O\Omega}).$$

2) On a pour tout $M \in \mathcal{E}$, $t \in E$,

$$f(M+t) = q(\overrightarrow{OM}+t)+L_O(\overrightarrow{OM}+t)+c_O = q(\overrightarrow{OM})+q(t)+2B(\overrightarrow{OM}, t)+L_O(\overrightarrow{OM})+L_O(t)+c_O$$

$$= f(M) + 2B(\overrightarrow{OM}, t) + L_O(t) + q(t).$$

Il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ dans laquelle la matrice de q est diagonale : il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que pour tout $t = \sum_{i=1}^n t_i e_i$, on a

$$q(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i t_i^2$$

Donc $|q(t)| \leq C||t||^2$ (avec $C := \max(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|)$). On en déduit que f est différentiable en M de différentielle $df(M)(t) = 2B(\overrightarrow{OM}, t) + L_O(t)$.

□

Remarque 8 *Si $(O, e_1, ..., e_n)$ est un repère de $\mathcal{E}$, en notant $(x_1, ..., x_n)$ les coordonnées de M, $f(M)$ est de la forme*

$$f(M) = \sum a_{ij} x_i x_j + \sum b_i x_i + c_O$$

avec $a_{ij} = q(e_i, e_j)$ et $b_i = L_O(e_i)$.

Définition 37 *On appelle quadrique affine la classe d'équivalence d'un polynôme du second degré $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ sous la relation*

$$f \sim g \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \lambda \neq 0 \text{ tel que } f = \lambda g.$$

Une quadrique plane est appelée conique. L'ensemble des points de $\mathcal{E}$ vérifiant l'équation $f(M) = 0$ est l'image de la quadrique.

Définition 38 *On dit qu'un point Ω tel que $L_\Omega = 0$ dans (4.1) est un centre pour la quadrique. Quand il y a un centre unique, on dit que la quadrique est une quadrique à centre.*

Exercice 89 *1) Soit $f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + L_O(\overrightarrow{OM}) + c_O$ un polynôme de degré 2. Montrer que Ω est un centre de la quadrique associée si et seulement si $2B(\overrightarrow{O\Omega}, \cdot) + L_O = 0$, en notant B la forme bilinéaire symétrique associée æ q.*

2) Comment trouver les centres d'une quadrique si f est donné en coordonnées : $f(M) = \sum a_{ij} x_i x_j + \sum b_i x_i + c_O$?

Preuve :

1) Cela résulte du calcul fait dans l'exercice 88.

2) D'après l'exercice 88, cela revient à calculer les points M de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $df(M) = 0$. Autrement dit, on résout le système $2 \sum_i a_{ik} x_i + b_k = 0, \forall 1 \leq k \leq n$.

Définition 39 *On dit qu'une forme quadratique $q : E \to \mathbb{R}$ est non dégénérée si pour tout $x \in E$,*

$$(\forall y \in E, B(x, y) = 0) \Longrightarrow x = 0,$$

où B est la forme polaire de q ($B(x, y) = \dfrac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)]$).

Remarque 9 *De manière équivalente, $x \in E \mapsto B(x, \cdot) \in E^*$ est injective (et donc bijective puisqu'on est en dimension finie).*

Exercice 90 *On note $\Phi : x \in E \mapsto B(x, \cdot) \in E^*$. Soit (e_i) une base de E et (e_i^*) la base duale. Quelle est la matrice de Φ dans ces bases ?*

Preuve : On a pour tout $1 \leq i \leq n$ et pour tout $x \in E$,

$$B(e_i, x) = \sum_{j=1}^{n} x_j B(e_i, e_j) = \sum_{j=1}^{n} B(e_i, e_j) e_j^*(x).$$

Donc $B(e_i, \cdot) = \sum_{j=1}^{n} B(e_i, e_j) e_j^*$. Donc la matrice de Φ dans ces bases est la matrice de B (qui est aussi la matrice de q) dans la base (e_i).

□

Exercice 91 *Pour qu'une quadrique affine soit une quadrique à centre, il faut et il suffit que la partie quadratique q d'un des polynômes qui la définissent soit non dégénérée.*

Preuve : En effet, d'après l'exercice 90, ces deux conditions sont équivalentes au fait que la matrice de q dans une base soit inversible.

□

Définition 40 *La quadrique de l'espace affine $\mathcal{E}$ définie par le polynôme $f(M) = q(\overrightarrow{OM})+L(\overrightarrow{OM})+c$ est dite propre si la forme quadratique définie sur $E \times \mathbb{R}$ par*

$$Q(u,z) = q(u) + L(u)z + cz^2$$

est non dégénérée. Cette forme quadratique est dite homogénéisée de q.

Exercice 92 *Montrer que cette définition est consistante : si $Q_O(u,z) = q(u) + L_O(u)z + c_O z^2$ est non dégénérée, alors pour tout $\Omega \in \mathcal{E}$, $Q_\Omega(u,z) = q(u) + L_\Omega(u)z + c_\Omega z^2$ est non dégénérée. On pourra remarquer que $Q_\Omega(u,z) = Q_O(u + z\overrightarrow{O\Omega}, z)$.*

Preuve : D'après l'indication, on a $Q_\Omega = Q_O \circ f$ où $f(u,z) = (u + z\overrightarrow{O\Omega}, z)$ est inversible. Fixons une base, et notons A, B, C les matrices de Q_O, Q_Ω et f dans cette base respectivement. On a alors $B = C^t AC$. Ainsi, B est inversible si et seulement si A est inversible. Autrement dit, Q_O est non dégénérée si et seulement si Q_Ω est non dégénérée.

□

Exercice 93 *Les coniques suivantes, données dans un repère affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 2 sont-elles à centre ? Sont-elles propres ?*

i) $f(x,y) = xy$,

ii) $f(x,y) = x^2$,

iii) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$,

iv) $f(x,y) = x^2 - y$.

4.2 Classification et propriétés des coniques affines

Pour classer les coniques affines, il est plus simple d'introduire d'abord une structure euclidienne sur $\mathcal{E}$, de faire une classification euclidienne, puis d'en déduire une classification affine.

On munit donc $\mathcal{E}$ d'une structure euclidienne. En particulier, $\mathcal{E}$ devient un espace métrique pour la distance induite par le produit scalaire.

Théorème 8 *Une conique propre à centre (d'image non vide) admet pour équation dans un repère orthonormé d'origine le centre*

- *soit* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *(la conique est alors une ellipse),*
- *soit* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *(la conique est alors une hyperbole),*

pour deux nombres strictement positifs a et b, avec $a \geq b$ dans le cas de l'ellipse.

Remarque 10 *Il s'agit d'un résultat de classification au sens où le théorème donne les orbites de l'action du groupe des isométries affines du plan sur l'ensemble des coniques propres à centre d'image non vide.*

L'action du groupe des isométries sur l'ensemble des coniques est définie de la manière suivante : soient ϕ une isométrie affine du plan et $\mathcal{C}$ une conique (i.e. une classe d'équivalences de polynômes du second degré). Soit f un représentant de $\mathcal{C}$. Alors l'action de ϕ sur $\mathcal{C}$, notée $\phi(\mathcal{C})$, est la classe de $f \circ \phi^{-1}$ (dont on vérifie que c'est encore un polynôme du second degré ; de plus, si $f \sim g$, alors $f \circ \phi^{-1} \sim g \circ \phi^{-1}$, donc l'action est bien définie et il est facile de voir que c'est bien une action !). Noter que l'image par ϕ de l'image de la conique $\mathcal{C}$ est l'image de la conique $\phi(\mathcal{C})$.

Montrons à présent la remarque. Fixons $\mathcal{R} = (O; e_1, e_2)$ un repère orthonormé de référence. Pour tout $a \geq b > 0$, notons $\mathcal{E}_{a,b}$ l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dans $\mathcal{R}$ et pour tout $a, b > 0$, $\mathcal{H}_{a,b}$ l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dans $\mathcal{R}$. Soit maintenant $\mathcal{C}$ une conique. Le théorème dit qu'il existe un repère orthonormé $\mathcal{R}' = (O', e_1', e_2')$ tel que l'équation de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}'$ est $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ou $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ pour certains $a, b > 0$ avec de plus $a \geq b$ dans le cas de l'ellipse. Soit ϕ l'isométrie qui envoie $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{R}'$. Alors $\mathcal{C} = \phi(\mathcal{E}_{a,b})$ ou $\mathcal{C} = \phi(\mathcal{H}_{a,b})$ selon le cas (s'en assurer !). Donc l'action des isométries sur l'ensemble des coniques propres à centre a bien comme orbites :

1) $\forall a \geq b > 0$, l'orbite de $\mathcal{E}_{a,b}$,
2) $\forall a, b > 0$, l'orbite de $\mathcal{H}_{a,b}$.

Preuve du théorème Soit $\mathcal{C}$ une conique propre à centre. Soit f un polynôme du second degré dans la classe de $\mathcal{C}$ et O le centre de $\mathcal{C}$. On a donc

$$f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + c.$$

Soit (ϵ_1, ϵ_2) une base orthonormée de E et A la matrice de Q dans cette base. Comme toute matrice symétrique est orthogonalement semblable à une matrice diagonale, il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale D. Soit (e_1, e_2) le base de E telle que P soit la matrice de passage de (ϵ_1, ϵ_2) à (e_1, e_2). Le fait que P soit orthogonale a deux conséquences :

1) la base (e_1, e_2) est orthonormée,
2) $P^{-1} = P^t$, et donc D est la matrice de q dans la base (e_1, e_2).

Pour résumer, il existe une base orthonormée (e_1, e_2) de E où la matrice de q est diagonale. Soit $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2)$. Alors dans les coordonnées de $\mathcal{R}$, f s'écrit :

$$f(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2 + c.$$

Comme q est non dégénérée (car $\mathcal{C}$ a un centre unique), α et β sont tous les deux non nuls. Comme $\mathcal{C}$ est propre, la forme quadratique homogénéisée Q qui s'écrit en coordonnées $Q(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + cz^2$, est non dégénérée, donc c n'est pas nul. On peut donc écrire l'équation de la conique sous la forme

$$-\frac{\alpha}{c} x^2 - \frac{\beta}{c} y^2 = 1.$$

Si les deux coefficients sont strictement négatifs, la conique est vide. S'ils sont strictement positifs, on a bien l'équation d'une ellipse. S'ils sont de signes opposés, c'est une hyperbole.

$\square$

Théorème 9 *Si $\mathcal{C}$ est une conique propre d'image non vide qui n'a pas de centre, il existe un repère orthonormé dans lequel l'équation de la conique est $y^2 = 2px$ pour un nombre réel strictement positif p.*

Preuve : Soit f un polynôme du second degré représentant $\mathcal{C}$ et q la forme quadratique associée à f. Comme q est dégénérée, il existe une base orthonormée dans laquelle q est de la forme $q(x,y) = ay^2$ avec $a \neq 0$. L'équation de la conique dans un repère associé à cette base, est de la forme

$$ay^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

En posant $X = x, Y = y + \dfrac{\beta}{2a}$ (c'est-à-dire en translatant l'origine du repère précédent), l'équation devient

$$aY^2 + \alpha X + c = 0$$

avec $c = \gamma - \dfrac{\beta^2}{4a^2}$. Comme la conique est propre, $\alpha \neq 0$. Avec un nouveau changement d'origine et éventuellement un changement d'orientation de l'axe des x, l'équation devient

$$y^2 = bx \text{ avec } b > 0.$$

□

Les équations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ , \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ , y^2 = 2px$$

sont dites *réduites*. Les nombres positifs $2a$, $2b$ et p sont respectivements les *axes* (coniques à centre) et le *paramètre* (parabole). L'origine du repère dans lequel est écrite l'équation réduite d'une parabole est le *sommet* de cette parabole.

Pour les coniques à centre, l'origine du repère est un centre de symétrie (i.e. la symétrie centrale de centre l'origine stabilise la conique) et les axes sont des axes de symétrie (i.e. la réflexion par rapport à ces axes stabilise la conique).

Quand $a = b$, une ellipse est un *cercle*, une hyperbole est dite *équilatère*.

Exercice 94 *Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien.*

1) *Soit $\mathcal{E}$ une ellipse. Montrer qu'il existe un repère orthonormé dans lequel l'image de l'ellipse est une courbe paramétrée d'équation $t \mapsto (a\cos t, b\sin t)$. En déduire qu'une ellipse est connexe, compacte.*
2) *Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole. Montrer qu'il existe un repère orthonormé dans lequel l'image de l'hyperbole est une courbe paramétrée d'équation $t \mapsto (\pm a\text{ch}\, t, b\text{sh}\, t)$. En déduire qu'une hyperbole possède deux composantes connexes non bornées.*
3) *Donner une paramétrisation d'une parabole. En déduire qu'une parabole est connexe, non bornée.*

On en déduit donc que les coniques propres compactes sont les ellipses, non compactes et connexes sont les paraboles et non compactes, non connexes sont les hyperboles.

Exercice 95 *Dans le plan euclidien, décrire les ensembles définis dans un repère orthonormé par* $x^2 - 2xy + y^2 + \lambda(x+y) = 0$, $x^2 + xy + y^2 = 1$, $xy + \lambda(x+y) + 1 = 0$, $y^2 = \lambda x^2 - 2x$, $x^2 + xy - 2y + \lambda x + 1 = 0$. *Le cas échéant, on donnera les axes, sommets, paramètres.*

On passe maintenant à la classification affine des coniques propres. On se place donc dans un espace affine $\mathcal{E}$ qui *a priori* n'est pas muni d'une structure euclidienne.

Théorème 10 *Soit $\mathcal{C}$ une conique propre d'image non vide d'un plan affine. Il existe un repère affine dans lequel une équation de $\mathcal{C}$ a une (et une seule) des formes :*

$$x^2 + y^2 = 1 \textit{ (ellipse)}, \ x^2 - y^2 = 1 \textit{ (hyperbole)}, \ y^2 = x \textit{ (parabole)}.$$

En particulier, si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux coniques propres d'image non vide, pour qu'il existe une transformation affine envoyant $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$, il faut et il suffit que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ aient le même type (c'est-à-dire soient toutes les deux une ellipse, ou une hyperbole, ou une parabole). Autrement dit, si on fait agir le groupe des bijections affines sur l'ensemble des coniques propres d'image non vide, on obtient 3 orbites : celle des ellipses, celle des hyperboles et celle des paraboles. Pour le justifier, on reprend le paragraphe qui suit la remarque 10 en remplaçant le mot *isométrie* par les mots *bijection affine*.

Preuve du théorème 10 : Pour montrer l'existence du repère affine, on introduit une structure euclidienne quelconque sur $\mathcal{E}$ (en décrétant par exemple qu'une base donnée de $\mathcal{E}$ est orthonormée). On applique alors les théorèmes 8 et 9 pour obtenir un repère (O, e_1, e_2) dans lequel l'équation de la conique est $(x/a)^2 \pm (y/b)^2 = 1$ (coniques à centre) ou $y^2 = 2px$ (paraboles). Dans le cas des coniques à centre, on pose $e_1' = ae_1$ et $e_2' = be_2$. L'équation dans le repère (O, e_1', e_2') est $x^2 \pm y^2 = 1$. Dans le cas des paraboles, on pose $e_2' = e_2$ et $e_1' = e_1/2p$. L'équation devient $y^2 = x$.

Il reste à justifier le fait qu'une conique ne peut pas avoir l'une des trois équations dans un repère et une autre des trois équations dans un autre repère. On peut le voir par exemple en se souvenant que les ellipses sont les seules coniques propres compactes, les paraboles sont les seules coniques propres connexes non compactes et les hyperboles les seules coniques propres non connexes. Comme les propriétés de connexité et compacité sont préservées par les bijections affines, une conique a le même type dans tous les repères.

□

Ce théorème n'a pas seulement une importance théorique. Ainsi pour montrer des propriétés *affines* d'une ellipse, on peut se ramener par une bijection affine à un cercle, où la propriété devient évidente.

Exercice 96 *Montrer que la droite qui joint le centre d'une ellipse au milieu d'une corde MM' passe par le point commun aux tangentes à l'ellipse en M et M'.*

Dans l'exercice précédent intervient la notion de tangente. Pour la définir rigoureusement, on va faire intervenir (un peu) de géométrie différentielle.

Les coniques propres admettent une équation implicite, c'est-à-dire de la forme $F(x, y) = 0$, où F est une fonction C^∞, et une équation paramétrée, c'est-à-dire de la forme $t \mapsto (x(t), y(t))$.

Un point régulier d'une courbe implicite donnée par $F(x, y) = 0$ est un point de coordonnée (x_0, y_0) tel que $\nabla F(x_0, y_0) \neq 0$. La tangente est alors bien définie et admet pour équation

$$\langle (x, y) - (x_0, y_0), \nabla F(x_0, y_0) \rangle = 0.$$

Le vecteur $\nabla F(x_0, y_0)$ est un vecteur normal à la tangente.

Un point régulier d'une courbe paramétrée donnée par $t \mapsto (x(t), y(t))$ est un point de coordonnée $(x(t_0), y(t_0))$ tel que $(\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0)) \neq (0, 0)$. La tangente est alors bien définie et admet pour équation

$$x(t_0, y_0) + \mathbb{R}(\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0)).$$

Le vecteur $(\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0))$ est un vecteur tangent à la droite.

Lorsqu'on peut écrire une courbe sous forme paramétrée et implicite, les définitions co&quot ;ıncident (il suffit pour le voir de dériver la fonction constante $t \mapsto F(x(t), y(t))$).

Exercice 97 *Donner une expression explicite de la tangente à une conique propre, sous forme cartésienne, puis sous forme paramétrée. Montrer qu'une droite est tangente à une ellipse si et seulement si elle coupe cette ellipse en un unique point (on pourra se ramener au cas du cercle). Cette propriété reste-t-elle vraie pour les paraboles ?*

4.3 Définitions métriques des coniques

4.3.1 Définition par foyers et directrices

Dans cette section, $\mathcal{E}$ désigne un espace affine euclidien.

Proposition 24 *1) Pour toute conique propre d'image non vide qui n'est pas un cercle, il existe un point F appelé foyer, une droite D ne contenant pas F, appelée directrice et un nombre strictement positif e appelé excentricité tels que la conique soit l'ensemble des points M tels que $FM = ed(M, D)$.*

2) Inversement, étant donnés un point F, une droite D ne contenant pas F et un nombre $e > 0$, l'ensemble des points M du plan tels que $FM = ed(M, D)$ est une conique propre, une ellipse si $e < 1$, une parabole si $e = 1$ et une hyperbole si $e > 1$.

Preuve : 2) Soit F un point et D une droite ne passant pas par F. On choisit un repère orthonormé tel que D soit parallèle à l'axe des y et F soit sur l'axe des x. On note $(c, 0)$ les coordonnées de F et $x = h$ l'équation de D. Un point M de coordonnées (x, y) vérifie $FM = ed(M, D)$ si et seulement si

$$(x-c)^2 + y^2 = e^2(x-h)^2, \tag{4.2}$$

qui est bien l'équation d'une conique. Pour déterminer sa nature, on distingue deux cas :

a) Si $e = 1$, on choisit l'origine O du repère telle que $h = -c$. L'équation devient $y^2 = 4cx$, la conique est une parabole de sommet O et de paramètre $2|c|$.

b) Si $e \neq 1$, on choisit l'origine O du repère telle que $h = c/e^2$. L'équation devient

$$\frac{x^2}{(c/e)^2} + \frac{y^2}{(1-e^2)(c/e)^2} = 1. \tag{4.3}$$

On a une ellipse si $e < 1$ et une hyperbole si $e > 1$.

1) Inversement, soit $\mathcal{C}$ une ellipse. Dans un repère orthonormé bien choisi, elle admet l'équation réduite

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ avec } a > b > 0.$$

Il suffit de poser $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, $c = ae$ et $h = c/e^2$ pour réécrire cette équation sous la forme (4.3) puis (4.2), et donc obtenir que l'ellipse est bien l'ensemble des points M tels que $FM = ed(M, D)$ où F est le point de coordonnée $(c, 0)$ et D la droite d'équation $x = h$.

Maintenant, si $\mathcal{C}$ est une hyperbole, la seule différence avec ce qui précède est qu'on pose $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$.

Enfin, dans le cas de la parabole, dans un repère orthonormé bien choisi, elle admet l'équation réduite

$$y^2 = 2px.$$

On pose $c = p/2$ et $h = -c$. On reconnaît alors l'ensemble des points M tels que $FM^2 = d(M, D)^2$ où F est le point d'abscisse c et D la droite d'équation $x = h$.

□

Dans la deuxième partie de la preuve pour l'ellipse et l'hyperbole, on aurait aussi pu poser $c = -|ae|$ et obtenir le même ensemble. Autrement dit, une ellipse ou une hyperbole ont deux foyers et deux directrices associées. Les deux foyers et les deux directrices sont symétriques par rapport au centre.

Le calcul précédent montre que pour une ellipse, le foyer (de coordonnées $(c, 0)$ avec par exemple $c > 0$) et le centre de symétrie (de coordonnées $(0, 0)$) sont du même côté de la directrice (d'équation $x = h$ avec $h = c/e^2$) et que l'ellipse est contenue dans le demi-plan de frontière la directrice et qui contient son centre (autrement dit, si $M(x, y)$ est dans l'ellipse, alors $x < h$). On en déduit (en considérant l'autre paire foyer/directrice) qu' une ellipse est contenue dans la bande délimitée par les deux directrices.

Concernant les hyperboles, un calcul analogue montrerait que le centre et un foyer sont de part et d'autre de la directrice correspondante. Les deux branches de l'hyperbole (ses composantes connexes) sont situées hors de la bande délimitée par les deux directrices.

Exercice 98 *Soit F un foyer de l'ellipse $\mathcal{C}$ et soit D la directrice correspondante. Si M est un point de $\mathcal{C}$, soit P le point d'intersection de la perpendiculaire à (MF) en F et de la droite D. Alors la droite (PM) est tangente à $\mathcal{C}$ en M. (On rappelle que pour une ellipse, une droite est tangente si et seulement si elle a un unique point d'intersection avec l'ellipse).*

Même question lorsque $\mathcal{C}$ est une parabole.

4.3.2 Définition bifocale

Proposition 25 *1) Une ellipse de foyers F et F' est l'ensemble des points M tels que $MF+MF' = 2a$ pour un certain $a > \frac{1}{2}FF'$.*

2) Une hyperbole de foyers F et F' est l'ensemble des points M tels que $|MF - MF'| = 2a$ pour un certain $a < \frac{1}{2}FF'$.

Preuve : 1) Si $\mathcal{C}$ est une ellipse de foyers F et F' et si D et D' sont les directrices correspondantes, on a

$$MF + MF' = e(d(M, D) + d(M, D')) = ed(D, D')$$

car l'ellipse est située entre les deux directrices. On pose $a = ed(D, D')/2$ et on a donc

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{C}' := \{M : MF + MF' = 2a\}$$

avec $2a > FF'$.

Montrons l'inclusion réciproque. On choisit un repère d'origine le milieu de FF' et d'axe des x la droite FF' de sorte que les points F et F' ont pour coordonnées $(c, 0)$ et $(-c, 0)$ pour un certain $c > 0$. Si (x, y) sont les coordonnées d'un point M, alors

$$MF^2 + MF'^2 = 2(x^2 + y^2 + c^2)\ , MF^2 - MF'^2 = 4cx.$$

Alors $MF + MF' = 2a > 0$ implique $MF' - MF = 2cx/a$. On résout ce système :

$$MF = a - cx/a \ \text{ et } \ MF' = a + cx/a$$

et donc

$$(a - cx/a)^2 + (a + cx/a)^2 = 2(x^2 + y^2 + c^2),$$

équation qu'on peut réécrire :

$$(a^2 - c^2)(\frac{x^2}{a^2} - 1) + y^2 = 0$$

ou encore :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

C'est l'équation d'une ellipse (car $a > c$) et plus précisément (voir calcul de la proposition 24) l'ellipse d'ellipticité $e = c/a$, de foyers d'abscisse $\pm c$ et de directrices d'équations $x = \pm h$ avec $h = c/e^2 = a/e$. On reconnaît donc l'ellipse $\mathcal{C}$. Ainsi, $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$.

2) Pour une hyperbole, les branches n'étant pas contenues dans la bande délimitée par les deux directrices mais étant de part et d'autre, on a

$$|MF - MF'| = |ed(M, D) - ed(M, D')| = ed(D, D').$$

La suite du calcul est identique.

$\square$

4.4 Quadriques et résultant

Exercice 99 *Soit A un anneau factoriel et P, Q deux polynômes de $A[X]$ de degré respectif m et n strictement positifs. On note $P \wedge Q$ le pgcd de P et Q.*

1) Montrer que $P \wedge Q$ est un polynôme non constant si et seulement si il existe deux polynômes U et V tels que deg $U < n$, deg $V < m$ et $UP + VQ = 0$.

2) On désigne par $A[X]_d$ le A module libre des polynômes de degré inférieur ou égal à d. Soit f l'application A linéaire suivante :

$$f : (U, V) \in A[X]_{n-1} \times A[X]_{m-1} \rightarrow UP + VQ \in A[X]_{m+n-1}$$

On appelle résultant de P et Q, et l'on note rés (P, Q) le déterminant de l'application f calculé dans les bases

$$((X^{n-1}, 0), ..., (1, 0), (0, X^{m-1}), ..., (0, 1)) \ \text{ et } \ (X^{m+n-1}, ..., 1).$$

Notons $P = p_m X^m + ... + p_0$ et $Q = q_n X^n + ... + q_0$. Montrer que

$$\text{rés}\,(P, Q) = \begin{vmatrix} p_m & p_{m-1} & \cdots & & p_0 & & & \\ & p_m & p_{m-1} & \cdots & & p_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & p_m & p_{m-1} & \cdots & & p_0 \\ q_n & q_{n-1} & \cdots & & q_0 & & & \\ & q_n & q_{n-1} & \cdots & & q_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & q_n & q_{n-1} & \cdots & & q_0 \end{vmatrix}$$

Les n premières lignes sont construites à partir des coefficients de P, les m dernières à partir de ceux de Q. Les entrées non spécifiées sont nulles.

3) Montrer que $P \wedge Q$ est un polynôme non constant si et seulement si rés $(P, Q) = 0$ (on pourra considérer le corps des fractions de A et l'application $\hat{f} : K[X]_{n-1} \times K[X]_{m-1} \rightarrow K[X]_{m+n-1}$ construite sur le modèle de f).

Le résultant peut être utilisé pour ramener un système de 2 équations polynomiales en 2 variables à des équations en 1 variable :

Exercice 100 *Calculer le résultant rés$_Y$ (P, Q) des polynômes $P = X^2 - XY + Y^2 - 1$ et $Q = 2X^2 + Y^2 - Y - 2$ par rapport à la variable Y (autrement dit, on considère P et Q comme des polynômes à coefficients dans $A = \mathbb{R}[X]$). En déduire comment trouver les points d'intersection des ellipses d'équation $P = 0$ et $Q = 0$.*

On peut aussi utiliser le résultant pour passer d'une paramétrisation d'une courbe à son équation implicite :

Exercice 101 *Donner l'équation implicite de la courbe paramétrée : $x(t) = t^2 + 1, \ y(t) = t^2 + t$. On pourra considérer les polynômes $X - T^2 - 1$ et $Y - T^2 - T$ et éliminer T.*

4.5 Solutions des exercices

Solution 93

i) Conique à centre de centre $(0,0)$ qui n'est pas propre (c'est la réunion de deux droites).
ii) Conique qui n'est ni à centre ni propre (c'est un point).
iii) Conique propre à centre, de centre $(0,0)$ (c'est un cercle).
iv) Conique propre qui n'est pas à centre (c'est une parabole).

Solution 94

1) Il existe un repère orthonormé dans lequel l'équation de l'ellipse $\mathcal{E}$ est de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

En posant $X = x/a$ et $Y = y/b$, on a donc $X^2 + Y^2 = 1$. Il existe donc un unique $t \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ tel que $X = \cos t$ et $Y = \sin t$. Donc l'ellipse est contenue dans la courbe paramétrée $f : t \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) \mapsto (a\cos t, b\sin t)$. L'autre inclusion est évidente. Ainsi l'image de l'ellipse est l'image par la fonction continue f du segment $[0, 2\pi]$. On en déduit qu'elle est connexe et compacte.

2) On montre de même qu'il existe un repère orthonormé dans lequel l'hyperbole $\mathcal{H}$ admet pour paramétrisation $t \mapsto (\pm ach\, t, bsh\, t)$. On en déduit qu'elle est composée de deux composantes connexes, paramétrées respectivement par $t \mapsto (ach\, t, bsh\, t)$ et $t \mapsto (-ach\, t, bsh\, t)$ qui sont non bornées.

3) Soit $\mathcal{P}$ une parabole. Il existe un repère orthonormé dans lequel elle admet pour équation $y^2 = 2px$, ce qui donne une paramétrisation : $g : t \mapsto (t^2/2p, t)$. Donc $\mathcal{P}$ est connexe comme image de $\mathbb{R}$ par la fonction continue g. Elle est non bornée car g est non bornée.

Solution 95

– Conique $x^2+y^2-2xy+\lambda(x+y) = 0$ dans un repère orthonormé (O, e_1, e_2). La partie quadratique $q(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2$ est dégénérée, donc la conique n'est pas à centre. La forme quadratique augmentée $Q(x,y,z) = q(x,y) + \lambda z(x+y)$ est dégénérée si et seulement si $\lambda = 0$. Si $\lambda = 0$, c'est la droite d'équation $y = x$. Si $\lambda \neq 0$, c'est une parabole. Dans les nouvelles coordonnées $x' = (x+y)/\sqrt{2}, y' = (x-y)\sqrt{2}$, la conique a pour équation $y'^2 = -\lambda\sqrt{2}/2x'$. Ces nouvelles coorodonnées correspondent au nouveau repère orthonormé (O, e_1', e_2') avec $e_1' = (e_1+e_2)/\sqrt{2}$, $e_2' = (e_1 - e_2)/\sqrt{2}$. Il s'agit donc de la parabole d'axe e_1', de paramètre $|\lambda|\sqrt{2}/4$, tourné dans le même sens que e_1' ssi $\lambda < 0$.

– Conique $x^2 + y^2 + xy - 1 = 0$ dans un repère orthonormé (O, e_1, e_2). La partie quadratique $q(x,y) = x^2 + y^2 + xy$ est non dégénérée, donc la conique est à centre. Le centre est obtenu en calculant les coordonnées (x_0, y_0) du point O' telles que $df(x_0, y_0) = 0$, avec $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 1$. On trouve $(x_0, y_0) = (0,0)$ (ce qu'on aurait pu remarquer immédiatement puisqu'il n'y a pas de partie linéaire). La forme quadratique augmentée $Q(x,y,z) = q(x,y) - z^2$ est non dégénérée, donc la conique est propre. Dans la base (e_1, e_2), la matrice de q est

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dans le nouveau repère (O, e_1', e_2'), avec les nouvelles coordonnées $x' = (x-y)/\sqrt{2}$ et $y' = (x+y)/\sqrt{2}$, on obtient l'équation

$$\frac{1}{2}x'^2 + \frac{3}{2}y'^2 - 1 = 0.$$

On reconnaît l'ellipse centrée en 0, de demi-grand axe $\sqrt{2}$ dirigé selon e_1', et de demi-petit axe dirigé selon e_2'.

- Pour la conique d'équation $xy + \lambda(x + y) + 1 = 0$, dans un repère orthonormé (O, e_1, e_2), la forme quadratique $q(x, y) = xy$ est non dégénérée, donc la conique est à centre, de centre $O' = (-\lambda, -\lambda)$. Dans le repère (O', e_1, e_2), l'équation de la conique devient $x'y' = \lambda^2 - 1$, (avec $x' = x + \lambda, y' = y + \lambda$) i.e. $x''^2 - y''^2 = 2(\lambda^2 - 1)$, avec $x'' = (x' + y')/\sqrt{2}$ et $y'' = (x' - y')/\sqrt{2}$. On pose $e'_1 = (e_1 + e_2)/\sqrt{2}$ et $e'_2 = (e_1 - e_2)/\sqrt{2}$. Si $\lambda = \pm 1$, la conique est la réunion de deux droites d'équation $y'' = \pm x''$ dans le nouveau repère (O', e'_1, e'_2). Si $\lambda \notin \{-1, 1\}$, la conique est une hyperbole équilatère d'axes e'_1, e'_2, de centre O' (l'axe contenant les foyers étant e'_1 si $|\lambda| > 1$ et e'_2 si $|\lambda| < 1$).
- Pour la conique d'équation $\lambda x^2 - y^2 - 2x = 0$, dans un repère orthonormé (O, e_1, e_2), la forme quadratique $q(x, y) = \lambda x^2 - y^2$ est dégénérée si et seulement si $\lambda = 0$. Lorsque $\lambda = 0$, l'équation est $y^2 = -2x$. Il s'agit de la parabole de sommet $(0, 0)$, orientée par $-e_1$, de paramètre 1. Lorsque $\lambda \neq 0$, la conique est è centre, de centre $O' = (1/\lambda, 0)$ et dans le repère (O', e_1, e_2), elle a pour équation $\lambda^2 x'^2 - \lambda y'^2 = 1$ avec $x' = x - 1/\lambda, y' = y$. Si $\lambda > 0$, c'est une hyperbole. Si $\lambda < 0$, c'est une ellipse.
- Enfin, la conique d'équation $x^2 + xy - 2y + \lambda x + 1 = 0$, dans un repère orthonormé (O, e_1, e_2), est à centre, de centre $O' = (2, -\lambda - 4)$. Dans le repère (O', e_1, e_2), son équation devient $x'^2 + x'y' + 2\lambda + 5 = 0$. On pose $e'_1 = (1, \sqrt{2} - 1)$, $e'_2 = (1, -\sqrt{2} - 1)$. Dans le repère (O', e'_1, e'_2), l'équation devient
$$\frac{1 + \sqrt{2}}{2} x''^2 + \frac{1 - \sqrt{2}}{2} y''^2 = -2\lambda - 5.$$
On reconnaît une hyperbole de centre O', d'axes e'_1 et e'_2.

Solution 96 Commençons par observer que la tangence d'une droite à une courbe est une propriété affine, c'est-à-dire qu'elle est préservée par les bijections affines. En effet, donnons-nous par exemple une courbe C^1 $\mathcal{C}$ donnée par une équation $F(M) = 0$ et soit $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une bijection affine. L'image de $\mathcal{C}$ par ϕ est la courbe $\mathcal{C}' = \phi(\mathcal{C})$ d'équation $F \circ \phi^{-1}(N) = 0$. Si $M \in \mathcal{C}$, considérons la droite $\mathcal{D}$ tangente à $\mathcal{C}$ en M ce qui suppose que $DF(M) \neq 0$. On a $\mathcal{D} = \{M' : DF(M)(M' - M) = 0\}$ donc en notant $N = \phi(M)$, il vient
$$\phi(\mathcal{D}) = \{N' : DF(M)(\phi^{-1}(N') - \phi^{-1}(N)) = 0\} = \{N' : D(F \circ \phi^{-1})(N)(N' - N) = 0\}.$$
Donc $\phi(D)$ est la tangente à $\mathcal{C}'$ en N.
On peut alors résoudre l'exercice : par une application affine qui transforme l'ellipse en un cercle, les tangentes sont envoyées sur des tangentes et les cordes sur des cordes. Autrement dit, on peut supposer sans perte de généralité que l'ellipse est un cercle, auquel cas la droite passant par le milieu de MM' est la médiatrice de MM'. C'est donc un axe de symétrie pour la figure, ce qui permet de conclure.

Solution 97 Pour montrer qu'une droite est tangente à une ellipse si et seulement si elle intersecte cette ellipse en un unique point, il suffit là encore de se ramener au cas du cercle $\mathcal{C}$ d'équation $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. La tangente en (x_0, y_0) à $\mathcal{C}$ a pour équation $DF(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) = 0$, i.e. $x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0$. Autrement dit, c'est la droite orthogonale au rayon passant par (x_0, y_0) : (x_0, y_0) est la projection du centre $(0, 0)$ sur la droite. Le seul point commun entre cette droite et le cercle est donc (x_0, y_0).
Cette propriété n'est plus vraie pour les paraboles. Par exemple, l'axe de symétrie d'une parabole coupe la parabole en un unique point (son sommet) et pourtant n'est pas tangente à la parabole (elle est même orthogonale à la tangente au sommet).